Comm. Korean Math. Soc. **16** (2001), No. 1, pp. 1–24

초청논문

# 경쟁그래프와 경쟁수에 대하여

김 서 령

요약문. 어떤 유향그래프 $D$의 경쟁그래프란 $D$와 같은 꼭지점들의 집합을 갖고 두 개의 꼭지점 $x$와 $y$가 변으로 연결되어있는 것과 동치인 조건이 $D$에서 어떤 꼭지점 $z$에 대하여 유향변 $(x, z)$와 $(y, z)$가 존재하는 것인 그래프로 정의된다. 어떤 그래프 $G$의 경쟁수란 $G$에 첨가하여 생기는 그래프가 유향 회로가 없는 유향그래프의 경쟁그래프가 되도록 하는 고립된 꼭지점의 최소수로 정의된다. 경쟁그래프의 개념은 생태학적 위상공간의 최소차원을 결정하는 수단으로 1968에 Cohen에 의하여 도입되었다. 경쟁그래프와 그것의 변형들은 잡음이 많은 통신로 상에서의 교신, 라디오 송신기에 주파수 부여하기, 복잡한 경제 체계와 에너지 체계에 응용된다. 이 논문에서는 경쟁 그래프와 그 변형들, 경쟁수와 그 변형들에 대하여 소개하며 그것들에 대한 중요한 결과들을 개관하고 미해결 문제들을 제시하고자 한다.

## 제 1 절 서론

*단순 그래프*(simple graph)란 꼭지점(vertex)들의 집합 $V$와 $V$로부터 얻어지는 변(edge)이라고 불리는 무순서쌍들의 집합 $E$의 순서쌍 $(V, E)$로 정의된다. 이 논문에서는 단순 그래프만 취급하며 특별한 언급이 없는 한 단순 그래프를 그래프로 부르기로 한다. 어떤 그래프 $G$의 꼭지점들의 집합을 $V(G)$로, 변들의 집합을 $E(G)$로 나타내기로 하자. 그래프의 두 꼭지점 $u$와 $v$가 변에 의하여 연결되었을 때 그 연결변을 $uv$라고 표시하자. 유향그래프(digraph)란 꼭지점(vertex)들의 집합 $V$와, $V$로부터 얻어지는 유향변(arc)이라고 불리는 순서쌍들의 집합 $A$의 순서쌍 $(V, A)$로 정의된다. 어떤 유향그래프 $D$의 꼭지점들의 집합을 $V(D)$로, 유향변들의 집합을 $A(D)$로 나타내기로 하자. 만약 $A(D)$에 순서쌍 $(u, u)$가 속한다면 이 특별한 유향변을 *고리*라고 부른다. 이 논문에서 정의되지 않은 기본적인 그래프 용어들은 [4]에서 찾을 수 있다.

*생태학*이란 먹이그물, 좀 더 일반적으로 말하자면, *種*(species)이라고 불리는 '살아있는 것'들과 그것들의 물리적 환경과의 상호관계를 다루는 학문이다. 각 種이 정상적인 건강한 상태를 유지하기 위해서는, 특정한 범위에 있는 온도, 습도, PH, 먹이의 크기, 영양분 등이 필요하다고 가정할 수 있다. 이 요소들 중 서로 다른 $k$개가 주어지고 $k$ 차원의 유클리드 공간에

Received December 29, 2000. Revised January 3, 2001.
2000 Mathematics Subject Classification: 05C38, 05C90.
Key words and phrases: 경쟁그래프, 경쟁수, 유향그래프, 유향 회로가 없는 유향그래프.
The author thanks KOSEF for its support under grant Com$^2$MaC-KOSEF.

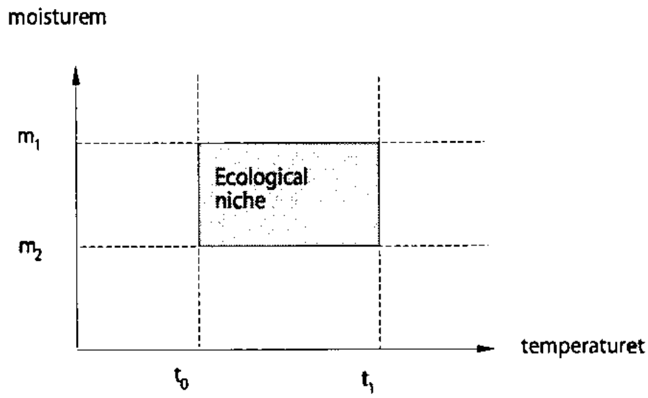
서의 각 차원이 각각의 요소를 나타내도록 했을 때, 그 種이 살아가기 위한 각 요소의 최적의 범위를 만족하는 점들로 구성된 영역을 *생태학적 지위*(ecological niche)라 부른다. 보통 각 요소의 최적 범위는 연속인 유한구간으로 주어진다. 이 경우, 생태학적 지위는 邊이 좌표축에 평행인 $k$차원의 장방형이고 ($k$차원의) *상자*(box)라고 불린다. 위의 언급된 온도 등과 같은 요소들을 각 차원으로 갖는 유클리드 공간을 *생태학적 위상공간*(ecological phase space)이라 부른다. 그림 1은 생태학적 지위의 한 예 이다.

생태학에서는 두 種이 서로 경쟁한다는 것과 그 둘의 생태학적 지위가 겹친다는 것이 동치라고 가정한다. 그렇다면 종들 사이의 경쟁구도가 주어진다면 그것을 나타낼 수 있는 생태학적 위상공간의 최소차원은 무엇일까? 이 질문에 접근하기 위하여, 생태학적 群棲의 먹이 그물이라는 개념을 도입하자. 어떤 생태학적 군서의 *먹이그물*(food web) $F$는 꼭지점들을 그 군서의 種들로 가지며 種 $u$가 種 $v$를 먹이로 취할 때마다 유향변 $(u, v)$를 갖는 유향그래프로 정의된다. 이 먹이그물 $F$에서의 경쟁은 두 種이 공통의 먹이를 취하면 그 둘이 *경쟁한다*(compete)고하여 정의된다. 이 정의로부터, $F$에 대응하는 *경쟁그래프*(competition graph) $G$는 다음과 같이 정의된다. $V(G) = V(F)$이고 꼭지점 $u$와 $v$에 대하여 $uv \in E(G)$일 동치조건이 어떤 꼭지점 $w$에 대하여 $(u, w) \in A(F)$이고 $(v, w) \in A(F)$인 것이다. 그림 2는 먹이그물과 그것의 경쟁그래프의 한 예이다. 먹이그물 $F$가 유향변 $(u, v)$를 가지면 $u$를 $v$의 *먹이*(prey), $v$를 $u$의 *포식자*(predator)라고 부른다. 위에서 제기된 생태적 위상공간의 차원 문제는 다음과 같이 바꾸어 표현될 수 있다. 경쟁 그래프 $G$가 주어졌을 때, 각 $G$의 각 꼭지점 $u$에 차원이 $k$인 유클리드 공간에 있는 상자 $B(u)$를 배정하여 서로 다른 꼭지점 $u$와 $v$에 대하여

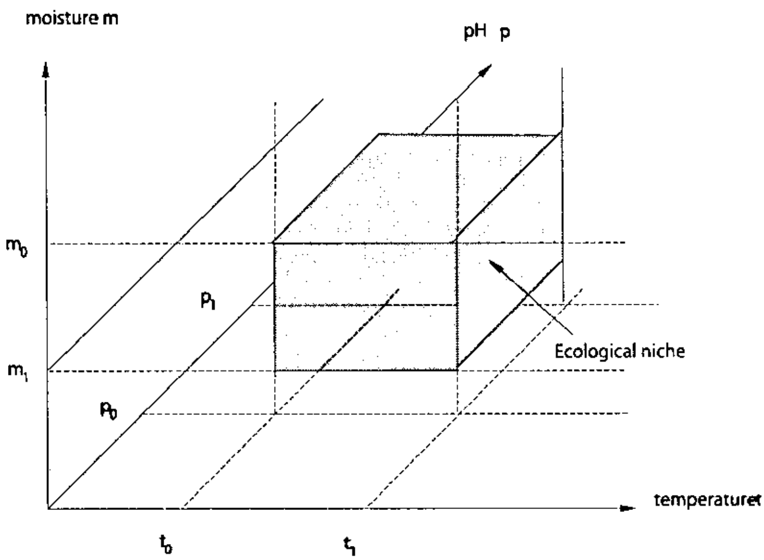
$$uv \in E(G) \Leftrightarrow B(u) \cap B(v) \neq \emptyset$$

이 성립할 수 있도록 하는 $k$의 최소값은? 이 값을 *상자값*(boxicity)이라고 부른다. Roberts [61]는 어떤 그래프도 有限 상자값을 갖는다는 것을 보였다. 상자값의 계산은 유감스럽게도 NP-완전문제(NP-complete problem)임이 Cozzens [15]과 Yannakakis [76]에 의하여 보여졌다. 상자값을 특별히 1로 갖는 그래프를 *구간 그래프*(interval graph)라고 부른다. 구간 그래프는 스케줄 짜기 ([28])와 Benzer의 문제라고 불리는 유전학 문제 ([2], [3]) 각각으로부터 독립적으로 도입되었다. 구간 그래프는 DNA 또는 RNA 분자들을 4개의 알파벳으로 이루어진 선형의 문자열로 나타낼 수 있다는 착상을 하게 하는데 지대한 역할을 하였다. ([59], [63]). 구간 그래프는 지금도 계속하여 현대 계산 생물학(computational biology) 연구에 중요한 역할을 하고 있다 ([1], [25], [34], [77]).

Cohen [11, 12, 13]은 유향 회로(directed cycle)가 없는 대부분의 먹이그물의 경쟁그래프가 구간 그래프라는 것을 경험적으로 관찰하였다. 그에 대하여 Roberts [61]는 경쟁그래프의 구조 때문에 생기는 어쩔 수 없는 현상이 아닐까 하고 생각하였으나, 임의의 그래프에 충분히 많은(변의 수 만큼) 고립점(isolated vertex)들을 넣어서 생기는 그래프는 언제나 유향 회로가 없는 유향그래프의 경쟁그래프가 됨을 보임으로써 그렇지 않다는 것을 보였다. 이

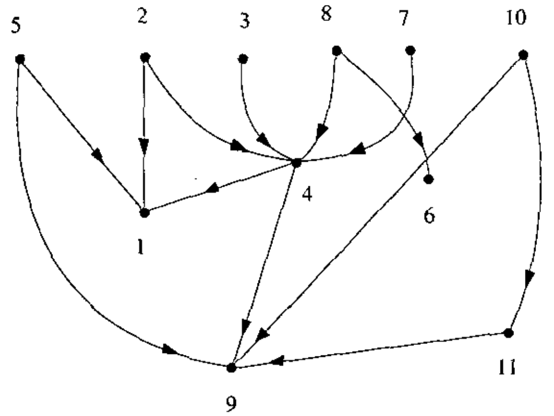



two dimensional case.




three dimensional case.

