

정합조건을 만족하지 않는 선형 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어

Sliding Mode Control for Linear System with Mismatched Uncertainties

성재봉, 권성하, 박승규, 정은태
(Jae Bong Seong, Sung-Ha Kwon, Seung Kyu Park, and Eun Tae Jeung)

Abstract : This paper presents a design method of sliding mode control (SMC) for single input linear systems with mismatched uncertainties. We define a virtual state based on the controllable canonical form of the nominal system. And we define a sliding surface for the augmented system with a virtual state. This sliding surface makes it possible to use the SMC technique with various types of controllers. In this paper, we construct a controller that combines SMC with robust controller. We design a robust controller for the system with mismatched uncertainties using a form of linear matrix inequality (LMI). We make a virtual state from this robust control input and the states of the nominal system. And we design a sliding mode controller that stabilizes the overall closed-loop system.

Keywords : sliding mode control, mismatched uncertainties, LMI, virtual state, variable structure control

I. 서론

슬라이딩 모드 제어(Sliding Mode Control : SMC) 이론은 불확실한 시스템에 대한 궤환 제어기를 설계할 때 사용된다. 특히 파라미터 변동이나 모델링 오차에 대해서 안정하고 정상 상태 특성이 좋은 견실한 제어 기법이다. 그러나 SMC는 근본적으로 도달 기간(reaching phase)문제와 입력 떨림(input chattering)현상 등의 단점을 가지고 있고, SMC에 의해 제어되는 시스템의 상태 궤적은 원래 시스템보다 입력의 개수만큼 낮은 차수를 가지는 슬라이딩 평면의 동특성에 의해서 결정되기 때문에 SMC 외의 다른 제어 기법과 함께 결합되어 사용될 수 없다[1]-[3]. 이러한 특성을 개선하고 도달 기간 문제를 해결하기 위하여 가상 상태를 이용한 슬라이딩 모드 제어 기법이 박 등[4]에 의해 제안되었다. 제안된 슬라이딩 평면은 공칭 제어기에 의해 제어되는 공칭 시스템의 동특성을 가질 수 있다는 것이 증명되었고 가상 상태의 초기치를 스위칭 함수의 초기값이 영으로 되도록 결정하여 줌으로써 도달 기간도 제거할 수 있음을 보였다. 대부분의 물리적 시스템의 파라미터 불확실성은 정합조건을 만족하지 않기 때문에 정합조건을 만족하는 불확실성과 만족하지 않는 불확실성을 모두 포함하는 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어기법이 요구된다. 본 논문에서는 정합조건을 만족하지 않는 불확실성을 가지는 시스템에 대한 견실 제어기와 SMC가 결합된 형태의 제어기를 설계한다. 정합조건을 만족하지 않는 불확실성만을 가지는 시스템에 대한 견실 제어기를 선형 행렬 부등식

(Linear Matrix Inequality : LMI)을 이용하여 설계하고, 여기서 구한 제어 입력 이득과 공칭 시스템의 상태 방정식으로부터 가상 상태를 정의한다. 가상 상태를 포함하는 차수가 증가된 시스템에 대한 슬라이딩 평면을 결정하고, 전체 시스템이 안정하도록 하는 슬라이딩 모드 제어기를 설계한다. 마지막으로 간단한 예제를 통해 본 논문의 타당성을 보인다.

II. 문제 설정과 예비 지식

파라미터 불확실성을 가지는 선형 시스템

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + Bu(t) + Df(t) \quad (1)$$

을 고려한다. 여기서 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}$, $f(t) \in \mathbf{R}$ 은 각각 상태, 제어입력과 외란이다. \mathbf{R}^n 은 n 차원 실수 공간을 의미하며 모든 행렬은 적절한 차원을 가진다. 또한 불확실성 $\Delta A(t)$ 는 노음 유계를 가지고 외란 행렬 D 는 정합조건

$$\text{rank}([B : D]) = \text{rank } B \quad (2)$$

을 만족한다. 그리고 행렬 A 와 B 는

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

와 같은 가제어 표준형으로 가정한다. 어떠한 불확실성도 정합조건을 만족하는 부분과 만족하지 않는 부분으로 나눌 수 있으므로

$$\Delta A(t) = BH(t) + B_1H_1(t) \quad (3)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 정합조건을 만족하지 않는 불확실성 $H_1(t)$ 는

$$H_1(t) \in \Omega := \{H_1(t) : H_1^T(t)H_1(t) \leq I\} \quad (4)$$

접수일자 : 2000. 9. 4., 수정완료 : 2001. 12. 19.

