

면외변형하의 이방성 띠판에 대한 동적계면균열

박재완*·최성렬†

(2000년 7월 11일 접수, 2001년 3월 14일 심사완료)

Dynamic Interfacial Crack in Bonded Anisotropic Strip Under Out-of-Plane Deformation

Jae-Wan Park and Sung-Ryul Choi

Key Words: Interfacial Crack(계면균열), Strip(띠판), Out-of-Plane(면외), Dynamic Stress Intensity Factor(동적 응력확대계수), Dynamic Energy Release Rate(동적 에너지방출률)

Abstract

A semi-infinite interfacial crack propagated with constant velocity in two bonded anisotropic strips under out-of-plane clamped displacements is analyzed. Using Fourier integral transform the problem is formulated and the Wiener-Hopf equation is derived. By solving this equation the asymptotic stress and displacement fields near the crack tip are obtained, where the results get more general expressions applicable not only to isotropic/orthotropic materials but also to the extent of the anisotropic material having one plane of elastic symmetry for the interfacial crack. The dynamic stress intensity factor is obtained as a closed form, which is decreased as the velocity of crack propagation increases. The critical velocity where the stress intensity factor comes to zero is obtained, which agrees with the lower value between the critical values of parallel crack merged in the material 1 and 2 adjacent to the interface. Using the near tip fields of stresses and displacements, the dynamic energy release rate is also obtained as a form of the stress intensity factor.

1. 서론

동적파괴는 재료의 안전에 중요한 영향을 영향을 미치는 파괴의 한 형태로서 해석에 관성력이 고려되어야 하며, 지금까지 많은 연구자의 연구 대상이 왔다.^(1,2) 특히 유한두께의 띠형부재(이하 띠판이라 한다)는 기하학적 형상이 간단하여 재료의 동적파괴현상을 연구하는데 많이 사용되고 있으며, 이러한 띠판에 대한 등속 전파균열의 이론적해석은 재료의 동적파괴현상에 대한 실험적

연구에 용이하게 적용할수 있는 잇점을 지닌다.⁽³⁾ 그뿐만 아니라 띠판의 균열문제는 샌드위치구조, 지반공사, 분사장치, 지진등에서 발생할 수 있는 균열문제가 되는 바 그 해석의 필요성이 요구된다.

Nilsson⁽⁴⁾은 모드 I의 면내하중을 받을 때 등방성재료 띠판에 대한 등속전파균열 문제의 해석해를 구하고, 동적응력확대계수(dynamic stress intensity factor)는 균열전파속도의 함수로서 Rayleigh파 속도에 도달하면 영으로 감소함을 보였다. Kousiounelos 등⁽³⁾은 일축 흑연탄소섬유로 된 직교이방체에 대한 등속전파 띠판균열문제를 적분변환기법을 적용하여 이론해를 구하고, 여기에 실험결과를 대입하여 재료의 파괴에너지를 구하였다. 백운철 등^(5,6) 또한 이방성비가 큰 직교이방체 띠판의 등속전파균열문제를 해석하여, 동

* 회원, 삼익공업(주)

† 책임저자, 회원, 영남대학교 기계공학부

E-mail : srchoi@yu.ac.kr

TEL : (053)810-2443 FAX : (053)813-3703

적응력확대계수와 동적에너지 방출률에 대한 이론해를 구하였다. 최낙삼 등⁽⁷⁾은 이중외팔보 시험편을 이용하여 복합층판의 층간파괴시 동적에너지 방출율을 구하는 실험을 수행하였고, Lee 등⁽⁸⁾은 충격하중에 의한 등방성 이중접합재료에 대한 동적파괴특성을 실험적으로 연구하였다.

면외(Out-of-Plane) 하중을 받는 띠판 내의 등속 균열전파문제도 여러 연구자에 의해 수행되었다. Atkinson⁽⁹⁾은 띠판 상하면에 일정변위경계가 주어질 때 등방성 이중접합재료의 계면에 놓인 반무한 등속 평행균열의 동적응력확대계수를 구하였다. Chiang⁽¹⁰⁾은 두 등방성 이중접합재료의 등속전파 계면균열에 대한 문제를 복소함수법으로 해석하고, 응력장으로부터 원주방향응력을 계산하여 속도가 증가함에 따라 분기균열이 생성될 수 있음을 보였다. Huang⁽¹¹⁾은 등방성 균질띠판에서 균열면의 유한영역에 분포하는 임의하중에 대한 문제를 복소함수법으로 해석하였다. 한편 이광호 등^(12,13)은 등방성체와 직교 이방성체의 계면에 형성된 등속전파균열선단에 대한 응력장을 구하여 균열전파속도에 따른 응력분포를 연구하고 또한 사각판에 대한 동적응력확대계수를 각각 복소응력함수를 사용하여 구하였다. 또한 두 직교 이방성 이중재료 접합띠판에 내재된 등속평행균열 및 계면균열문제와 두 이방성체 접합 띠판에 대한 등속평행균열문제가 각각 본인에 의해서 구해진 바 있다.^(14,15) 그러나, 대칭면이 한 개인 이중재료에 대한 등속계면전파균열문제는 해석되지 않았다. 기타 띠판의 면외하중문제로서 등방성 압전세라믹 재료에 생성된 균열문제가 권중호 등⁽¹⁶⁾에 의해 해석된 바 있다.