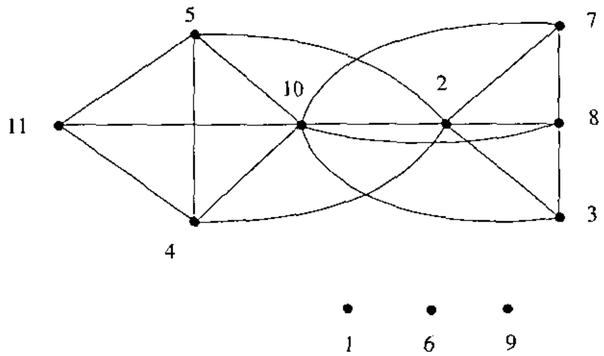
그림 1. 생태학적 위상공간의 예.




Food web $D$

Key

1. Canopy: leaves, fruits, flowers
2. Canopy animals: birds, fruit-bats, and other mammals
3. Upper air animals: birds and bats, insectivorous
4. Insects
5. Large groud animals: large mammals and birds
6. Trunk: fruit, flowers
7. Middle-zone scansorial animals: mammals in both canopy and ground zones
8. Middle-zone flying animals: birds and insectivorous bats
9. Ground: roots, fallen fruit, leaves and trunks
10. Small ground animals: birds and small mammals
11. Fungi




The competition graph of $D$

그림 2. Harrison [31]의 데이터로부터 얻어졌으며 Cohen [13]과 Roberts [61]에 의하여 채택된 말레이시아 우림의 먹이그물과 그것의 경쟁그래프.

것으로부터 Roberts [61]는 경쟁수라는 개념을 도입하게 되었는데 어떤 그래프 $G$의 *경쟁수*(competition number)란 $k(G)$로 표시되고 $G$에 $k$개의 고립점을 넣어주어 생기는 그래프가 유향 회로가 없는 유향그래프의 경쟁그래프가 되도록 하는 $k$의 최소값으로 정의된다. Roberts는 유향 회로가 없는 유향그래프의 경쟁그래프에 대하여 다음과 같은 두 가지의 근본적인 질문을 제기하였다.

1. 구간 그래프를 그것의 경쟁그래프로 갖는 유향 회로가 없는 유향그래프의 특징은?
2. 어떠한 그래프가 유향 회로가 없는 유향그래프의 경쟁그래프인가?

1번 질문에서 제기된 유향그래프를 *구간 유향그래프*(interval digraph)라고 부른다. Steif [73]가 구간 유향그래프에 대한 금지된 부분그래프 특징화(forbidden subdigraph characterization)가 없다고 보였듯이, 구간 유향그래프의 구조적 특징화를 하여 1번 질문에 답을 하기는 상당히 어려워 보인다. 이런 이유 때문에 일반적인 유향그래프보다는 흥미로운 특별한 성질을 가지고 있는 회로가 없는 유향그래프 중에서 어떤 것들이 그것의 경쟁그래프가 구간그래프인가를 알아보는 연구가 행하여 졌으며 이 연구와 병행하여 특정한 성질을 갖는 유향그래프(이 경우 유향그래프는 유향 회로를 가질 수도 있다)의 경쟁그래프를 특징화하는 문제도 연구되어왔다. 2번 질문은 그래프의 경쟁수를 구하는 문제로 재해석될 수 있다. 이 질문 또한 일반적인 그래프의 경쟁수를 구하는 문제는 NP-완전 문제임을 보인 Opsut [52]의 결과로 미루어 볼 때 답을 하기가 매우 어렵다는 것을 알 수 있다. 위의 질문에 접근하는 과정에서 많은 논문들이 쓰여졌으며 경쟁그래프의 변형들의 개념도 새로이 도입되고 연구되었다. 이 논문에서는 지금까지 나온 주요 결과들을 소개하고 미해결 문제들을 제시하고자 한다. 경쟁그래프와 경쟁수에 대한 결과를 개관한 논문으로는 [35], [36], [43], [64] 등이 있다. 2장에서는 구간 유향그래프에 대한 연구 결과들을 소개하고 3장에서는 특정한 성질을 만족하는 유향그래프의 경쟁그래프의 특징화와 그 변형들의 특징화에 대하여 다룬다. 4장에서는 경쟁수와 그 변형들에 대한 주된 연구결과를 다룬다

표 1에 어떤 유향그래프 $D$의 경쟁그래프와 그 변형들의 정의가 주어졌고 그림 3에 예가 제시되었다.

이 외에도 계통발생그래프와 지배그래프라는 개념이 최근에 도입되었다. 어떤 유향그래프 $D$의 *계통발생그래프*(phylogeny graph) $G$는 $D$와 같은 꼭지점의 집합을 가지고 $G$가 변 $xy$를 가진다는 것이 $D$가 점 $a$에 대하여 유향변 $(x,a)$과 $(y,a)$를 가지거나, 유향변 $(x,y)$ 또는 $(y,x)$를 갖는 것과 동치인 그래프를 의미하고 $P(D)$로 표기한다. 어떤 유향그래프 $D$의 *지배그래프*(domination graph) $G$는 $D$과 같은 꼭지점의 집합을 가지고 $G$가 변 $xy$를 가진다는 것이 $D$가 $x, y$를 제외한 각 점 $z$에 대하여 유향변 $(x,z)$ 또는 $(y,z)$를 갖는 것과 동치인 그래프를 의미하고 dom$(D)$로 표기한다. 그림 4에 그림 3에서 주어진 유향그래프 $D$의 $P(D)$와 dom$(D)$의 예가 제시되었다.

경쟁그래프의 개념은 생물학 외의 상황에서도 나타난다 ([58] 참조). 유향그래프 $D$의 꼭지점의 집합이 두 개의 집합 $A$와 $B$로 나뉘어지고($A$와 $B$의 공

| 그래프 | 꼭지점의 집합 | 변의 집합 |
|---|---|---|
| 경쟁그래프 (competition graph) $C(D)$ | $V(D)$ | $\{\{u,v\}$ : there exists a vertex $w$ in $V(D)$ such that arcs $(u,w)$, $(v,w)$ belong to $A(D)\}$ |
| $p$-경쟁그래프 ($p$-competition graph) $C_p(D)$ | $V(D)$ | $\{\{u,v\}$ : there exist $p$ distinct vertices $a_1,\dots,a_p$ in $V(D)$ such that arcs $(u,a_1)$, $(v,a_1)$, $\dots$, $(u,a_p)$, $(v,a_p)$ belong to $A(D)\}$ |
| 경쟁공적그래프 (competition-common enemy graph) $CC(D)$ | V(D) | $\{\{u,v\}$ : there exist vertices $w$ and $x$ in $V(D)$ such that arcs $(u,w)$, $(v,w)$ *and* arcs $(x,u)$, $(x,v)$ belong to $A(D)\}$ |
| 지위그래프 (niche graph) $N(D)$ | $V(D)$ | $\{\{u,v\}$ : there exists a vertex $w$ in $V(D)$ such that arcs $(u,w)$, $(v,w)$ *or* arcs $(w,u)$, $(w,v)$ belong to $A(D)\}$ |
| $m$단계 경쟁그래프 ($m$-step competition graph) $C^m(D)$ | $V(D)$ | $\{\{u,v\}$ : there exists a vertex $w$ in $V(D)$ such that there exist $(u,w)$-walk and $(v,w)$-walk of length $m$ in $D\}$ |

표 1. 유향그래프 $D$의 경쟁그래프와 그 변형들의 정의.

통 원소가 있을 수도 있다) 모든 유향변의 꼬리점(tail)이 $A$에, 머리점(head)이 $B$에 있다고 가정하자. 이 경우, 집합 $A$에 국한된 경쟁그래프가 종종 사용된다. Raychaudhuri와 Roberts [58]는 이것을 *일반화된 경쟁그래프*(generalize competition graph)라고 정의하였다. 예를 들어 $A$를 통신망에서 송신기들의 집합으로 $B$를 수신기들의 집합으로 생각하고, 송신기 $u$에서 보내진 메시지가 수신기 $v$에 전달되었다면 $A$에 있는 $u$로부터 $B$에 있는 $v$로 유향변이 존재하는 것으로 가정하자. 이 때, $A$에 있는 $x$와 $y$가 서로 *간섭한다*(interfere)는 것은 $x$와 $y$에서 보내진 신호들이 같은 수신기에 수신되는 것으로 즉, $x$와 $y$가 $D$의 $A$에 국한된 경쟁그래프에서 서로 인접되어 있는 것으로 정의할 수 있다. 통신망에서의 채널에 주파수를 부여하는 문제는 *간섭그래프*라고 불리는 이 경쟁그래프의 꼭지점을 색칠하는 문제로 귀착된다 ([46], [47], [50] [58] 참조).