성재봉 : 창원대학교 전기전자제어공학과(gyver91@hanmail.net)
권성하, 박승규, 정은태 : 창원대학교 메카트로닉스공학부(shkwon@sarim.changwon.ac.kr/skpark@sarim.changwon.ac.kr/jet26@sarim.changwon.ac.kr)

* 본 논문은 2000년도 창원대학교 연구비에 의하여 연구되었음.

로 크기가 제한되어 있다. 따라서 시스템 (1)은 위의 정합조건과 (3)에 의해

$$\dot{x}(t) = (A + BH(t) + B_1H_1(t))x(t) + Bu(t) + BD_1f(t) \quad (5)$$

와 같이 표현될 수 있다.

보조정리 1 : [3] 슬라이딩 모드가 일어나도록 하는 조건은

$$s(x, t)\dot{s}(x, t) < 0 \quad (6)$$

이고, 위의 조건은 $s(x, t)$ 에 의해서 정의되는 평면상에서 불연속이 일어나는 궤환입력

$$u(\cdot) = \begin{cases} u^+(\cdot), & \text{for } s > 0 \\ u^-(\cdot), & \text{for } s < 0 \end{cases} \quad (7)$$

에 의해서 만족될 수 있다.

보조정리 2 : [5] 모든 $t \in \mathbb{R}$ 에 대해 $F^T(t)F(t) \leq I$ 를 만족하는 임의의 상수 $\epsilon > 0$ 과 적절한 차원을 가지는 행렬 D, E 와 $F(t)$ 가 주어지면, 모든 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 에 대해

$$\begin{aligned} & 2x^T(t)DF(t)Ex(t) \\ & \leq \epsilon^{-1}x^T(t)E^TEx(t) + \epsilon x^T(t)DD^Tx(t) \end{aligned} \quad (8)$$

이다.

보조정리 3 : [6] 임의의 대칭행렬

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{bmatrix}$$

에 대하여, 다음은 서로 등가이다.

- 1) $L < 0$,
- 2) $L_{11} < 0, L_{22} - L_{12}^T L_{11}^{-1} L_{12} < 0$,
- 3) $L_{22} < 0, L_{11} - L_{12} L_{22}^{-1} L_{12}^T < 0$.

III. 주요 결과

이 장에서는 정합조건을 만족하지 않는 불확실성만을 가지는 시스템에 대한 견실 제어를 사용하여 가상상태를 구성하고, 시스템 (1)을 안정하도록 하는 슬라이딩 모드 제어를 설계한다.

시스템 (5)에 대한 정합조건을 만족하지 않는 불확실성만을 가지는 시스템은

$$\dot{x}_r(t) = (A + B_1H_1(t))x_r(t) + Bu_r(t) \quad (9)$$

이다. 그리고 시스템 (9)에 대한 견실 제어를

$$u_r(t) = Kx_r(t) \quad (10)$$

와 같이 두자. 이때 페루프 시스템은

$$\dot{x}_r(t) = (A + B_1H_1(t) + BK)x_r(t) \quad (11)$$

이다. 페루프 시스템 (11)이 점근적으로 안정할 충분조건은 다음 보조정리에 나타난다.

보조정리 4 : 선형 행렬 부등식

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + BR + R^TB^T + \lambda B_1 B_1^T & Q \\ Q & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

을 만족하는 양정의(positive definite) 행렬 Q , 양의 상수 λ 와 행렬 R 이 존재하면, 시스템 (11)은 점근적으로 안정하다. 또한 (10)의 견실 제어 이득은 $K = RQ^{-1}$ 이다.