본 연구에서는 두 직교이방성 재료의 면외방향 등속 계면균열문제에 대한 본인의 이전 해석문제⁽¹⁴⁾를 연장하여, 보다 일반화된 재료 즉 재료의 대칭면이 한 개 존재하는 두 이방성 접합재료에 대한 등속전파 계면균열문제를 해석하고자 한다. 부연설명하면 접합된 두 이방성 재료의 띠판 상하면이 일정크기의 면외방향 변위성분으로 구속되어 있고, 접합면을 따라 생성되는 등속전파 계면균열 문제가 해석대상이 된다. 이 문제는 기존의 등방성 혹은 직교 이방성재료 및 1축 재료대칭 이방성재료의 정지균열을 포함한 임의의 등속 계면균열문제에 대한 해를 모두 제공하는 문제가 된다. 이와같은 문제 해석을 통하여 일반화된 등

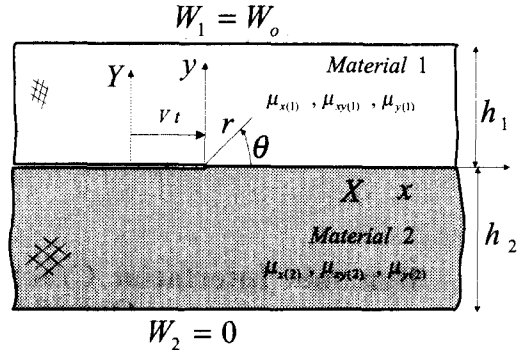


Fig. 1 Semi-infinite interfacial crack in bonded anisotropic strip under out-of-plane clamped condition

속전파 계면균열선단의 응력장과 변위장에 대한 해를 구한다. 또한 동적 응력확대계수에 대한 엄밀해를 구하고 동적 에너지방출률과의 관계식을 얻고자 한다.

2. 수식 전개

본 연구에서 고려하는 문제는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 두 이방성 띠판이 접합되어 있고, 계면을 따라 등속도 v 로 전파하는 반무한 계면균열에 관한 문제이다. 이때 띠판의 상하면에 일정크기 W_0 만큼의 면외방향 상대변위 차이가 있다. Z축을 이방성 재료의 탄성주축으로 두고, 해석의 편의를 위하여 고정좌표계와 이동좌표계를 도입하자. 즉, 시간 $t=0$ 일 때 균열선단을 고정직교좌표 (X, Y, Z) 의 원점으로 두고, 한편 시간 t 에 대한 균열선단을 이동좌표계 (x, y, z) 의 원점으로 둔다. 각재료의 탄성계수로서 x면 및 y면 전단계수와 두면의 연계된 상호전단계수와 밀도를 각각 $\mu_{x(j)}, \mu_{y(j)}, \mu_{xy(j)}, \rho_j (j=1,2)$ 로 하고, 두재료의 두께를 각각 h_1, h_2 로 둔다.

이동좌표계를 사용하여 문제를 표현하면 해석이 보다 용이하게 된다.

x,y,z 방향 변위성분을 각각 U, V, W라 하면, xy평면이 재료의 거울대칭면이 되므로 "재료 j" ($j=1,2$)에 대한 변위성분은

$$U_j = 0, V_j = 0, W_j = W_j(x, y), (j=1,2) \quad (1)$$

이 되고, 영이 아닌 응력성분은 다음과 같은 변위성분으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz(j)} &= \mu_{x(j)} \frac{\partial W_j}{\partial x} + \mu_{xy(j)} \frac{\partial W_j}{\partial y} \\ \sigma_{yz(j)} &= \mu_{xy(j)} \frac{\partial W_j}{\partial x} + \mu_{y(j)} \frac{\partial W_j}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

이 때 변위로 표현된 운동방정식은 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \{ \mu_{x(j)} - \rho_j v^2 \} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + 2\mu_{xy(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x \partial y} \\ + \mu_{y(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

이와같이 계면이 자유면이고 띠판 상하면에 변위가 주어진 경계조건은, 중첩의 원리를 적용함으로써 보다 해석이 용이한 등가경계조건으로 대치가 가능하다. 즉, 계면 균열 상하면에 등분포 응력이 작용하고 띠판 상하면의 변위가 영인 경계치문제인 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} W_1(x, y=h_1) &= W_2(x, y=-h_2) \\ &= 0, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(1)}(x, y=0) &= \sigma_{yz(2)}(x, 0) \\ &= -\tau_0, \quad -\infty < x < 0 \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\sigma_{yz(1)}(x, 0) = \sigma_{yz(2)}(x, 0), \quad 0 < x < \infty \quad (4c)$$

$$W_1(x, 0) = W_2(x, 0), \quad 0 < x < \infty \quad (4d)$$

여기서 τ_0 는 균열 상하면에 작용하는 면외방향 면력으로서 다음과 같이 계산된다.

$$\tau_0 = \frac{\mu_{x(1)} \mu_{x(2)} W_0}{\mu_{x(2)} h_1 + \mu_{x(1)} h_2} \quad (5)$$

이때 변위 $W_j(j=1,2)$ 의 점근거동은 다음과 같이 무한거리에서 유계값 M 보다 작음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} W_j \rightarrow 0, \quad \text{as } x \rightarrow \infty, \\ |W_j| < M, \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (6)$$

식 (1)~(6)은 일상적인 작업으로 얻을 수 있고, 보다 자세한 전개과정은 두 띠판에 내재된 동속 평행균열 문제에 대한 이전의 연구^(14,15)로 갈음한

다.

3. 적분변환

본 문제는 이전의 연구^(14,15)와 동일하게 적분변환을 사용하면 보다 해석이 용이하다.

"재료 $j(j=1,2)$ 의 면외변위 W_j 를 Fourier적분변환할 때, 적분변환된 변위를 \overline{W}_j 라고 하면, \overline{W}_j 은 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{W}_j(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) e^{ixs} dx, \quad (j=1,2) \quad (7a)$$

이때 \overline{W}_j 가 존재하는 복소변수 s 의 범위는 변위에 대한 점근거동식에서 결정되는 바, s 의 허수부 $\text{Im}[s]$ 를 c_0 라고 할 때 식 (6)를 식 (7a)에 적용하여 적분을 평가하면, $-d < c_0 < 0$ ($d > 0$)에서 \overline{W}_j 가 정의됨을 알 수 있다. 이와같이 허수부가 $-d < c_0 < 0$ ($d > 0$)인 임의 적분경로 s 에 대하여 다음과 같은 Fourier 역변환이 존재하게 된다.