이 아이디어는 부호화(coding)에서도 나타날 수도 있다. 집합 $A$는 전송 알파벳, $B$는 수신 알파벳이고 $A$에 있는 $u$로부터 $B$에 있는 $v$로 유향변이 존재하는 것은 부호 $u$가 보내졌는데 부호 $v$가 수신되었다는 것을 의미한다고 가정하자. 이 때, $A$에 있는 $x$와 $y$가 서로 *혼동될 수 있다*(confusable)는 것은 그 둘이 같은 문자로 수신될 수 있다는 것으로 즉, $x$와 $y$가 $D$의 $A$에 국한된 경쟁그래프에서 서로 인접되어 있는 것으로 정의할 수 있다. 이 경쟁그래프

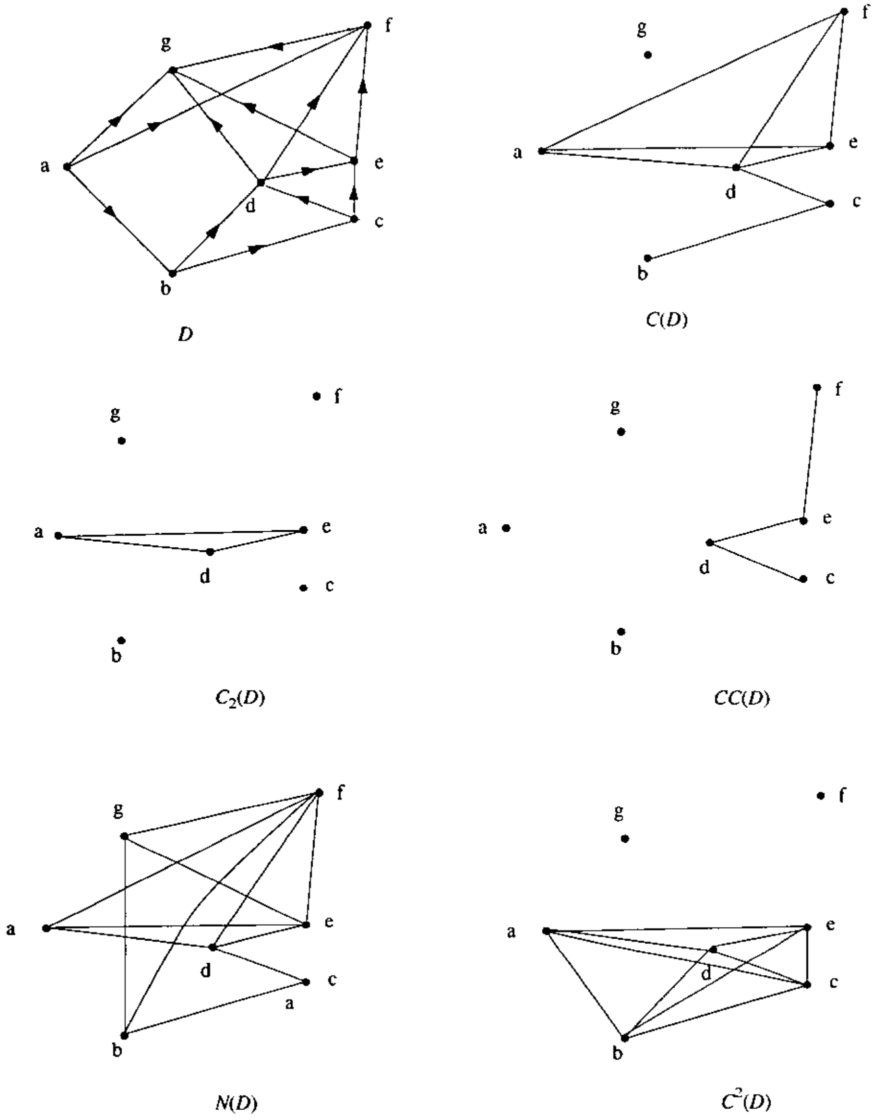



그림 3. 주어진 유향그래프 $D$의 $C(D)$, $C_2(D)$, $CC(D)$, $N(D), C^2(D)$

는 Shannon [71]의 혼동그래프(confusion graph)와 같다. 송신 알파벳에서 서로 혼동되지 않을 부호들의 최대 집합을 찾고자 하는 경우가 많은데, 이것은 경쟁그래프에서 최대인 독립된 집합(maximum independent set)을 발견하는 문제와 같다.

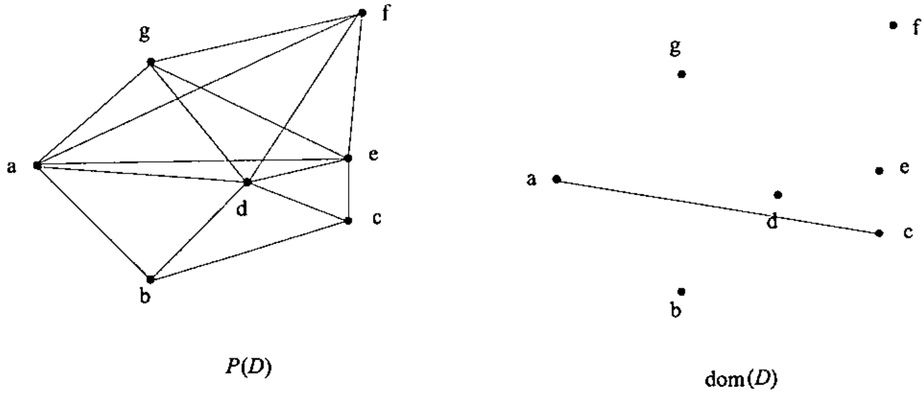



그림 4. 그림 3에서 주어진 유향그래프 $D$의 $P(D)$와 $\mathrm{dom}(D)$

경쟁그래프 개념은 서로 상반되는 요청들이 있는 상황에서 스케줄짜는 문제에서도 떠오를 수 있다. $A$가 시설의 사용자들의 집합, $B$를 시설들의 집합이라고 하고, $A$에 속한 $u$로부터 $B$에 속한 $v$로 유향변이 있다는 것은 사용자 $u$가 시설 $v$를 사용하기를 원하는 것을 의미한다고 가정하자. 이 때, 사용자 $x$와 $y$가 서로 *상반된다*(conflict)는 것은 그들이 똑같은 시설을 사용하기를 원한다는 것을 의미한다. 스케줄짜기에서 경쟁그래프의 또 다른 응용을 보면 $A$가 특정한 설비의 사용자들의 집합, $B$가 그 설비가 사용될지도 모르는 시간대들의 집합이고, $A$에 속한 $u$로부터 $B$에 속한 $v$로 유향변이 있다는 것은 사용자 $u$가 그 시설을 시간대 $v$에 사용하기를 원하는 것을 의미한다. 이 때, $x$와 $y$가 상반된다는 것은 그 둘이 같은 시간대에 그 시설을 사용하기를 원하는 것을 의미한다. 이 경우 $A$에 국한된 $D$의 경쟁그래프를 *상반 그래프*(conflict graph)라고 부른다.

경쟁그래프 개념은 에너지와 경제 체계를 모형화하면서 얻어질 수 있는 복잡한 체계의 모델들의 구조를 연구할 때 생겨날 수 있다. 이러한 모델에서는 종종 행렬을 사용하고 선형 프로그램(linear program)을 짜서 문제를 해결한다. $A$를 행렬 $M$의 행들의 집합, $B$를 열의 집합이라 하고 $M$의 $(u, v)$ 원소가 0이 아니면 $u$에서 $v$로의 유향변을 주자. 이 때, 대응하는 선형 프로그램에서 행 $x$와 $y$에 대응하는 제약(constraint)들이 0이 아닌 계수를 갖는 공통 변수를 포함하는 것과 위에서 정의된 유향그래프의 경쟁그래프에서 $x$와 $y$가 인접하는 것은 동치이다. 이렇게 정의된 경쟁그래프를 행렬 $M$의 *행 그래프*(row graph)라고 부른다. 이 행 그래프는 선형 프로그램의 구조를 이해하는데 유용하다 ([26], [27], [56], [57] 참조).

## 제 2 절 구간 유향그래프의 특징화

구간 그래프는 수학과 생물학을 연결시켜주는 중요한 역할을 하였으며, 구간 그래프와 경쟁그래프를 결부시킨 것은 경쟁그래프에 대한 많은 관심을 불러 일으킨 주된 원동력이었다.

순수한 계산적인 관점에서 보면, 구간 유향그래프를 특징화 하는 문제는 쉽게 해결될 수 있다. 임의의 유향그래프가 주어졌다면, 그것의 경쟁그래프를 쉽게 구할 수 있고 구간 그래프를 인식하는 일차 시간(linear-time) 알고리즘을 사용하면 된다. 이것은 Lundgren과 Maybee [44]가 결과를 얻기 위하여 사용한 아이디어인데, 그들은 어떤 그래프가 구간 그래프이기 위한 필요충분조건이 그것의 최대 완전 부분 그래프들(maximal cliques) 사이에 연속되는 랭킹(consecutive ranking)이 존재한다는 Fulkerson과 Gross [21]의 관찰을 이용하여 결과를 얻었다. 유향그래프 $D$의 꼭지점들의 집합들의 랭킹 $C_1, C_2, \ldots, C_r$이 *연속이라*(consecutive)는 것은 $i < j$이고 $C_i$와 $C_j$에 공통으로 속한 점 $u$가 존재하면 $u$는 $i < k < j$를 만족하는 모든 $k$에 대하여 $C_k$에 속하는 것으로 정의된다. 유향그래프 $D$의 꼭지점들의 집합들의 모임 $\{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$이 $D$의 *경쟁 덮개*(competition cover)라는 것은 $x$와 $y$가 $C_m$의 원소일 때마다 어떤 꼭지점 $a$에 대하여 $(x, a)$와 $(y, a)$가 $D$의 유향변이고, $(x, a)$와 $(y, a)$가 $D$의 유향변일 때마다 어떤 $m$에 대하여 $x$와 $y$가 $C_m$의 원소인 것으로 정의된다.

정리 1 ([44]). *유향그래프 $D$가 구간 유향그래프인 것은 $D$가 연속인 랭킹을 갖는 경쟁 덮개를 가지는 것과 동치이다.*

위와 같은 접근 방식의 문제점은 구간 유향그래프의 구조상의 성질들을 규명하는데 별로 도움을 줄 수 없다는 것이다. 좀 더 유용하게 쓰일 수 있는 것은 구조에 대한 결과인데 유감스럽게도 서론에서 언급된 바와 같이 금지된 부분그래프를 사용하여 구간 유향그래프를 특징화 할 수가 없기 때문에 매우 어려운 문제이다. 금지된 부분그래프를 사용하여 구간 유향그래프를 특징화 할 수가 없는 이유를 그림 5과 그림 6를 사용하여 설명할 수 있다. 그림 5의 $F_1$의 경쟁그래프는 $C_4 \cup I_1$로 구간 그래프가 아니다. 하지만 $F_1$은 그림 6의 $F_2$의 생성 부분 유향그래프임에도 불구하고 $F_2$의 경쟁그래프는 $K_6 \cup I_2$로 구간 그래프이다.

Cohen [13]은 꼬리점 생성 부분 유향그래프라는 개념을 사용하여 구간 유향그래프를 특징화 하였다. 어떤 유향그래프 $D$의 *꼬리점 생성 부분 유향그래프*(sink induced subdigraph) $H$란 $x \in V(H)$이고 $(x, y) \in A(D)$일 때마다 $y \in V(H)$를 만족하는 $D$의 생성 부분 유향그래프를 의미한다. 어떤 유향그래프 $D$의 *머리점 생성 부분 유향그래프*(source induced subdigraph) $H$란 $x \in V(H)$이고 $(y, x) \in A(D)$일 때마다 $y \in V(H)$를 만족하는 $D$의 생성 부분 유향그래프를 의미한다.