증명 : Lyapunov 함수를

$$V(x_r(t), t) = x_r^T(t)Sx_r(t) \quad (13)$$

와 같이 두고, 보조 정리 2와 3을 사용하면 쉽게 증명된다. ■

실제 시스템 (5)에 대한 공칭 시스템

$$\dot{x}_s(t) = Ax_s(t) + Bu_s(t) \quad (14)$$

을 고려하자. 여기서 $u_s(t) = K_s x_s(t)$ 는 미분 가능한 공칭 상태 궤환 제어기이다. $x_s(t)$ 의 n 번 째 상태 $x_{sn}(t)$ 의 미분을 공칭 가상 상태 $x_{sv}(t)$ 라고 하면, $x_{sv}(t)$ 는

$$\begin{aligned} \dot{x}_{sv}(t) &= -\alpha_n x_{sv}(t) - \alpha_{n-1} x_{sn}(t) - \dots - \alpha_1 x_{s2}(t) \\ &+ \dot{u}_s(t) \\ &= -\alpha_n x_{sv}(t) - \alpha_{n-1} x_{sn}(t) - \dots - \alpha_1 x_{s2}(t) \\ &+ K_s(A + BK_s)x_s(t) \end{aligned} \quad (15)$$

로 표현 될 수 있다. (15)에서 공칭 상태 $x_s(t)$ 를 비공칭 상태 $x(t)$ 로 대치하고 공칭 상태 궤환 제어 입력 이득 K_s 대신 견실 제어 입력 이득 K 를 대입해서 가상 상태를

$$\begin{aligned} \dot{x}_v(t) &= -\alpha_n x_v(t) - \alpha_{n-1} x_n(t) - \dots - \alpha_1 x_2(t) \\ &+ K(A + BK)x(t) \end{aligned} \quad (16)$$

와 같이 정의한다. 가상 상태를 포함하는 차수가 증가된 시스템을

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BH(t) + B_1H_1(t))x(t) + Bu(t) + BD_1f(t) \\ \dot{x}_v(t) &= -\alpha_n x_v(t) - \alpha_{n-1} x_n(t) - \dots - \alpha_1 x_2(t) \\ &+ K(A + BK)x(t) \end{aligned} \quad (17)$$

와 같이 구성한다. 여기서 $u(t)$ 는 슬라이딩 평면 위에서 슬라이딩 모드를 보장하는 SMC 입력이다. 위의 차수가 증가된 시스템에 대한 슬라이딩 평면은

$$s(x, t) = x_v(t) + \alpha_n x_n(t) + \dots + \alpha_1 x_1(t) - u_r(x, t) = 0 \quad (18)$$

로 결정한다. 여기서 $u_r(x, t)$ 는 (10)에서 $x_r(t)$ 를 $x(t)$ 로 대치한 값이다. 가상 상태의 초기치를

$$x_v(t_0) = -\alpha_n x_n(t_0) - \dots - \alpha_1 x_1(t_0) + u_r(x, t_0) \quad (19)$$

와 같이 선택하면 $s(x, t)$ 의 초기치가 '0'이 되므로 도달 기간이 제거된다. 보조정리 1에서 시스템 (17)의 상태들을 슬라이딩 평면으로 가도록 하기 위해서 보조정리 1을 만족하는 SMC 입력을 구해야 한다. 슬라이딩 평면의 미분 $\dot{s}(x, t)$ 는

$$\begin{aligned} \dot{s}(x, t) &= \dot{x}_v(t) + C_1 \dot{x}(t) - \dot{u}_r(x, t) \\ &= -\alpha_n x_v(t) - C_0 x(t) + K(A + BK)x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (C_1 - K)\dot{x}(t) \\
 &= -\alpha_n x_v(t) - C_0 x(t) + K(A + BK)x(t) \\
 &+ (C_1 - K)[Ax(t) + BH(t)x(t) + B_1 H_1(t)x(t) \\
 &\quad + Bu(t) + BD_1 f(t)] \quad (20)
 \end{aligned}$$

와 같이 계산된다. 여기서

$$C_0 = [0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_{n-1}], \quad C_1 = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]$$

이다. SMC 입력 $u(t) = u_{eq}(t) + u_N(t)$ 라고 두자. 여기서 $u_{eq}(t)$ 는 불확실성을 고려하지 않은 공칭 시스템에 대한 등가 제어 입력(equivalent control input)이고, $u_N(t)$ 는 시스템의 불확실성을 극복하기 위한 스위칭 제어기이다. (20)에서 불확실성을 포함하지 않는 슬라이딩 평면의 미분은

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_{eq}(x, t) &= -\alpha_n x_v(t) - C_0 x(t) + K(A + BK)x(t) \\
 &\quad + (C_1 - K)[Ax(t) + Bu(t)] \quad (21)
 \end{aligned}$$

이고, (21)를 '0'으로 만드는 SMC 입력을 $u_{eq}(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned}
 u_{eq}(t) &= -[(C_1 - K)B]^{-1}[-\alpha_n x_v(t) \\
 &\quad + \{-C_0 + K(A + BK) + (C_1 - K)A\}x(t)] \quad (22)
 \end{aligned}$$