$$\begin{aligned} W_j(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{ic_0 - \infty}^{ic_0 + \infty} \overline{W}_j(s, y) e^{-ixs} ds, \\ &\quad (j=1,2) \end{aligned} \quad (7b)$$

식 (7a)와 같은 변환을 적용하여 평형식 (3)을 Fourier 변환하면, \overline{W}_j 에 대한 상미분 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mu_{x(j)} \frac{\partial^2 \overline{W}_j}{\partial y^2} - 2is\mu_{xy(j)} \frac{\partial \overline{W}_j}{\partial y} \\ - \{ \mu_{x(j)} - \rho_j v^2 \} s^2 \overline{W}_j = 0, \quad (j=1,2) \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \overline{W}_j \text{를} \\ \overline{W}_j = e^{a y s} \end{aligned} \quad (8b)$$

로 두고, 식 (8a)에 대입하면,

$$\mu_{x(j)} \alpha^2 - 2i\mu_{xy(j)} \alpha - \{ \mu_{x(j)} - \rho_j v^2 \} = 0 \quad (8c)$$

인 α 에 관한 특성방정식을 얻는다. 따라서 식 (8a)의 일반해는

$$\overline{W}_j(s, y) = A_j(s) e^{\lambda_j y s} + B_j(s) e^{w_j y s} \quad (9)$$

으로 구성된다. λ_j, w_j 는 특성방정식 (8c)의 근으로서 다음과 같다.

$$c_{sj} = \sqrt{\frac{\mu_{x(j)}}{\rho_j}}, s_j = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{sj}^2}}, a_j = \frac{\mu_{xy(j)}}{\mu_{y(j)}},$$

$$\Gamma_j = \sqrt{-\mu_{xy(j)}^2 + \mu_{x(j)}\mu_{y(j)}(1 - \frac{v^2}{c_{sj}^2})}, \quad (10)$$

$$\delta_j = \Gamma_j/\mu_{y(j)}, \lambda_j = (ia_j + \delta_j),$$

$$\omega_j = (ia_j - \delta_j), \quad (j=1,2)$$

여기서 여러상수들은 $\mu_{x(j)}, \mu_{xy(j)}, \mu_{y(j)}, \rho_j$ 와 같은 "재료 j"의 전단계수 및 밀도, 균열전파속도 v 로 구성된 상수들을 말한다. 가령 c_{sj} 는 수평방향으로 진행하는 전단파 속도, s_j 는 속도의 존 상수이고, a_j 는 재료의 상호전단비, Γ_j 및 δ_j 는 각각 균열전파속도가 고려된 재료의 등가전단계수 및 등가전단계수비를 말하며, λ_j, ω_j 는 특성방정식 (8c)의 복소근을 말한다.

또한 식 (9)에서 $A_j, B_j (j=1,2)$ 는 경계조건에서 결정되어야 할 미지상수이다.

식 (9)를 식 (7b)에 대입함으로써 각 영역의 변위 W_j 는 다음과 같은 적분형태로 표현된다.

$$W_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic_0 - \infty}^{ic_0 + \infty} [A_j(s)e^{\lambda_j y s} + B_j(s)e^{\omega_j y s}] e^{-ixs} ds, \quad (j=1,2) \quad (11)$$

같은 방법으로, 각 영역의 응력성분 $\sigma_{xz(j)}, \sigma_{yz(j)} (j=1,2)$ 의 Fourier변환을 각각 $\overline{\sigma_{xz(j)}}, \overline{\sigma_{yz(j)}}$ 라고 두면,

$$\overline{\sigma_{xz(j)}}(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xz(j)} e^{ixs} dx, \quad (12)$$

$$\overline{\sigma_{yz(j)}}(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yz(j)} e^{ixs} dx$$

으로 표현되고, 식 (2) 및 (9)를 사용하여 계산하면 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{\sigma_{xz(j)}}(s, y) = s(\mu_{xy(j)}\lambda_j - i\mu_{x(j)})A_j(s)e^{\lambda_j y s} + s(\mu_{xy(j)}\omega_j - i\mu_{x(j)})B_j(s)e^{\omega_j y s}$$

$$\overline{\sigma_{yz(j)}}(s, y) = \Gamma_j s [A_j(s)e^{\lambda_j y s} - B_j(s)e^{\omega_j y s}], \quad (j=1,2) \quad (13)$$

또한 이를 역변환하면 각영역에 대한 응력성분 $\sigma_{xz(j)}, \sigma_{yz(j)} (j=1,2)$ 은 다음과 같은 적분식으로 주어진다.

$$\sigma_{xz(j)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic_0 - \infty}^{ic_0 + \infty} s [(\mu_{xy(j)}\lambda_j - i\mu_{x(j)})A_j(s)e^{\lambda_j y s} + (\mu_{xy(j)}\omega_j - i\mu_{x(j)})B_j(s)e^{\omega_j y s}] e^{-ixs} ds$$

$$\sigma_{yz(j)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic_0 - \infty}^{ic_0 + \infty} \Gamma_j s [A_j(s)e^{\lambda_j y s} - B_j(s)e^{\omega_j y s}] e^{-ixs} ds, \quad (j=1,2) \quad (14)$$

여기서 적분경로중 c_0 는 식 (7b)에 보인 바와 같다.