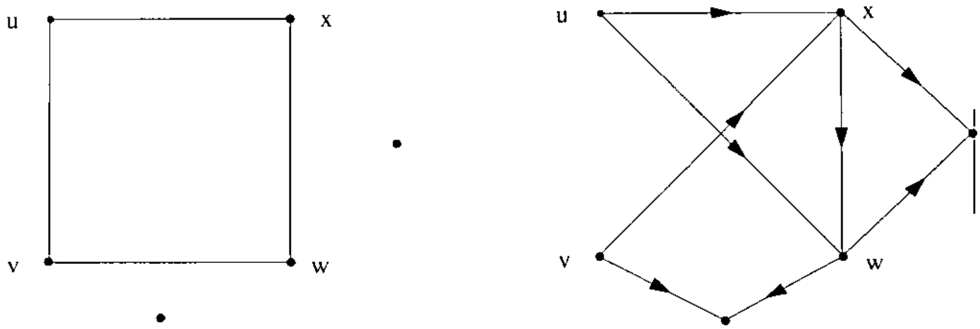



그림 5. 먹이그물 $F_1$과 그것의 경쟁그래프

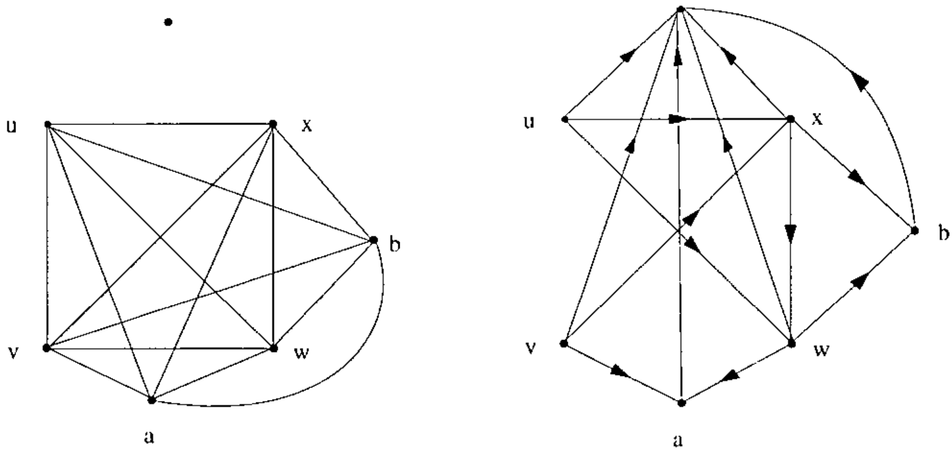



그림 6. 먹이그물 $F_2$과 그것의 경쟁그래프

정리 2 ([13]). *회로가 없는 유향그래프 $D$가 구간 유향그래프인 것은 $D$의 모든 꼬리점 생성 부분 유향그래프가 구간 유향그래프인 것과 서로 동치이다.*

위의 결과에서 꼬리점 생성 부분 유향그래프가 머리점 생성 부분 유향그래프로 대치될 수 없음이 또한 Cohen에 의하여 보여졌다. 위의 결과를 사용하려면 모든 꼬리점 생성 부분 유향그래프를 살펴보아야 하기 때문에 그리 유용한 결과라고 할 수 없다. 구간 유향그래프가 포함해서는 안 되는 꼬리점 생성 부분 그래프의 리스트가 존재함이 Steif [73]에 의하여 보여졌으나 그 리스트를 밝혀 내는 것은 상당히 어려워 보인다.

Lundgren과 Maybee [44]는 구간 그래프의 인접행렬(adjacency matrix)이 연속하는 1의 성질(consecutive ones property)을 만족한다는 사실을 이용하여 다음과 같이 어떤 유향그래프가 구간 유향그래프이기 위한 충분조건을 제시하였다.

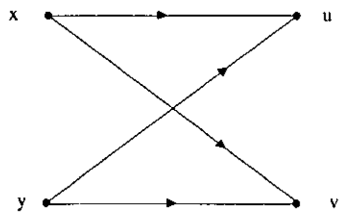



그림 7. $P(2,2)$

정리 3 ([44]). *어떤 유향그래프 $D$에 대하여, 각 꼭지점 $v$의 먹이들이 연속인 번호를 부여 받도록 $D$의 꼭지점들에 번호를 매길 수 있다면 $D$는 구간 유향그래프이다.*

Hefner 등 [32]은 유향그래프 중에서 각 꼭지점이 특정한 값의 내차수(in-degree)와 외차수(outdegree)를 갖는 회로가 없는 유향그래프로 범위를 축소시켜 그 안에서 구간 유향그래프의 특징을 살펴보고자 하였다. 이러한 시도는, Cohen과 Briand [14]가 실제의 먹이그물에서 관찰하여 얻은 결과에 따라 각 꼭지점의 차수의 평균이 약 2라고 주장한 것으로 미루어 볼 때, 자연스러운 것으로 볼 수 있다. $D$가 유향 회로가 없는 유향그래프라고 하자. 이 때, $D$는 다음 표에 따라 $(u,v)$유향그래프라고 불릴 수 있다.

| *$D$ is an* | *if for every vertex $x$* |
|---|---|
| $(i,j)$ *digraph* | $id(x) \leq i$ and $od(x) \leq j$; |
| $(\bar{i},\bar{j})$ *digraph* | if $id(x) = 0$ or $i$ and $od(x) = 0$ or $j$; |
| $(\bar{i},j)$ *digraph* | $id(x) = 0$ or $i$ and $od(x) \leq j$; |
| $(i,\bar{j})$ *digraph* | $id(x) \leq i$ and $od(x) = 0$ or $j$. |

$u = i$ 또는 $\bar{i}$ 이고 $v = j$ 또는 $\bar{j}$일 때, 그래프 $G$가 어떤 $(u,v)$유향그래프의 경쟁그래프이면 $G$를 $(u,v)$*경쟁그래프*라고 부른다. 다음과 같은 세가지 문제를 생각하여 보자.

1. $(u,v)$경쟁그래프 특징화 하기.
2. $(u,v)$구간 경쟁그래프 특징화 하기.
3. $(u,v)$구간 유향그래프 특징화 하기.

그림 7에 주어진 유향그래프를 $P(2,2)$라고 부르자. 만약 $D$가 $P(2,2)$를 부분그래프로 갖지 않는다면, $D$에 *여분이 없다*(irredundant)고 하자. Hefner 등 [32]은 $(2,2)$ 경우에 위의 세 문제를 모두 해결하였고 여분이 없는 $(\bar{i},\bar{j})$경우에 2번과 3번을 해결 하였다. $(2,2)$인 경우는 다음의 $(2,2)$경쟁그래프 $G$에 대한 두 가지 사실을 보임으로써 간단하게 분류될 수 있다.

1. $G$는 $K_{1,3}$를 생성 부분 그래프로 포함할 수 없다.

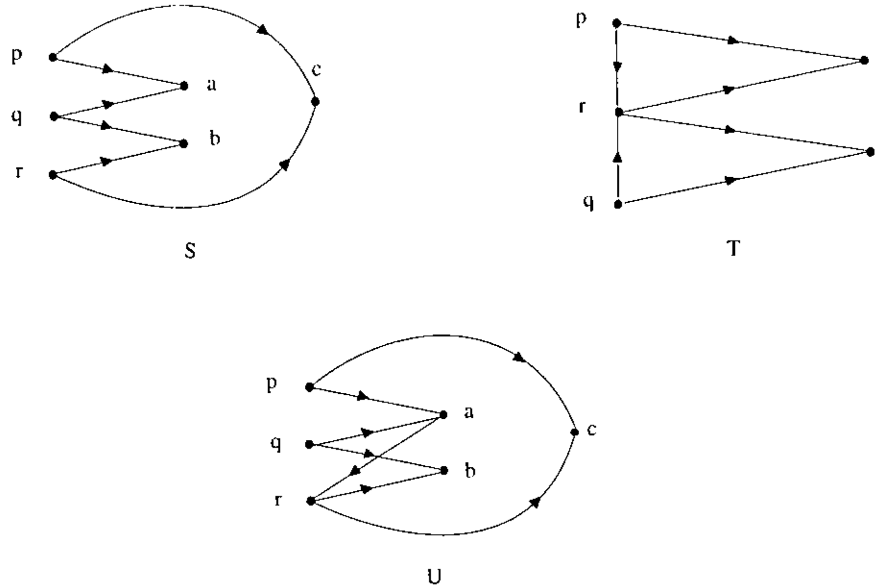



그림 8

2. 삼각형이 $G$의 부분 그래프이면 $G$의 성분이어야 한다.

정리 4. *어떤 그래프가 $(2,2)$경쟁그래프라는 것은 그것의 각 성분이 고립점, 경로(path) 또는 회로(cycle)이며 각 성분의 길이가 3보다 큰 회로일 때는 두 개 이상의 고립점을 가지고 그렇지 않을 때는 적어도 한 개의 고립점을 가진다는 것과 동치이다.*

따름정리 5. *어떤 그래프가 $(2,2)$구간 경쟁그래프라는 것은 그것의 각 성분이 고립점, 경로, 삼각형(triangle)이며 적어도 한 개의 고립점을 갖는다는 것과 동치이다.*

정리 6. *$D$가 $(2,2)$유향그래프라고 하자. 이 때, $D$가 구간 유향그래프라는 것은 $D$의 부분 그래프이면서 적어도 한 개의 유향변을 갖는 여분이 없는 $(\overline{2},\overline{2})$유향그래프는 그림 8의 $S,T,U$ 중의 한 개를 생성 부분 그래프로 포함한다는 것과 동치이다.*

여분이 없는 $(\bar{i},\bar{j})$구간 경쟁그래프를 다음과 같이 특정한 블록 디자인의 존재성을 사용하여 특징화 시킬 수 있다.