이다. (20)에 $u(t) = u_{eq}(t) + u_N(t)$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}
 \dot{s}(x, t) &= (C_1 - K)[BH(t)x(t) + B_1 H_1(t)x(t) \\
 &\quad + Bu_N(t) + BD_1 f(t)] \quad (23)
 \end{aligned}$$

이고, 불확실성 $H(t)$, $H_1(t)$ 와 외란 $f(t)$ 의 크기가 모두 제한되어 있기 때문에

$$\begin{aligned}
 (C_1 - K)BH(t)x(t) &< \gamma_1 \|x(t)\| \\
 (C_1 - K)B_1 H_1(t)x(t) &< \gamma_2 \|x(t)\| \\
 (C_1 - K)BD_1 f(t) &< \gamma_3 \quad (24)
 \end{aligned}$$

를 만족하는 양의 상수 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 가 존재한다. $u_N(t)$ 를

$$\begin{aligned}
 u_N(t) &= -[(C_1 - K)B]^{-1}[(\gamma_1 + \gamma_2) \|x(t)\| \\
 &\quad + \gamma_3] \operatorname{sgn}(s) \quad (25)
 \end{aligned}$$

와 같이 구성하면 $s(x, t)\dot{s}(x, t) < 0$ 를 만족한다. 따라서, SMC 입력 $u(t)$ 는

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -[(C_1 - K)B]^{-1}[-\alpha_n x_v(t) + \{-C_0 + K(A + BK) \\
 &\quad + (C_1 - K)A\}x(t) \\
 &\quad - [(C_1 - K)B]^{-1}[(\gamma_1 + \gamma_2) \|x(t)\| \\
 &\quad + \gamma_3] \operatorname{sgn}(s)] \quad (26)
 \end{aligned}$$

이다.

IV. 예제

아래와 같은 불확실성을 포함하는 2차 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} H(t)x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} H_1(t)x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

여기서 $\|H(t)\| < 2$, $H_1^T(t)H_1(t) < I$, $|f(t)| < 1$ 이고, 상태의 초기치는 각각 $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$ 이다. 정합조건을 만족하지 않는 불확실성만을 가지는 시스템에 대해서 보조 정리 4를 만족하는 Q, R, λ 는

$$\begin{aligned}
 Q &= \begin{bmatrix} 0.3482 & -0.2564 \\ -0.2564 & 0.3482 \end{bmatrix} \\
 R &= \begin{bmatrix} -0.4208 & -1.0810 \end{bmatrix} \\
 \lambda &= 0.9485
 \end{aligned}$$

이고, 이로부터 견실 제어 입력 이득은

$$K = RQ^{-1} = [-7.6285 \quad -8.7204]$$

로 계산된다. SMC 제어기 구성에 필요한 계산들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 C_0 &= [0 \ \alpha_1] = [0 \ -1] \\
 C_1 &= [\alpha_1 \ \alpha_2] = [-1 \ -2] \\
 (C_1 - K)B &= 6.7204 \\
 (C_1 - K)B_1 &= 6.6744 \\
 -C_0 + K(A + BK) + (C_1 - K)A &= [64.5231 \ 72.0446] \\
 (C_1 - K)BH(t)x(t) &< 13.4408 \|x(t)\| \ (\gamma_1 = 13.4408) \\
 (C_1 - K)B_1 H_1(t)x(t) &< 6.6744 \|x(t)\| \ (\gamma_2 = 6.6744) \\
 (C_1 - K)BD_1 f(t) &< 6.7204 = \gamma_3
 \end{aligned}$$

가상 상태 x_v 의 동특성은 (16)으로부터

$\dot{x}_v(t) = 2x_v(t) + 57.8027x_1(t) + 51.9754x_2(t)$ 와 같이 정의하고, 가상 상태의 초기치를 $x_v(0) = -6.6285x_1(0) - 6.7204x_2(0) = -6.5366$ 로 결정한다. (18)로부터 슬라이딩 평면은 $s(x, t) = x_v(t) + 6.6285x_1(t) + 6.7204x_2(t)$ 와 같이 구성되고, $s(x, t)\dot{s}(x, t) < 0$ 를 만족하는 SMC 입력은 (26)으로부터