미지함수 $A_j, B_j (j=1,2)$ 는 경계조건에서 결정된다. 경계조건 식 (4)를 각각 Fourier 변환하고, 적분변환된 변위 및 응력 식 (9) 및 (13)를 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$A_1(s) = -B_1(s)e^{-2\delta_1 h_1 s}, \quad (15a)$$

$$B_2(s) = -A_2(s)e^{-2\delta_2 h_2 s}, \quad (15b)$$

$$\Gamma_2 [A_2(s) - B_2(s)] = \Gamma_1 [A_1(s) - B_1(s)], \quad (15c)$$

$$A_2(s) + B_2(s) - A_1(s) - B_1(s) = 2N_-(s), \quad (15d)$$

$$\Gamma_1 s [A_1(s) - B_1(s)] = \frac{-\tau_0}{is} + M_+(s). \quad (15e)$$

식 (15)내의 $N_-(s), M_+(s)$ 는 해석의 편의상 각각 다음과 같이 정의된 새로운 미지함수이다.

$$N_-(s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 [W_2(x, 0) - W_1(x, 0)] e^{ixs} dx,$$

$$M_+(s) = \int_0^{\infty} \sigma_{yz(1)}(x, 0) e^{ixs} dx. \quad (16a,b)$$

$N_-(s)$ 는 $\text{Im}[s]<0$ 에서 해석적이고, $M_+(s)$ 는 $\text{Im}[s]>-d_0 (d_0>0)$ 에서 해석적임을 점근거동 식 (6)에서 안다.

식 (15a)-(15d)를 연립하여 $A_j, B_j (j=1,2)$ 을 미지

함수 $N_-(s)$ 로 나타내면 다음과 같이 주어진다.

$$A_1(s) = \frac{N_-(s)}{F(s)} 2\Gamma_2 (1 + e^{-2\delta_2 h_2 s}) e^{-2\delta_1 h_1 s} \quad (17a)$$

$$B_1(s) = \frac{-N_-(s)}{F(s)} 2\Gamma_2 (1 + e^{-2\delta_2 h_2 s}) \quad (17b)$$

$$A_2(s) = \frac{N_-(s)}{F(s)} 2\Gamma_1 [1 + e^{-2\delta_1 h_1 s}] \quad (17c)$$

$$B_2(s) = \frac{-N_-(s)}{F(s)} 2\Gamma_1 [1 + e^{-2\delta_1 h_1 s}] e^{-2\delta_2 h_2 s} \quad (17d)$$

여기서 $C(s)$, $D(s)$, $F(s)$ 는 다음과 같은 값이다.

$$\begin{aligned} C(s) &= \{(\Gamma_1 + \Gamma_2) - (\Gamma_1 - \Gamma_2) e^{-2\delta_2 h_2 s}\} \\ D(s) &= \{(\Gamma_1 - \Gamma_2) - (\Gamma_1 + \Gamma_2) e^{-2\delta_2 h_2 s}\} \\ F(s) &= C(s) + D(s) e^{-2\delta_1 h_1 s} \end{aligned} \quad (17e)$$

식 (17a)~(17d)을 나머지 식 (15e)에 대입함으로써, $N_-(s)$, $M_+(s)$ 에 대한 다음의 Wiener-Hopf 식을 얻는다.

$$\Gamma_1 G(s) N_-(s) = \frac{-\tau_0}{is} + M_+(s) \quad (18)$$

여기서 커널함수 $G(s)$ 는

$$\begin{aligned} G(s) &= [4\Gamma_2 s \cosh(\delta_2 h_2 s) \cosh(\delta_1 h_1 s)] \\ & / [(\Gamma_1 + \Gamma_2) \sinh(\delta_2 h_2 + \delta_1 h_1) s \\ & \quad - (\Gamma_1 - \Gamma_2) \sinh(-\delta_2 h_2 + \delta_1 h_1) s] \end{aligned} \quad (19)$$

로 결정된다. 식 (18)의 해가 주어지면 식 (17)에서 모든 미지함수들이 결정되고, 식 (14)을 평가함으로써 균열선단에 대한 응력의 점근거동을 계산할 수 있다. $x=0$, $y=0$ 인 균열선단에 대한 응력의 점근거동은, 식 (14)의 우변에서 $|s| \rightarrow \infty$ 에 대한 적분평가에 대응되므로, 결국 $|s| \rightarrow \infty$ 에서 미지함수들의 거동을 구하는 문제에 귀결된다.

4. 미지함수 $N_-(s)$ 의 결정

Wiener-Hopf 식의 해법에 대해서는 Noble의 저서⁽¹⁹⁾에 기술되어 있으며, 많은 연구가 이방법에

의하여 해석되었다.^(3~6,14,15,17~19) 특히 식 (18)의 미지함수 $N_-(s)$ 를 구하는 과정은 이전의 연구와 대등하므로 무리없이 해석이 용이하다.

먼저 식 (18)내의 커널함수 $G(s)$ 는, 식 (19)에서 보듯이, 우함수이고 s 의 실수축에서 영(zero)점이 없는바 $-d < \text{Im}(s) < d$, ($d > 0$)에서 해석적인 영역이 존재함을 알 수 있다. 따라서 $G(s)$ 를 s 의 상반평면에서 각각 해석적인 함수, 즉 $\text{Im}(s) > -d$ 의 상반평면에서 해석적인 함수 $G_+(s)$ 와 $\text{Im}(s) < d$ 인 하반평면에서 해석적인 함수 $G_-(s)$ 의 곱으로 나타낼 수 있고, 이를 형식적으로 표현하면 다음과 같다.

$$G(s) = G_-(s) G_+(s) \quad (20)$$

식 (20)을 식 (18)에 적용하고 절차를 밟아가면 다음과 같은 해석적인 함수로 분리된다.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 G_-(s) N_-(s) + \frac{\tau_0}{is G_+(0)} \\ = \frac{M_+(s)}{G_+(s)} - \frac{\tau_0}{is} \left[\frac{1}{G_+(s)} - \frac{1}{G_+(0)} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

[≡C]

식 (21)의 좌변은 $\text{Im}(s) < 0$ 인 s 의 하반평면에서 해석적이고, 한편 우변은 $\text{Im}(s) > -d$ ($d > 0$)인 상반평면에서 해석적이다. 따라서 식 (21)의 좌우변 함수는 $-d < \text{Im}(s) < 0$, ($d > 0$)에서 모두 해석적이므로, 해석적속⁽¹⁸⁾에 의하여 식 (21)의 좌우변은 각각 전체영역에서 해석적인 전함수 C 가 된다. s 의 무한거동으로부터 $C=0$ 임을 알 수 있다. 그러면 식 (21)로부터 $N_-(s)$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$N_-(s) = \frac{-\tau_0}{i\Gamma_1 G_+(0) s G_-(s)} \quad (22)$$

$|s| \rightarrow \infty$ 에 대한 $N_-(s)$ 결정을 위하여 식 (22)내의 $G_+(0)$, $G_-(s)$ 에 관한 세부적인 계산을 수행하고자 한다.