정리 7. *$i,j \geq 2$이고 그래프 $G$가 적어도 두 개 이상의 꼭지점을 가지고 있다고 가정하자. 이 때, $G$에 충분히 많은 고립점을 넣어주어서 생기는 그*

*래프가 여분이 없는 $(\bar{i},\bar{j})$구간 경쟁그래프라는 것은 $G$의 적어도 두 개 이상의 꼭지점을 갖는 성분이 $K_{\lfloor j(i-1)+1 \rfloor}$ 이고 $r=j$이고 $k=i$인 $(b,v,r,k,1)$-디자인이 존재하는 것이다.*

어떤 그래프 $G$의 꼭지점 $x$가 *단체*(simplicial)라는 것은 $x$가 꼭지점 $y, z$와 인접되어 있을 때마다 $y$와 $z$가 인접되어있다는 것이다. 유향그래프 $D$의 꼭지점 $x$가 *유향단체* (di-simplicial)라는 유향변 $(x,u)$, $(y,u)$, $(x,v)$, $(z,v)$이 존재할 때마다 유향변 $(y,w)$, $(z,w)$가 존재하는 것이다. 경쟁그래프의 정의에 의하여 꼭지점 $x$가 유향단체라는 것은 그것에 $C(D)$에서 단체라는 것과 동치라는 것을 쉽게 알 수 있다. 다음은 여분이 없는 $(\bar{i},\bar{j})$구간 유향그래프의 특징화이다.

정리 8. *$i,j \geq 2$라고 가정하자. 이 때 여분이 없는 $(\bar{i},\bar{j})$구간 유향그래프 $D$가 구간 유향그래프라는 것과 $D$의 각 꼭지점이 유향단체라는 것과 동치이다.*

구간 유향그래프에 대한 해결되지 않은 문제들을 몇 개 제시하면, 유향그래프가 여분이 없다는 가정을 하지않고 $(\bar{i},\bar{j})$ 경우에 대하여 위에 제시된 세 질문에 답하는 것과, $(2,2)$ 외의 경우에 대하여 금지된 부분그래프를 사용하여 특징화 하기, 먹이그물을 조사하여 의미가 있는 성질을 찾아내어 그 성질을 만족하는 유향그래프에 대하여 위에 제기된 문제들에 답하는 것이다.

## 제 3 절 특정한 성질을 만족하는 유향그래프의 경쟁그래프

이 절에서는 특별한 성질을 만족하는 유향그래프의 경쟁그래프에 대한 연구결과를 알아보고자 한다. 우선 그래프가 어떤 일반적인 유향그래프의 경쟁그래프가 되기 위한 조건을 알아본다.

### 3.1. 일반적인 유향그래프

그래프 $G$의 각 변이 그래프 $G$의 완전 부분 그래프들의 모임인 $C$의 한 원소에 포함되어있을 때 $C$를 $G$의 변 *덮개*(edge cover)라고 부른다.

정리 9 ([17]). *$n$개의 꼭지점을 가지는 그래프 $G$가 어떤 유향그래프의 경쟁그래프인 것과 $G$가 $n$개 이하의 원소를 가지는 변 덮개를 가지는 것과 동치이다.*

정리 10 ([68]). *$n$개의 꼭지점을 가지는 그래프 $G$가 고리를 가지지 않는 어떤 유향그래프의 경쟁그래프일 필요충분조건은 $G$가 꼭지점 두 개를 갖는 완전그래프 $K_2$와 동치가 아니고 $n$개 이하의 원소를 가지는 변 덮개를 가지는 것이다.*

이 외에도 어떤 유향그래프의 경쟁공적그래프 ([70] 참조), $p$-경쟁그래프 ([39]), 자위그래프 ([5]), $m$단계 경쟁그래프 ([9]), 계통발생그래프 ([65])가 되는 그래프의 특징화도 각각 유사하게 되어있다.

### 3.2. 강하게 연결된 유향그래프와 해밀톤 유향그래프

강하게 연결되어 있는 유향그래프(strongly connected digraph)의 경쟁그래프와 해밀톤 유향그래프의 경쟁그래프는 Fraughnaugh 등 [22]에 의하여 특징화 되었다. 강하게 연결되어 있는 유향그래프는 통신문제에 응용되는 유향그래프로 서론에서 언급했듯이 이 유향그래프의 경쟁그래프는 간섭그래프이다. 그래프 $G$의 변 덮개 중 크기가 가장 작은 것의 크기를 $\theta_e(G)$로, $G$의 고립점의 개수를 $i(G)$로 표시하자.

정리 11 ([22]). *$n$개의 꼭지점을 가지는 $K_2$가 아닌 그래프 $G$가 고리가 없는 강하게 연결된 유향그래프의 경쟁그래프이기 위한 필요충분조건은 $\theta_e(G) + i(G) \leq n$이다.*

유향그래프가 모든 꼭지점을 다 지나는 유향회로를 가지고 있으면 *해밀톤이라*(hamiltonian)고 불린다.

정리 12. *$n$개의 꼭지점을 가지는 그래프 $G$가 해밀톤인 것과 필요충분조건은 $G$의 꼭지점들이 $v_1, v_2, \ldots, v_n$으로 이름 지어지고 $G$의 변 덮개 $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$가 존재하여 각 $i = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 $v_i \notin C_i$이고 $i = 1, 2, \ldots, n-1$에 대하여 $v_i \in C_{i+1}$이며 $v_n \in C_1$인 것이다.*

### 3.3. 토너먼트

유향그래프 $D$가 서로 다른 각 꼭지점 $x$와 $y$에 대하여 유향변 $(x, y)$와 $(y, x)$ 중 정확하게 한 개가 $D$의 유향변이면, $D$를 *토너먼트*(tournament)라고 부른다. 토너먼트는 스포츠를 비롯한 많은 분야에 응용된다. 생태학에서는 한 種에 속한 개체들의 모임에서 개체 $x$가 개체 $y$에 우세할($x$ dominates $y$) 때마다 $x$에서 $y$로의 유향변을 줌으로써 토너먼트를 얻을 수 있다. 토너먼트의 경쟁그래프는 최근에 지배그래프라는 개념으로 연구되었다. Fisher 등 [20]은 토너먼트 $T$의 경쟁그래프는 $T$ 의 유향변을 나타내는 순서쌍의 순서들을 모두 뒤집어 생기는 새로운 토너먼트 $T'$의 지배그래프라는 것을 보였다. 토너먼트 $T$의 경쟁그래프를 다루는 것보다 $T'$의 지배그래프를 다루는 것이 때론 더 쉽고, 또한 지배그래프에 대한 결과가 경쟁그래프보다 도출되기가 상대적으로 용이하다는 점이 지배그래프라는 개념이 도입된 이유 중의 하나이다. *펜던트 점*(pedant vertex)이란 차수가 1인 꼭지점을 의미한다. *스파이크 회로*(spiked cycle)란 펜던트 점을 제거하였을 때 회로가 되는 연결된 그래프를 의미한다. *쐐기벌레*(caterpillar)란 펜던트 점을 제거하였을 때 경로가 되는 수형도(tree)를 의미한다.

정리 13 (20]). *$T$가 토너먼트이면 그것의 지배그래프는, 고립점이 첨가되어 있을 수도 있는 홀수 길이를 갖는 스파이크 회로, 또는 쐐기벌레 들을 성분으로 갖는 숲(forest), 둘 중의 하나이다.*

정리 14 ([20]). *$G$가 고립점이 첨가되어 있을 수도 있는 홀수 길이를 갖는 스파이크 회로이면 $G$는 토너먼트의 지배그래프이다.*

Fisher 등 [19]은 *방향 지어진 유향그래프*(oriented digraph)라고 불리는, 고리나 길이가 2인 유향회로를 갖지 않는 유향그래프에 대하여 유사한 결과를 얻었고 Cho 등 [6, 7]은 일정차수를 가지는 토너먼트(regular tournament)의 지배그래프를 특징화 하였다.

### 3.4. 대칭 유향그래프

대칭 유향그래프는 Raychaudhuri와 Roberts [58]에 의하여 처음으로 연구되었다. 유향그래프 $D$의 유향변의 집합이 $D$의 꼭지점들의 집합 위에서 대칭인 관계(symmetric relation)를 이루면 $D$를 *대칭 유향그래프*(symmetric digraph)라고 부른다. 이 정의로 미루어 볼 때 $D$가 대칭 유향그래프라면, 그래프 $U(D)$를 $D$와 같은 꼭지점의 집합을 갖고 $D$가 유향변 $(x, y)$를 갖는 필요충분조건이 $x$와 $y$가 $U(D)$에 인접하는 것으로 정의하고 이 $U(D)$를 연구하는 것이 유용할 것이다. 만약 $P$가 그래프의 성질이고 대칭 유향그래프 $D$의 $U(D)$가 이 성질을 만족하면, $D$가 $P$를 만족한다고 하자. $G$가 고리가 없는 그래프일 때, $G$의 *제곱*(square)이란 $G$와 같은 꼭지점의 집합을 갖고 꼭지점 $x$와 $y$가 제곱에서 인접할 필요충분조건이 $x$와 $y$가 길이가 2이하인 경로에 의하여 연결되어있는 것인 그래프를 의미한다. $G$의 *2단계 그래프*(2-step graph)란 $G$와 같은 꼭지점의 집합을 갖고 꼭지점 $x$와 $y$가 2단계 그래프에서 인접할 필요충분조건이 $x$와 $y$가 길이가 2인 경로에 의하여 연결되어있는 것인 그래프를 의미한다. Raychaudhuri와 Roberts는 단위 구간 그래프의 경쟁그래프에 대하여 연구하였다. 1차원의 상자들을 실수선 상에서의 닫혀진 단위 구간들로만 국한시켰을 때, 상자값 1을 갖는 그래프를 *단위 구간 그래프*(unit interval graph)라고 부른다. 서론에서 언급된 통신 문제에서, 수신기를 겸한 송신기가 선형으로 늘어서 있고 점 $x$에 위치한 송신기에서 보내진 메시지가 점 $y$에 위치한 수신기에 전달되기 위한 필요충분조건이 $x$와 $y$사이가 일정한 거리를 넘지 말아야 하는 경우에 단위 구간 그래프의 경쟁그래프라는 개념이 제기될 수 있다. Raychaudhuri와 Roberts는 대칭 유향그래프 $D$가 각 점에 고리를 가지는 단위 구간 그래프이고 $U'$이 $U(D)$에서 고리를 제거한 후 얻어지는 그래프라면, $D$의 경쟁그래프는 $U'$의 제곱임을 보이고 한 단계 더 나아가서 다음을 보였다.