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -\frac{1}{6.7204} \{2x_v(t) + 64.5231x_1(t) + 72.0446x_2(t) \\
 &\quad - \frac{1}{6.7204} (20.1152 \|x(t)\| + 6.7204) \operatorname{sgn}(s)\} \text{이다. 그림 1-}
 \end{aligned}$$

6은 위의 수치 예에 대한 시뮬레이션 결과이다. 시뮬레이션 상에서

$$\begin{aligned}
 H(t) &= [1.4 \cos t \ \sin t] \\
 H_1(t) &= [0.3 \sin t \ 0.7 \cos t] \\
 f(t) &= 0.9 \sin t
 \end{aligned}$$

로 두었다. 그림 1은 슬라이딩 모드 제어기를 사용한 경우의 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 의 상궤적(phase trajectory)을 나타낸 것이다. 그림 2는 정합조건을 만족하지 않는 불확실성만을 가지는 시스템에 대해서 견실 제어기를 사용한 경우의 상태 궤적이고 그림 3은 전체 시스템에 대해서 SMC를 사용한 경우의 상태 궤적이 그림 2의 궤적과 유사함을 보여준다. 그림 4는 가상 상태의 궤적을, 그림 5는 SMC 제어 입력을 나타내고 있으며 그림 6은 슬라이딩

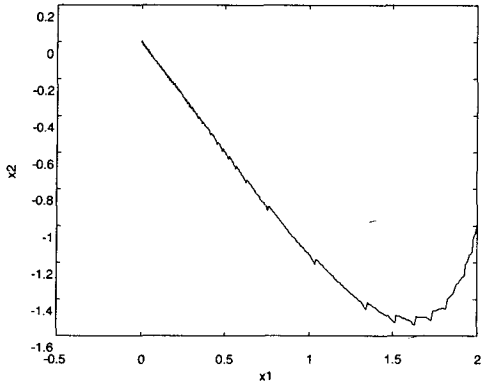


그림 1. SMC를 사용한 경우의 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 평면에서의 상궤적.

Fig. 1. Phase trajectory of sliding mode design using SMC.

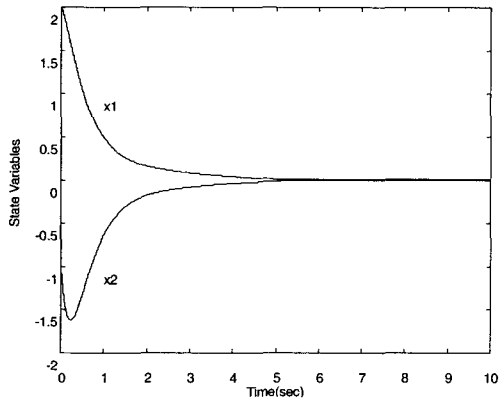


그림 2. 정합조건을 만족하지 않는 불확실성만을 가지는 시스템에 견실 제어를 사용한 경우의 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 의 궤적.

Fig. 2. The state trajectories of $x_1(t)$ and $x_2(t)$ controlled by a robust controller with anti-matched uncertainties.

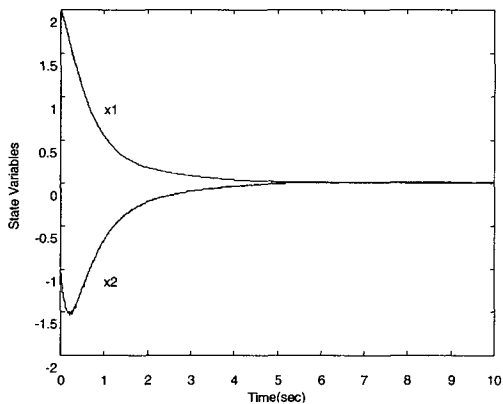


그림 3. 전체 시스템에 SMC를 사용한 경우의 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 의 궤적.

Fig. 3. The state trajectories of $x_1(t)$ and $x_2(t)$ controlled by SMC with uncertainties.

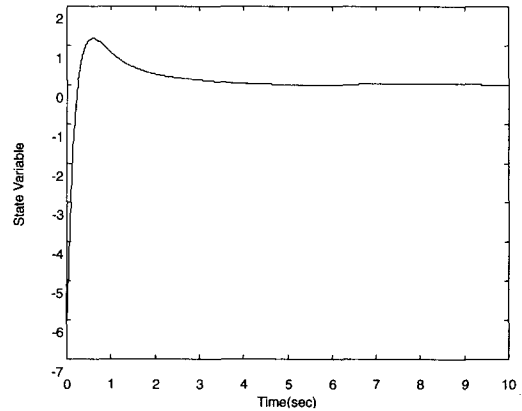


그림 4. 가상상태 $x_v(t)$ 의 궤적.