식 (19)로부터 $s \rightarrow 0$ 및 $s \rightarrow \pm\infty$ 에 대한 $G(s)$ 의 점근거동을 각각 계산하면 다음을 얻는다.

$$G(0) = \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1 \delta_2 h_2 + \Gamma_2 \delta_1 h_1} \quad (23a)$$

$$G(s) = \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} |s|, \quad \text{as } s \rightarrow \pm\infty \quad (23b)$$

4장 위에서 설명한 바 있는 커널함수 G(s)에 대해 추가로 근의 특성을 고려해 보자. 만일 ξ_n ($\text{Re}[\xi_n] > 0$) 이 $G(s)=0$ 의 복소근이라면, $-\xi_n$, $\pm \overline{\xi_n}$ 또한 근이 되고, 식 (19)의 G(s)를 식 (20)과 연계하여 무한곱으로 나타내면⁽¹⁹⁾ 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G(s) = G_+(s)G_-(s) \sim K \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\xi_n}\right) \left(1 + \frac{s}{\xi_n}\right) \left(1 + \frac{s}{\xi_n}\right) \left(1 - \frac{s}{\xi_n}\right) \quad (24)$$

식 (24)을 서로 비교하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$G_+(s) = G_-(-s) \quad (25)$$

따라서 식 (20), (23a), (25)을 연립하면 다음이 결정된다.

$$G_+(0) = G_-(0) = \sqrt{\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1\delta_2h_2 + \Gamma_2\delta_1h_1}} \quad (26)$$

같은 방법으로 식 (25)과 (23b)로부터 $|s| \rightarrow \infty$ 일 때 $G_+(s) \sim \sqrt{s}$, $G_-(s) \sim \sqrt{s}$ 인 동일 차수임을 감안하여, 식 (20), (23b), (25)을 연계하면 $|s| \rightarrow \infty$ 인 점근거동은 다음과 같다.

$$G_+(s) = e^{-\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}} s}, \quad (-\pi/2 < \arg s < 3\pi/2) \quad (27a)$$

$$G_-(s) = e^{\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}} s}, \quad (-3\pi/2 < \arg s < \pi/2) \quad \text{as } |s| \rightarrow \infty \quad (27b)$$

이로부터 식 (26), (27b)를 식 (22)에 대입하면 $|s| \rightarrow \infty$ 일 때 $N_-(s)$ 의 점근거동은 다음과 같이 결정된다.

$$N_-(s) = \frac{-\tau_0 e^{-\frac{3\pi}{4} s - \frac{3}{2}}}{\Gamma_1 \sqrt{\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1\delta_2h_2 + \Gamma_2\delta_1h_1}}} \quad (-3\pi/2 < \arg s < \pi/2) \quad (28)$$

5. 결과 및 토의

5.1 응력, 변위의 점근거동과 동적응력확대계수

Fig. 1에서 보듯이 균열선단이란 $x \approx 0, y \approx 0$ 에 해당되며, 식 (11), (14)에서 변위와 응력이 각각 계산된다.

이들 적분식에서 유한크기구간의 적분값은 상수값이 되므로, 균열선단의 변위와 응력의 점근거동은 $|s| \rightarrow \infty$ 의 평가로 압축된다.⁽¹⁾

응력과 변위 적분식 (11), (14)내의 미지함수에 대한 점근거동을 식 (17)에서 평가하면 다음과 같다.

$$A_1(s) = B_2(s) = 0 \quad \text{as } s \rightarrow \infty$$

$$A_2(s) = -B_1(s) = \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} N_-(s) \quad (29a)$$

$$B_2(s) = -A_1(s) = \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} N_-(s) \quad (29b)$$

$$B_1(s) = A_2(s) = 0 \quad \text{as } s \rightarrow -\infty$$

여기서 $N_-(s)$ 는 식 (28)를 말한다.

Fig. 1에서 보듯이 직교좌표계는 극좌표계와

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (29c)$$

의 관계에 있다. 균열에 인접한 재료가 다르므로 각재료에 따라 균열선단의 해석을 별개로 수행해야한다. 가령 $x \approx 0, y = 0^+$ 즉 극좌표계로 $r \rightarrow 0, 0 < \theta < \pi$ 에 해당하는 균열선단은 “재료 1”에 속해 있고, $x \approx 0, y = 0^-$ 즉 $r \rightarrow 0, -\pi < \theta < 0$ 의 균열선단은 “재료 2”에 속해 있다.

식 (29)를 각각 식 (14)에 대입하여 이전의 연구와 같은 방법^(14,15)으로 계산하면 각재료에 대한 균열선단 응력의 점근거동은 다음과 같이 평가된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(r, \theta) &= \frac{K_{3D}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_{xy(1)}\lambda_1 - i\mu_{x(1)}}{\Gamma_1 \sqrt{\cos \theta + i\lambda_1 \sin \theta}} \right] \\ &\quad (0 < \theta < \pi) \\ \sigma_{xz}(r, \theta) &= \frac{K_{3D}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_{xy(2)}\lambda_2 - i\mu_{x(2)}}{\Gamma_2 \sqrt{\cos \theta + i\lambda_2 \sin \theta}} \right] \\ &\quad (-\pi < \theta < 0) \\ \sigma_{yz}(r, \theta) &= \frac{K_{3D}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + i\lambda_1 \sin \theta}} \right] \\ &\quad (0 < \theta < \pi) \\ \sigma_{yz}(r, \theta) &= \frac{K_{3D}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + i\lambda_2 \sin \theta}} \right] \\ &\quad (-\pi < \theta < 0) \end{aligned} \tag{30}$$