정리 15. *$G$를 고리가 없는 $n$개의 꼭지점을 가지는 그래프라고 가정하자. 이 때, $G$가 각 점에 고리를 가지는 단위 구간 그래프의 경쟁그래프이기 위한 필요충분조건은 $G$의 꼭지점들이 $v_1, v_2, \ldots, v_n$으로 이름 지어지고 변 덮개 $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$가 존재하여 각 $i = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 $v_i \in C_i$이고, $i \neq j$에 대하여 $v_i \in C_j$인 것과 $v_j \in C_i$인 것이 동치이며, $i < j < k$이고 $v_k \in C_i$이면 $v_j \in C_i$이고 $v_j \in C_k$인 것이다.*

Lundgren, Maybee와 Rasmussen [46, 47]는 $D$가 고리가 없는 대칭 유향그래프라면 $D$의 경쟁그래프는 $U(D)$의 2단계 그래프임을 관찰하고 어떠

한 조건 하에서 고리가 없는 대칭 유향그래프의 2단계 그래프가 구간 그래프 또는 단위 구간 그래프인가를 연구하였다. Lundgren과 Rasmussen [51]는 $D$가 수형도일 때 이 문제를 해결하였다. $W$를 꼭지점의 집합을 $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d\}$로 가지고 변의 집합을 $\{a_1a_2, a_2a_3, b_1b_2, b_2b_3, b_3d, c_1c_2, c_2c_3, c_3d\}$로 가지는 그래프라고 하자.

정리 16 ([51]). *$T$를 수형도라고 하자. $T$의 2단계 그래프가 구간 그래프이기 위한 필요충분조건은 $T$가 $W$를 생성 부분 그래프로 포함하지 않는 것이다.*

그래프의 둘레(girth)란 가장 짧은 회로의 길이를 의미한다.

정리 17 ([45]). *그래프 $G$의 둘레가 5 또는 7이상일 때, $G$의 2단계그래프는 구간그래프가 아니다.*

둘레가 3, 4, 6인 경우는 아직 해결되어있지 않다. Lundgren 등 [45]은 $G$가 길이가 6인 회로를 갖지 않는 경우에 그것의 2단계 그래프가 구간 그래프인 $G$를 특징화 하였다. 어떤 그래프 $G$가 *삼각화 되어 있다*(triangulated)는 것은 $G$가 길이가 4이상인 회로를 생성 부분 그래프로 가지지 않는 것을 의미한다. 삼각화 된 2단계 그래프를 가지는 그래프 특징화 하기, 삼각화 된 제곱을 가지는 그래프 특징화 하기, 제곱을 구간그래프로 가지는 그래프 특징화 하기 등은 미해결 문제들이다. 이 문제들을 해결하고자 하는 과정에서 얻어진 결과들은 [30], [48], [49], [55]에서 찾아 볼 수 있다.

### 3.5. 반순서, 조건 $C(p)$를 만족하는 유향그래프, 조건 $C^*(p)$를 만족하는 유향그래프

최근에 Kim과 Roberts [42]는 반순서, 조건 $C(p)$를 만족하는 유향그래프, 조건 $C^*(p)$를 만족하는 유향그래프 의 경쟁그래프에 대하여 연구하였다. 임의의 유향그래프 $D = (V, A)$가 *반순서*(semiorder)라는 것은 $V$위에서의 실수 값을 갖는 함수 $f$와 실수 $\delta > 0$가 존재하여 $V$의 임의의 원소 $x, y$에 대하여

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \delta$$

성립한다는 것으로 정의된다.

송신기와 수신기가 일직선상에 위치하고 메시지가 오직 오른쪽에서 왼쪽으로 전달된다고 가정하자. 또한 국지적인 간섭때문에, $x$에서 보낸 메시지가 $y$에서 수신될 필요충분조건은 $y$가 충분한 거리(예를 들어 10미터 이상)를 두고 $x$의 왼쪽에 있는 것이라고 가정하자. 이 통신 문제에서의 유향그래프 $D$는 반순서이고 이것으로부터 "반순서의 경쟁그래프는 무엇일까?"하는 질문이 자연스럽게 제기될 수 있다. Kim과 Roberts는 이 문제를 반순서의 자연스럽게 일반화된 개념인 구간순서의 경쟁그래프를 특징화 함으로써 간단히 해결하였다. $J$와 $J'$이 두 개의 실수 구간일 때, $J$의 임의의 원소 $a$와 $J'$의 임의의 원소 $b$에 대하여 $a > b$가 성립할 때 $J \succ J'$로 표기한다. $D = (V, A)$가

구간순서(interval order)라는 것은 $V$의 각 원소 $x$에 실수 구간 $J(x)$를 부여하여 $V$의 임의의 원소 $x$와 $y$에 대하여

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow J(x) \succ J'(y).$$

를 만족하는 것으로 정의된다. 반순서는 모든 구간이 똑같은 길이를 갖는, 구간 순서의 특별한 경우이다.

정리 18. *그래프 $G$가 구간순서의 경쟁그래프라는 것과 필요충분조건은 0보다 큰 $q$에 대하여 $G = I_q$ 또는 1보다 큰 $r$과 0보다 큰 $q$에 대하여 $G = K_r \cup I_q$이다.*

유향그래프 $D = (V, A)$에 대하여, $V$위에서의 관계(relation)를 다음과 같이 정의하자.

$$aWb \Leftrightarrow [(b, u) \in A \rightarrow (a, u) \in A].$$

유향그래프 $D$가 *조건* $C(p)$를 만족한다는 것은 $S$가 $D$의 꼭지점 $p$개를 갖는 집합일 때마다 $S$의 원소 $x$가 존재하여 $S - \{x\}$의 각 원소 $y$에 대하여 $yWx$인 것으로 정의된다. $p \geq 2$일 때, 조건 $C(p)$의 변형으로 $C^*(p)$는 다음과 같이 정의된다. 유향그래프 $D$가 *조건* $C^*(p)$를 만족한다는 것은 $S$가 $D$의 꼭지점 $p$개를 갖는 집합일 때마다 $S$의 원소 $x$가 존재하여 $S - \{x\}$의 각 원소 $y$에 대하여 $xWy$인 것으로 정의된다. Kim과 Roberts는 $C(p)$를 만족하는 유향그래프와 유향 회로가 없는 유향그래프를 특징화하고 $p \leq 5$에 대하여 $C^*(p)$를 만족하는 유향 회로가 없는 유향그래프를 특징화 하였다.

## 제 4 절 경쟁수와 그 변형

서론에서 언급한 바와 같이 유향 회로가 없는 유향그래프의 경쟁그래프의 특징화와 경쟁수를 계산하는 것은 동일하다. 일반적으로 그래프의 경쟁수를 구하는 것은 어려운 문제이다.

정리 19 ([52]). *그래프 $G$의 경쟁수 $k(G)$를 계산하는 것은 NP-완전 문제이다.*

표 2에 경쟁수의 변형들의 정의와, 중요한 그래프들의 경쟁수와 그 변형들이 주어졌다. 이 논문에서는 [36]에 수록된 경쟁수에 대한 결과들 외에 새롭게 얻어진 중요 결과들만을 다루고자 한다.

### 4.1. 경쟁수를 발견하기 위한 삭제 절차

Roberts [61]는 *삭제수*(elimination number)라고 불리고 $m(G)$로 표기되는 그래프의 경쟁수의 상계를 주는 절차(procedure)를 제시하고 많은 그래프 $G$에 대하여 $k(G) = m(G)$임을 보였다. 하지만 Opsut [52]이 두 수를 달리 가지는 그래프를 찾아내어 그 두 수가 다를 수도 있음을 보였다. Kim과 Roberts [41]는 이 절차를 향상시켜 *수정된 삭제수*라고 불리고 $M(G)$로 표기되는 그래프의 경쟁수의 상계를 구하는 새로운 절차를 제시하였다. 이 절차

들은 그래프 이론을 응용하여 Gaussian 삭제 방법에서 최적화된 삭제 순서를 연구하면서 Parter [54], Rose [69], Golumbic [24] 등이 사용하였던 절차들과 같지는 않지만 유사하다. 이 두 절차 모두 $n$번 시행되어야 하고 각 시행 시마다 계산이 지수적 시간을 필요로 하듯이 그리 효율적이지 못하다. 하지만 삭제 절차가 경쟁수를 계산하는데 사용될 수 있느냐는 오래 전에 제기되어 미해결 문제로 남아있는 질문에 접근하기위한 시도로 본다면 이 절차들은 효율성을 떠나 그 의미가 있다고 할 수 있다.

간단히 수정된 삭제 절차를 소개하면, 그래프 $G$가 주어졌을 때 $G$의 꼭지점들을 한 번에 한 개씩 제거해 나가면서 $G$에 고립점이 추가된 그래프를 경쟁그래프로 갖는 유향회로가 없는 유향그래프를 만드는 것이다. $G$의 꼭지점들이 $v_1, v_2, \ldots, v_n$으로 순서 지어졌다고 가정하자. 수정된 삭제 절차의 $j$번째 단계에서 $G$와 같은 꼭지점의 집합을 가지는 유향회로가 없는 유향그래프 $F_j = (V_j, A_j)$를 만든다. 유향그래프 $F_n$은 $G$에 고립점들이 첨가된 그래프를 경쟁그래프로 가지게 된다. $G$의 변 $xy$는 어떤 $j$에 대하여 $j$번째 단계에서 $F_j$에 어떤 꼭지점 $a$에 대하여 유향변 $(x, a)$, $(y, a)$를 넣어줌으로써 포함된다(covered). $G$의 아직 포함되지 않은 변들은 $G$의 생성 부분 그래프인 $G_j$를 사용하여 추적한다. 이 절차는 또한 이전의 단계에서 삭제되지 않은 꼭지점으로 생성된 부분 그래프 $H_j$도 추적한다. $j$번 째 단계에서 꼭지점 $v_{j+1}$에 따르는(incident) 아직도 포함되지 않은, 즉 $G_j$에 아직도 남아 있는 변들을 포함하는 $H_j$의 최대 완전 부분 그래프들을 사용하여, $F_j$에 유향변들을 다음과 같이 더한다. 각 완전 부분 그래프마다, 그것의 모든 꼭지점으로부터 같은 한 점으로 유향변들을 더해준다. 이 때 머리점으로 쓰인 꼭지점은 이전 단계에서 삭제되었던 점이거나 $G$에 새롭게 첨가된 점이다. 이렇게 새로 첨가된 점들은 경쟁그래프에서 고립점 역할을 한다. 이런 식으로 $v_j$에 따르는 $G_j$에 있는 변들을 다 포함할 수 있다. Kim과 Roberts는 이 수정된 절차가, 주어진 꼭지점 순서 $P$에 대하여, 그것의 경쟁그래프가 $G$에 $M(G, P)$개의 고립점이 첨가된 그래프인 유향그래프 $F_n$을 만들어 낸다는 것을 보였다. $G$의 수정된 삭제수 $M(G)$는 $G$의 꼭지점의 순서 $P$에 대하여 $M(G, P)$를 구했을 때 그 중 최소값으로 정의된다.