Fig. 4. The trajectory of the virtual state $x_v(t)$.

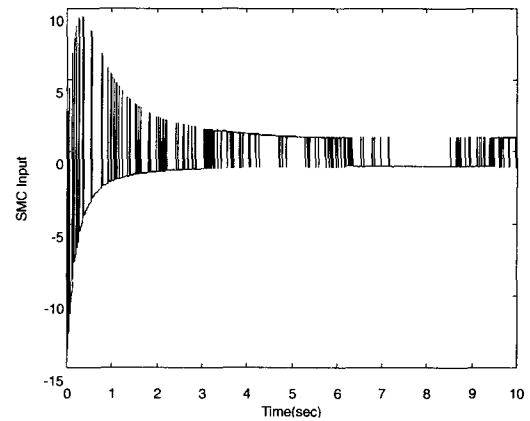


그림 5. SMC 입력 $u(t)$.

Fig. 5. The SMC input $u(t)$.

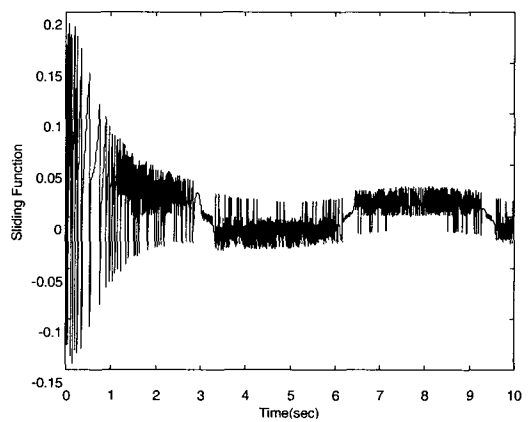


그림 6. 슬라이딩 함수 $s(x,t)$ 의 값.

Fig. 6. The value of the sliding function $s(x,t)$.

함수 값을 보여주고 있다.

V. 결론

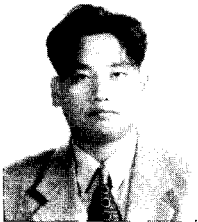
본 논문에서는 정합조건을 만족하지 않는 파라미터 불확실성을 가지는 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어기의 설계 방법이 제시되었다. 정합조건을 만족하지 않는 불

확실성만을 가지는 시스템이 안정할 충분조건으로부터 구한 건설 제어 입력 이득과 공칭 시스템의 상태 방정식으로부터 가상 상태를 정의하였고, 가상 상태가 더해진 차수가 증가된 시스템에 대한 슬라이딩 평면을 구성하였다. 가상 상태의 초기치를 슬라이딩 함수의 초기값이 영으로 되도록 결정하여 줌으로써 도달 시간을 제거하였고, 가상 상태와 슬라이딩 평면을 바탕으로 전체 시스템을 안정하도록 하는 슬라이딩 모드 제어를 설계하였다.

참고문헌

[1] V. I. Utkin, *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR Publishers, Moscow, 1974.
 [2] U. Itkis, *Control systems of variable structure*, Wiley, New York, 1976.
 [3] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control : A survey," *IEEE Trans.*

Industrial Electronics, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993.
 [4] S. K. Park and H. K. Ahn, "Robust controller design with novel sliding surface," *IEEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 146, no. 3, pp. 242-246, 1999.
 [5] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 8, pp. 351-357, 1987.
 [6] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 15, Philadelphia, PA., 1994.
 [7] P. Gahinet, A. Nemirovski, and A. J. Laub, *LMI Control Toolbox User's Guide*, The MathWorks, Inc., Natick, MA., 1995.



성재봉

1999년 창원대학교 제어계측공학과 졸업. 1999년~현재 창원대학교 전기전자제어공학과 석사과정. 관심분야는 가변구조제어 및 건설제어 등.

권성하

제어·자동화·시스템공학 논문지 제4권, 제2호, 참조.

박승규

제어·자동화·시스템공학 논문지 제5권, 제5호, 참조.

정은태

제어·자동화·시스템공학 논문지 제3권, 제2호, 참조.