또한 식 (11)을 평가하면 균열선단 변위에 대한 점근거동은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} W(r, \theta) &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \frac{K_{3D}}{\Gamma_1} \operatorname{Im} [\sqrt{\cos \theta + i\lambda_1 \sin \theta}] \\ &\quad (0 < \theta < \pi) \\ W(r, \theta) &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \frac{K_{3D}}{\Gamma_2} \operatorname{Im} [\sqrt{\cos \theta + i\lambda_2 \sin \theta}] \\ &\quad (-\pi < \theta < 0) \end{aligned} \tag{31}$$

식 (30),(31)에 있는 K_{3D} 는 동적응력확대계수로써 다음과 같은 폐형으로 얻어진다.

$$K_{3D} = W_0 \sqrt{\frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}} \sqrt{\frac{\mu_{x(1)}\mu_{x(2)}}{\mu_{x(1)}h_2 + \mu_{x(2)}h_1}} \tag{32}$$

5.2 결과식 검토 및 논의

직교이방성재료에 대한 기존의 결과로부터 본 연구의 해석결과의 타당성을 검토해 보기로 하자.

직교이방성 재료는 본 문제의 경우에서 상호전단계수가 $\mu_{xy(j)} = 0$ ($j=1,2$)로 제한된 재료에 해당된다. 등속전파 계면균열선단에 대한 응력 및 변위와 동적응력확대계수 식 (30)~(32)에 각각 $\mu_{xy(j)} = 0$ 을 대입한 결과식은, 이전의 해석결과, 즉 상이한 두 직교이방성 재료의 계면균열

연구결과식⁽¹⁴⁾과 완전히 일치함을 알 수 있다.

나아가 등방성 재료의 경우는, 본연구의 경우 $\mu_{xy(j)} = \mu_{x(j)}$, $\mu_{xy(j)} = 0$ ($j=1,2$)에 해당하고, 이 값을 식 (30)~(32)에 각각 대입하면 그 결과는 등방성재료의 등속계면균열문제에 대한 결과^(1,9,14)와 일치함을 보인다. 또한 균질의 등방성재료 역시 본연구의 결과로부터 일치하는 결과⁽¹⁾를 얻는다.

이를 종합해 볼 때, 본 연구의 결과식 (30)~(32)는, 등방성 및 직교이방성재료는 물론 재료의 대칭면이 1개만 존재하는 이방성재료의 정적 및 등속 계면균열문제에 공히 적용되는, 일반화된 결과식임을 알 수 있다.

실제로 "재료1", "재료2"가 동일한 등방성재료일 때 동적응력확대계수 K_{3D} 는 본연구에서 $\mu_{x(1)} = \mu_{x(1)} = \mu_{x(2)} = \mu_{x(2)}$, $\mu_{xy(1)} = \mu_{xy(2)} = 0$ 에 해당하고, 이를 식(32)에 대입하면

$$K_{3D} = \mu_{x(1)} W_0 \left[\frac{s_1}{h_1 + h_2} \right]^{1/2} \tag{33}$$

이 되고, 이는 기존 연구자의 연구결과^(1,14)와 일치하는 바, 식 (32)는 등방성재료에 대해서도 그 해가 회복되는 식임을 알 수 있다.

또한 두 재료가 동일한 등방성재료이고, $v=0$ 인 정적균열에 대한 정적응력확대계수를 K_{3S} 라고 하면, K_{3S} 는

$$K_{3S} = \mu_{x(1)} W_0 / \sqrt{h_1 + h_2} \tag{34}$$

이 되며,^(1,14) 식 (32)에서도 확인된다.

이제 재료의 물성치와 균열전파속도 v 가 동적응력확대계수(SIF)에 미치는 영향을 살펴보자. 먼저 동적응력확대계수가 영이 되는 임계균열전파속도 V_c 에 대해 알아 본다. 본 연구의 동적응력확대계수 $K_{3D}(v)$ 식 (32)를 보면, 균열전파속도 v 가 증가할수록 감소를 보여, 등가전단계수 $\Gamma_1 = 0$ 혹은 $\Gamma_2 = 0$ 인 v 에서 $K_{3D}(v) = 0$ 이 됨을 알 수 있다.

$\Gamma_j = 0$ ($j=1,2$)인 균열전파속도 v 를 $V_{c(j)}$ 라고 하면, $V_{c(j)}$ 는 식 (10)에서

$$V_{c(j)} = c_{sj} \sqrt{1 - \frac{\mu_{xy(j)}^2}{\mu_{x(j)}\mu_{y(j)}}}, \quad (j=1,2) \tag{35}$$

에 해당한다. 따라서 계면균열에서는 $V_{\alpha(1)}$ 및 $V_{\alpha(2)}$ 중 작은 값에서 이미 동적응력확대계수가 영이 되므로, 이 값이 임계균열전파속도 V_c 가 된다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$V_c = \text{Min}[V_{\alpha(1)}, V_{\alpha(2)}] \quad (36)$$

식 (36)에 대한 의미는 다음과 같이 부여할 수 있다. 우선 $V_{c(j)}$ 를 보자. $V_{c(j)}$ 는, 이전의 등속 평행균열 해석에서 제시한 바와 같이,⁽¹⁵⁾ "재료 j"에 내재된 평행균열이 계면과 나란하게 전파할 때 동적응력확대계수가 영이 되는 임계균열전파속도가 된다. 또한 상호전단계수 $\mu_{xy(j)} \neq 0$ 인 이방성재료의 경우에 $V_{c(j)}$ 는 전단파의 속도 c_{sj} 보다 작은 값이 된다. 이제 등속계면균열에 대한 임계 균열전파속도 식 (36)를 보자. 계면균열은 어느 한 종류의 재료 내부에 속하지 않고 두재료의 사이에 존재하는 균열인 바, 동적응력확대계수가 영이 되는 임계균열전파속도 V_c 는 $V_{\alpha(1)}$ 및 $V_{\alpha(2)}$ 즉, 두 재료의 임계균열전파속도에 동시에 영향을 받음을 알 수 있다. 따라서 이들 두 값중에서 작은 값이 계면균열에 대한 임계균열전파속도가 됨을 예측할 수 있는 데, 식 (36)은 이를 말하고 있다.