연(kite)이란 그래프는 다음과 같이 정의된다. 4개의 꼭지점을 가지는 경로 $xyzw$에 점 $a$를 더하여 $a$가 이 4개의 점 모두에 인접하도록 한다. 변 $xz$, $yw$를 제외하고는 모든 가능한 변을 더해준다. 어떤 그래프가 연을 *갖지 않는다*(kite-free)는 것은 그 그래프가 연을 생성 그래프로 갖지 않는다는 것을 의미한다.

정리 20 ([41]). *$G$가 연을 갖지 않는다면 $k(G) = M(G)$이다.*

아직까지 $k(G) = M(G)$를 만족하지 않는 그래프는 발견되지 않았다.

### 4.2. 삼각형의 수가 작은 그래프의 경쟁수

$\nu$가 G의 꼭지점의 개수이고 $\epsilon$이 $G$의 변의 개수일 때, Roberts [61]는 연결되어 있고 삼각형을 갖지 않는 그래프 $G$의 경쟁수가 $\epsilon - \nu + 2$임을 보였다.

그렇다면 삼각형을 정확하게 한 개 가지고 있는 그래프의 경쟁수는 얼마일까? Kim과 Roberts [40]는 이 질문에 다음과 같이 답하였다.

정리 21. *G가 연결되고 정확하게 한 개의 삼각형을 가지면,* $k(G)$*는* $\epsilon - \nu$ *또는* $\epsilon - \nu - 1$*이고 전자가 성립할 필요충분조건은 G가 길이가 적어도 4인 회로를 생성 부분 그래프로 포함하는 것이다.*

Kim과 Roberts는 삼각형을 정확하게 두 개 가지는 그래프의 경쟁수를 구하는 공식도 제시하였는데 삼각형이 한 개일 때보다 훨씬 복잡하다. 따라서 삼각형을 정확하게 세 개 가지는 그래프의 경쟁수를 구하는 것은 상당히 어려워 보이며 아직 미해결 문제이다. Roberts [64]는 삼각형 대신 제한된 개수의 최대 완전 부분 그래프를 가지는 그래프의 경쟁수를 구해볼 것을 제안하였다.

### 4.3. $m$단계 경쟁수

어떤 그래프 $G$의 *m단계 경쟁수*란 $k^{(m)}(G)$로 표시되고 $G$에 $k$개의 고립점을 넣어주어 생기는 그래프가 어떤 유향 회로가 없는 유향그래프의 $m$단계 경쟁그래프가 되도록 하는 $k$의 *최소값*으로 정의된다. Cho, Kim과 Nam [9]은 적어도 2개의 꼭지점을 갖는 완전그래프의 $m$단계 경쟁수가 $m$, 길이가 1이상인 경로, 길이가 4이상인 회로의 2단계 경쟁수가 각각 2와 4임을 보였다. 또한 Cho, Kim과 Nam [8, 10]은 2단계 경쟁수를 2로 갖는 수형도를 특징화하였다. 일반적인 수형도의 2단계 경쟁수 구하는 문제는 아직 해결되지 않았으며 경쟁수와 그것의 다른 변형들과는 달리 해결되기가 상당히 어려워 보인다.

### 4.4. 계통발생수

그래프 $G$가 주어졌을 때 다음과 같이 유향그래프 $T$를 구성하자. 우선 $G$와 같은 꼭지점의 집합을 가지고 변을 갖지 않는 그래프에, $G$의 각 변 $xy$에 대하여, 점 한 개를 첨가하여 $x$와 $y$로부터 그 점으로의 유향변을 넣어준다. 이렇게 하여 생기는 유향그래프 $T$의 계통발생그래프 $P(T)$는 $G$에 새로이 첨가된 꼭지점과 $G$의 꼭지점들 간의 변이 추가된 그래프이다. $T$에는 $G$에 속하지 않는 꼭지점으로부터 $G$의 꼭지점으로의 유향변은 없다는 점에 유의하여, $G$에 대한 *계통발생 유향그래프* $D$를 유향회로를 갖지않으며, $G$가 $P(D)$의 생성 부분 그래프이고, $G$의 꼭지점이 아닌 점들로부터 $G$의 꼭지점으로의 유향변을 갖지 않는 유향그래프로 정의하자. $G$의 *계통발생수*(phylogeny number)란 $G$가 $|V(D)| - |V(G)| = r$을 만족하는 계통발생 유향그래프 $D$를 갖도록 하는 *최소값* $r$로 정의된다. 앞에서 언급된 바와 같이 경쟁수와 달리 $P(D)$에서는 $G$의 꼭지점과 $G$에 있지 않은 $D$의 꼭지점간에 변이 존재할 수 있다. Roberts와 Sheng [66]은 이 개념을 도입하고 그래프의 경쟁수에 대한 기존의 결과들과 유사한 결과들을 도출하였다 ([66], [67] 참조).

| $G$ | $k(G)^a$ | $k_p(G)^a$ | $dk(G)^a$ | $\eta(G)^b\ k^{(p)}(G)^b$ |
|---|---|---|---|---|
| Triangulated Graphs | $\leq 1\ ^*$ | $\leq p^*$ | $\leq 2\ ^*$ | unknown except $\eta(P_2) = 1$; $\eta(P_n) = 0, n \geq 3$; $\eta(G) = \infty$ if $G$ is a nova; $\eta(K_n) = 1, n \geq 2$ |
| $C_n, n \geq 4$ | 2 | $p + 1$ | 2 | 2 for $n = 4, 5, 6$; 1 for $n = 3, 8$; 0 for $n = 7, n \geq 9$ |
| Line Graphs | $\leq 2\ ^\dagger$ | $\leq p + 1\ ^\dagger$ | $\leq 3\ ^\ddagger$ | unknown |
| Bipartite Graphs | $\leq \lvert E(G)\rvert$ $- \lvert V(G)\rvert$ $+2\ ^\S$ | $\leq \lvert E(G)\rvert -$ $\lvert V(G)\rvert + p + 1\ ^\ddagger$; $F(\min\{m, n\}, p)$ $\leq k_p(K_{m,n}) \leq$ $mn - m - n$ $+p + 1^\ddagger$ | unknown except if $G$ is 1 0 1-clear and $d(K_{m,n})$ $= 2$ | unknown except $\eta(K_{m,n}) = \infty$ if $\min\{m, n\} \geq 3$ |

표 2. $k(G)$, $dk(G)$, $\eta(G)$, and $k_p(G)$ of a graph $G$.

## 참고 문헌

[1] F. Alizadeh, R. M. Karp, L. A. Newberg, and D. K. Weisser, *Physical Mapping of Chromosomes: A Combinatorial Problem in Molecular Biology*, Algorithmica, **13** (1995), 52–76.

$$^a\left\{\begin{array}{l}\text{The competition number } k(G)\\ \text{The } p\text{-competition number } k_p(G)\\ \text{The double competition number } dk(G)\end{array}\right\}$$ of a graph $G$ is the smallest $k$ so that $G$ together with $k$ isolated vertices is the $$\left\{\begin{array}{l}\text{competition graph}\\ p\text{-competition graph}\\ \text{competition-common enemy graph}\end{array}\right\}$$ of an acyclic digraph.

[b]If $G$ can be made into a niche graph of an acyclic digraph by adding isolated vertices, then the niche number $\eta(G)$ of $G$ is the smallest number of isolated vertices needed; otherwise $\eta(G) = \infty$.

*with equality iff $G$ has no isolated vertex

†with equality iff the neighborhood of each vertex has vertex clique covering number 2.

‡The bounds may be improved.

§with equality if $G$ is connected

[2] S. Benzer, *On the Topology of the Genetic Fine Structure*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45** (1959), 1607–1620.

[3] ———, *The Fine Structure of the Gene*, Sci. Amer. **206** (1962), 70–84.

[4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, North Holland, New York, 1976.

[5] C. Cable, K. F. Jones, J. R. Lundgren, and S. Seager, *Niche graphs*, Discrete Appl. Math. **23** (1989), 231–241.

[6] H. H. Cho, S-R. Kim, and J. R. Lundgren, *Domination Graphs of Regular Tournaments II*, Congr. Numer. **130** (1998), 95–111.

[7] ———, *Domination Graphs of Regular Tournaments*, submitted.

[8] H. H. Cho, S-R. Kim, and Y. Nam, *A Sufficient Condition for a Tree Belonging to* $\mathcal{T}(2,2,n)$, Congr. Numer. **123** (1997), 43–53.

[9] ———, *The* $m$*-Step Competition Graph of a Digraph*, Discrete Appl. Math. **105** (2000), 115–127.

[10] ———, *On the Connected Triangle-Free Graphs whose 2-Step Competition Numbers Are Two*, submitted.

[11] J. E. Cohen, *Interval Graphs and Food Webs: A Finding and a Problem*, RAND Corporation Document 17696-PR, Santa Monica, CA, 1968.

[12] ———, *Food Webs and the Dimensionality of Trophic Niche Space*, Proc. Nat. Acad. Sci. **74** (1977), 4533–4536.

[13] ———, *Food Webs and Niche Space*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1978.

[14] J. E. Cohen and F. Briand, *Trophic Links of Community Food Webs*, Proc. Nat. Acd. Sci. USA **81** (1984), 4105–4109.

[15] M. B. Cozzens, *Higher and Multi-dimensional Analogues of Interval Graphs*, Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, N. J., 1981.

[16] M. B. Cozzens and F. S. Roberts, *T-Colorings of Graphs and the Channel Assignment Problem*, Congr. Numer. **25** (1982), 191–208.

[17] R. D. Dutton and R. C. Brigham, *A Characterization of Competition Graphs*, Discrete Appl. Math. **6** (1983), 315–317.

[18] P. C. Fishburn and W. V. Gehrlein, *Niche Numbers*, J. Graph Theory **16** (1992), 131–139.

[19] D. C. Fisher, J. R. Lundgren, S. K. Merz, and K. B. Reid, *Domination Graphs of Tournaments and Digraphs*, Congr. Numer. **108** (1995), 97–107.

[20] ———, *The Domination and Competition Graphs of a Tournament*, J. of Graph Theory **29**, (1998), 103–110.

[21] D. R. Fulkerson and O. A. Gross, *Incidence Matrices and Interval Graphs*, Pacific J. Math. **15** (1965), 835–355.

[22] K. F. Fraughnaugh, J. R. Lundgren, J. S. Maybee, S. K. Merz, and N. J. Pullman, *Competition Graphs of Strongly Connected and Hamiltonian Digraphs*, SIAM J. Discrete Math. **8** (1995), 179–185.

[23] W. V. Gehrlein and P. C. Fishburn, *The Smallest Graphs with Niche Number Three*, Comput. Math. Appl. **27** (1994), 53–57.

[24] M. C. Golumbic, *A Note on Perfect Gaussian Elimination*, J. Math. Anal. Appl. **64** (1978), 455–457.

[25] M. C. Golumbic, H. Kaplan, and R. Shamir, *Graph Sandwich Problems*, J. of Algorithm **19** (1995), 449–473.

[26] H. J. Greenberg, J. R. Lundgren, and J. S. Maybee, *Graph-theoretic Foundations of Computer-Assisted Analysis*, in H. J. Greenberg, H. J. and J. S. Maybee (eds.), *Computer-Assist Analysis and Model Simplification*, Academic Press, New York, 1981, pp. 481–495.

[27] ———, *Inverting Graphs of Rectangular Matrices*, Discrete Appl. Math. **8** (1984), 255–265.

[28] G. Hajos, *Uber eine Art von Graphen*, Internat. Math. Nachr. **47** (1957), 65.

[29] W. K. Hale, *Frequency Assignment: Theory and Application*, Proc. IEEE **68** (1980), 1497–1514.

[30] F. Harary and T. McKee, *The Square of a Chordal Graph*, Discrete Math. **128** (1994), 165–172.

[31] J. L. Harrison, *The distribution of Feeding Habits among Animals in a Tropical Rain Forest*, J. Animal Ecology **31** (1962), 53–63.

[32] K. Hefner, K. F. Jones, S-R. Kim, J. R. Lundgren, and F. S. Roberts, $(i, j)$ *Competition Graphs*, Discrete Appl. Math. **32** (1991), 241–262.

[33] G. Isaak, S-R. Kim, T. McKee, F. R. McMorris, and F. S. Roberts, *2-Competition Graph*, SIAM J. on Discrete Math. **5** (1992), 524–538.

[34] H. Kaplan and R. Shamir, *Pathwidth, Bandwidth and Completion Problems to Proper Interval Graphs with Small Cliques*, SIAM J. Computing **25** (1996), 540–561.

[35] S-R. Kim, *Competition Graphs and Scientific Laws for Food Webs and Other Systems*, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ, October 1988.

[36] ———, *The Competition Number and Its Variants*, in J. Gimbel, J. W. Kennedy, and L. V. Quintas (eds.), *Quo Vadis, Graph Theory?*, Annals of Discrete Mathematics **55**, North Holland B. V., Amsterdam, the Netherlands, 1993, pp. 313–326.

[37] ———, *On the Inequality* $dk(G) \leq k(G) + 1$, ARS Combinatoria **51** (1999), 173–182.

[38] S-R. Kim, T. A. McKee, F. R. McMorris, and F. S. Roberts, *p-Competition Numbers*, Discrete Appl. Math. **46** (1993), 87–92.

[39] ———, *p-Competition Graphs*, Linear Algebra & Applications **217** (1995), 167–178.

[40] S-R. Kim and F. S. Roberts, *Competition Numbers of Graphs with a Small number of Triangles*, Discrete Appl. Math. **78** (1997), 153–162.

[41] ———, *The Elimination Algorithm for the Competition Number*, ARS Combinatoria **50** (1998), 97–113.

[42] ———, *Competition Graphs of Semiorders and the Conditions* $C(p)$ *and* $C^*(p)$, ARS Combinatoria, to appear.

[43] J. R. Lundgren, *Food Webs, Competition Graphs, Competition-Common Enemy Graphs, and Niche Graphs*, in F.S. Roberts (ed.), *Applications of Combinatorics and Graph Theory to the Biological and Social Sciences*, IMH Volumes in Mathematics and Its Application, Vol. 17, Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 221-243.

[44] J. R. Lundgren, and J. S. Maybee, *Food Webs with Interval Competition Graphs*, in Graphs and Applications: Proceedings of the First Colorado Symposium on Graph Theory, Wiley, New York, 1984, pp. 231–244.

[45] J. R. Lundgren, J. S. Maybee, S. K. Merz, and C. W. Rasmussen, *A Characterization of Graphs with Interval Two-Step Graphs*, Linear Algebra & Applications **217** (1995), 203–223.

[46] J. R. Lundgren, J. S. Maybee, and C. W. Rasmussen, *An Application of Generalized Competition Graphs to the Channel Assignment Problem*, Congr. Numer. **7** (1990), 217–224.

[47] ———, *Interval Competition Graphs of Symmetric Digraphs*, Discrete Math. **119** (1993), 113–122.

[48] J. R. Lundgren and S. K. Merz, *Elimination Ordering Characterizations of Digraphs with Interval and Chordal Competition Graphs*, Congr. Numer. **103** (1994), 55–64.

[49] J. R. Lundgren, S. K. Merz, and C. W. Rasmussen, *A Characterization of Graphs with Interval Squares*, Congr. Numer. **98** (1993), 132–142.

[50] ———, *Chromatic Numbers of Competition Graphs*, Linear Algebra & Applications **217** (1995), 225–239.

[51] J. R. Lundgren and C. W. Rasmussen, *Two-step Graphs of Trees*, Discrete Math. **119** (1993), 123–140.

[52] R. J. Opsut, *On the Computation of the Competition Number of a Graph*, SIAM J. Alg. Discr. Meth. **3** (1982), 420–428.

[53] R. J. Opsut and F. S. Roberts, *On the Fleet Maintenance, Mobile Radio frequency, Task Assignment and Traffic phasing Problem*, in G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Foster, and D. R. Lick (eds.), *The Theory and Applications of Graphs*, Wiley, New York, 1981, pp. 479–492.

[54] S. Parter, *The Use of Linear Graphs in Gauss Elimination*, SIAM Review **3** (1961), 119–130.

[55] E. B. Phelps, *Characterizing Chordal Graphs with Chordal Two-Step Graphs*, Master's Thesis, Department of mathematics, University of Colorado, Denver, 1992.

[56] J. S. Provan, *Determinacy in Linear systems and Networks*, SIAM J. Alg. Discr. Meth. **4** (1983), 262–278.

[57] J. S. Provan and A. Kydes, *Correlation and Determinacy in Network Models*, BNL Report 51243, Brookhaven National Laboratory, Upton, NY, 1980.

[58] A. Raychaudhuri and F. S. Roberts, *Generalized Competition Graphs and their Applications*, in P. Brucker and R. Pauly (eds.), Methods of Operations Research **49**, Anton Hain, Konigstein, West Germany, 1985, pp. 295–311.

[59] F. S. Roberts, *Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

[60] ———, *Graph Theory and its Applications to Problems of Society*, CBMS-NSF Monograph Number 29, SIAM Publication, Philadelphia, PA, 1978.

[61] ———, *Food Webs, Competition Graphs, and the Boxicity of Ecological Phase Space*, in Y. Alavi and D. Lick (eds.), *Theory and Applications of Graphs*, Springer Verlag, New York, 1978, pp. 477–490.

[62] ———, *Graph Theory and Its Applications to Problems of Society*, SIAM, Pennsylvania, 1978.

[63] ———, *Seven Fundamental Ideas in the Application of Combinatorics and Graph Theory in the Biological and Social Sciences*, in F. S. Roberts (ed.), *Applications of Combinatorics and Graph Theory in the Biological and Social Sciences*, Vol. 17 of IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 1–37.

[64] ———, *Competition Graphs and Phylogeny Graphs*, in L. Lovasz (ed.), *Graph Theory and Combinatorial Biology*, Bolyai Mathematical Studies, Vol. 7, J. Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1999, pp. 333–362.

[65] F. S. Roberts and L. Sheng, *Phylogeny Graphs of Arbitrary Digraphs*, in B. Mirkin, F. R. McMorris, and A. Rzhetsky (eds.), *Mathematical Hierarchies in Biology*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, pp. 479–492.

[66] F. S. Roberts and L. Sheng, *Phylogeny Numbers*, Discrete Appl. Math. **87** (1998), 213–228,.

[67] ———, *Phylogeny Numbers for Graphs with Two Triangles*, Discrete Appl. Math. **103** (2000), 191–207.

[68] F. S. Roberts and J. E. Steif, *A Characterization of Competition Graphs of Arbitrary Digraphs*, Discrete Appl. Math. **6** (1983), 323–326.

[69] D. J Rose, *Triangulated Graphs and the Elimination Process*, J. Math. Anal. & Appl. **32** (1970), 597–609.

[70] D. Scott, *The Competition-Common Enemy Graph of a Digraph*, Discrete Appl. Math. **17** (1987), 269–280.

[71] C. E. Shannon, *The Zero Capacity of a Noisy Channel*, IRE Trans. Inform. Theory **IT-2** (1956), 8–19.

[72] S. Seager, *The Double Competition Number of Some Triangle-Free Graphs*, Discrete Appl. Math. **29** (1990), 265–269.

[73] J. E. Steif, *Frame Dimension, Generalized Competition Graphs, and Forbidden Sublist Characterization*, Henry Rutgers Thesis, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, N. J., 1982.

[74] C. Wang, *Competition Graphs, Threshold Graphs and Threshold Boolean Functions*, Ph. D. thesis, RUTCOR-Rutgers Center for Operations Research, Rutgers University, New Brunswick, NJ, 1991.

[75] ———, *On Critical Graphs for Opsut's Conjecture*, ARS Combinatoria **34** (1992), 183–203.

[76] M. Yannakakis, *The Complexity of the Partial Order Dimension Problem*, SIAM J. Alg. & Discr. Meth. **3** (1982), 351–358.

[77] P. Zhang, E. A. Schon, S. F. Fischer, E. Cayanis, J. Weiss, S. Kistler, and P. E. Bourne, *An Algorithm Based on Graph Theory for the Assembly of Contigs in Physical Mapping of DNA*, CABIOS **10** (1994), 309–317.

김 서 령
경희대학교 이학부 수학전공
서울시 동대문구 회기동 1번지
130-701
*E-mail*: srkim@khu.ac.kr