폐형으로 얻어진 동적응력확대계수 $K_{3D}(V)$ 식 (32)를 보면, 두 이방성 재료상수 및 두께, 전단파속도 등 여러 인자가 영향변수가 된다. Fig. 2는 이들 인자에 따른 동적응력확대계수의 변화를 균열전파속도에 따라, 몇몇 대표적인 값에 대하여 예시한 그림이다. "재료1"에 대한 전단계수 $\mu_{x(1)}$, 전단파속도 c_{s1} , 판두께 h_1 를 기준값으로 택하고 타인자의 영향을 보자. Fig. 2(a)는 두 재료의 x면 전단비 $\mu_{x(1)}/\mu_{y(1)} = 0.5$, $\mu_{x(2)}/\mu_{y(2)} = 0.5$ 이고, 상호전단비 $\mu_{xy(1)}/\mu_{y(1)} = 0.2$, $\mu_{xy(2)}/\mu_{y(2)} = 0.1$, 전단파 속도비 $c_2/c_{s1} = 1$, 두께비 $h_2/h_1 = 4$ 일 때, "재료2"의 y면 전단비 $\mu_{x(2)}/\mu_{y(1)} = 2, 0.5$ 에 대한 동적응력확대수비 $K_{3D}(v)/K_{3S}$ 를 균열전파 속도비 v/c_{s1} 의 변화

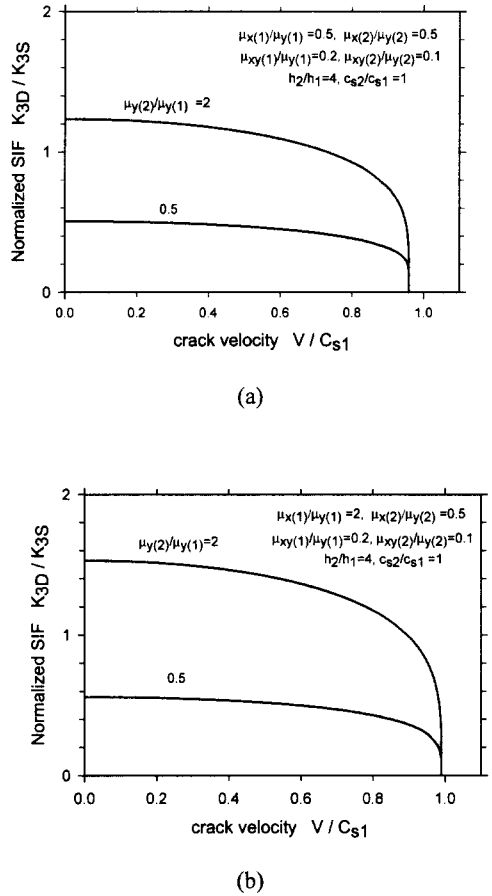


Fig. 2 Normalized stress intensity factor, $K_{3D}(V)/K_{3S}$ as a function of crack velocity for various given values

에 따라 나타낸 것이다.

한편 Fig. 2(b)는 $\mu_{x(1)}/\mu_{y(1)} = 2$ 를 제외하고는 Fig. 2(a)와 동일한 물성치에 대하여, $\mu_{y(2)}/\mu_{y(1)} = 2, 0.5$ 에 대한 $K_{3D}(v)/K_{3S}$ 를 그림으로 나타낸 것이다. 이들의 그림에서 "재료2"의 y면 전단계수가 증가할수록, 또한 "재료1"의 x면 전단계수가 증가할수록 동적응력확대수가 증가함을 알 수 있다. 여기서 피판에 일정변위경계가 주어질 때 동적응력확대수를 줄이기 위한 방법에는, "재료2"의 y면 전단계수를 낮추거나, "재료1"의 x면전단계수를 작게하는 방법이 있을 수

있음을 알게 된다. 또한 $\mu_{x(x)} \neq 0$ 이므로 임계 균열전파속도는 전단파속도보다 작음을 알 수 있다. 유사하게 다른 영향인자에 의한 동적응력확대수 변화 또한 식 (32)에서 얻을 수 있다.

5.3 동적 에너지방출률

동적 에너지 방출률 G_D 를 계산하는 적분식은 다음으로 표현된다.^(9,10,20)

$$G_D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^\delta \sigma_{yz}(\delta - r, 0) \times [W_1(r, 0) - W_2(r, 0)] dr \quad (37)$$

균열선단의 응력과 변위식 (30), (31)을 식 (37)에 대입하여 계산하면 다음의 동속전파 계면균열에 대한 관계식을 얻는다.

$$G_D = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) [K_{3D}(v)]^2 \quad (38)$$

특별한 경우로서, 상이한 두등방성 재료는 상호전단계수 및 각면의 전단계수가 $\mu_{x(j)} = 0$, $\mu_{x(j)} = \mu_{x(j)}$ ($j=1,2$)에 해당하며 이를 식 (38)에 대입하면 Chiang⁽¹⁰⁾이 얻은 결과와 일치함을 보임을 알 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 두 이방성 재료로 접합된 임의 두께의 띠판에, 접합면인 계면을 따라 동속도로 전파하는 동속계면균열문제를 해석하였다.

이때 재료는 대칭면이 한 개인 이방성재료이고, 경계조건은 띠판 상하면에 면외방향 변위성분이 일정하게 주어진 조건이다.

Fourier 적분변환법을 사용하여 이 경계치문제를 수식화하고, 최종적으로 Wiener-Hopf식을 구성하였다. 이식의 해를 구하여 Fourier 역변환 적분식에 대입하고 적분식을 평가함으로써 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) 식 (30), (31)에서 보는 바와같이, 동속계면 균열선단부근의 일반화된 응력장 및 변위장을 구하였다. 이들 식은 등방성 및 직교이방성재료는 물론 한 개의 재료 대칭면이 존재하는 이방성재료에 대한 정적 및 동속문제까지 공히 적용되는

일반화된 결과식임을 알 수 있었다.

(2) 본 문제에 대한 동적응력확대계수는 식 (32)와 같이 폐형의 식으로 구해졌다. 이 식에서 보는 바와같이 동적응력확대계수는 재료의 물성치와 띠판두께, 균열전파속도 등의 함수임을 알 수 있고, 이식을 수치계산하면 물성치와 띠판 두께 등이 계면균열의 균열전파 특성에 미치는 영향을 예측하는데 유용한 식임을 알 수 있었다. 등방성재료 혹은 직교이방성재료에 대해서 식 (32)는 기존 연구자의 결과로 회복되는 식임을 확인하였다.

(3) 특히 동적응력확대계수가 영이되는 임계균열 전파속도, V_c 는 식 (35), (36)과 같은 식으로 얻어졌다. 그 결과 계면에 대한 임계균열전파속도 V_c 는 계면에 인접한 "재료1" 및 "재료2"에 대한 임계균열전파속도 $V_{c(1)}$ 및 $V_{c(2)}$ 에 영향을 받음을 알 수 있고, 이들 두 값 중에서 작은 값이 계면균열에 대한 임계균열전파속도가 됨을 알 수 있었다.

(4) 식 (38)과 같은 동적응력확대계수와 동적에너지방출률에 대한 관계식을 얻었다. 특정한 경우로서 등방성 혹은 직교이방성 재료에 대해 기존연구자의 결과와 일치하는 관계식을 이 식으로부터 확인할 수 있다.

후 기

이 논문은 2001년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Sih, G.C., 1977, *Elastodynamic Crack Problems, Mechanics of Fracture*, Noordhoff International Publishing, Leyden, Vol. 4.
- (2) Freund, L. B., 1990, *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press.
- (3) Kousionelos, P.N., J.H. Williams, 1982, "Dynamic Fracture of Unidirectional Graphite Fiber Composite Strips," *Int. Journ. of Fracture*, Vol. 20, pp. 47~63.
- (4) Nilsson, F., 1972, "Dynamic Stress-Intensity Factors for Finite Strip Problems," *Int. Journ. of*

Fracture, Vol. 8, pp. 403~411.

- (5) 백운철, 황재석, 2000, "이방성비가 큰 직교이방성체의 반무한 균열에 대한 동적응력확대계수에 관한 연구," 대한기계논문집(A), 제24권 제6호, pp. 1557~1564.
- (6) 백운철, 황재석, 2000, "이방성비가 큰 직교이방성체의 반무한 균열에 대한 동적응력확대계수에 관한 연구," 대한기계논문집(A), 제24권 제6호, pp. 1557~1564.
- (7) 최낙삼, A.J. Kinloch, 1999, "복합적층판의 층간파괴에 미치는 충격하중 속도의 효과," 대한기계논문집(A), 제23권 제11호, pp. 1886~1895.
- (8) Lee, O.K., J.C. Park, and G.H. Kim, 2000, "Dynamic Mixed Mode Crack Propagation Behavior of Structural Bonded Joint," *KSME International Journal*, Vol. 14, No. 7, pp. 752~763.
- (9) Atkinson, C., 1977, "Dynamic Crack Problems in Dissimilar Media," in *Mechanics of Fracture*, Vol. 4., *Elastodynamic Crack Problems*, ed. by G.C. Sih, pp. 213~248.
- (10) Chiang, C. R., 1989, "Mode III Interface Crack Propagation," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 32, pp. 545~550.
- (11) Huang, B., 1995, "Fundamental Formulas of Dynamic Stress Intensity Factors of Mode III for a Propagating Crack in a Strip," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 50, pp. 61~64.
- (12) 이광호, 황재석, 최상인, 유재용, 1996, "등방성체와 직교이방성체의 접합계면에 내재된 동적모드 III 균열의 등속전파," 대한기계논문집(A), 제20권 제12호, pp. 3828~3837.
- (13) 이광호, 황재석, 1999, "동적모드 III 하중상태하에서 등방성체와 직교이방성체의 접합계면을 따라 등속으로 전파하는 균열의 응력확대계수 K_{III} ," 대한기계논문집(A), 제23권 제10호, pp. 1788~1796.
- (14) 박재완, 권용수, 정재택, 최성렬, 1997, "상이한 직교이방성 띠판에 대한 면외변형 하의 반무한 등속 평행균열에서의 응력확대계수," 대한기계학회논문집(A), 제21권 제3호, pp. 447 ~ 456.
- (15) 박재완, 김남훈, 최성렬, 2000, "두 이방성 띠판에 내재된 면외변형하의 등속평행균열," 대한기계학회논문집(A), 제24권 제2호, pp. 496 ~ 505.
- (16) 권중호, 권순만, 신정우, 이강용, 2000, "전기절연균열을 갖는 압전 세라믹 스트립의 세기 계수 결정," 대한기계학회논문집(A), 제24권 제6호, pp. 1601~1607.
- (17) Sih, G.C., and Chen, E.P., 1981, *Cracks in Composite Materials, Mechanics of Fracture*, Vol.6, Martinus Nijhoff, Hauge.
- (18) Carrier, G.F., Krook, M. and Pearson, P.E., 1966, *Functions of a Complex Variables*, McGraw-Hill, New York.
- (19) Noble, B., 1958, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, Pergamon Press, London.
- (20) Nishioka, T. and Atluri, N., 1983, "Path-Independent Integrals, Energy Release Rates, and General Solutions of Near-Tip Fields in Mixed-Mode Dynamic Fracture Mechanics," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 18, pp. 1~22.