

실시간 다물체 차량 동역학 모델 개발 및 구현

오영석* · 김성수†

(2000년 9월 18일 접수, 2001년 3월 13일 심사완료)

Development and Implementation of Real Time Multibody Vehicle Dynamics Model

Young-Seok Oh and Sung-Soo Kim

Key Words: Realtime Simulation(실시간 해석), Multibody Dynamics(다물체 동역학), Vehicle Dynamics(차량 동역학)

Abstract

A real time multibody vehicle dynamics model has been developed and implemented using a subsystem synthesis method based on recursive formulation. To verify real time simulation capability, the developed model has been applied to HMMWV(High Mobility Multipurpose Wheeled Vehicle) with steering system. For the kinematically driven steering system, the coupled front suspension-steering subsystem can be decoupled into two SLA suspension subsystems, which improves the efficiency of simulation. To investigate theoretical efficiency, operational counting method has been also employed to compare the proposed model with the conventional recursive dynamics model. Various simulations such as unsymmetric bump run, step steering(J-turn) and sine steering input test have been carried out to verify the real time feasibility of the proposed model.

1. 서 론

차량 동역학 시뮬레이터를 위한 차량 모델은 HILS(Hardware In the Loop Simulation)나 MILS(Man In the Loop Simulation)와 같은 해석 목적에 따라 실시간 해석이 가능해야 하며 차량의 동특성을 최대한 반영할 수 있어야 한다.^(1,2)

실시간 차량 모델은 크게 현가 장치, 조향 장치와 같은 부분 시스템을 모델링하여 해석하는 다물체 모델과 차량 기구학적 특성값을 이용하여 해석하는 일반적인 lumped parameter 모델로 나눌 수 있다.⁽²⁾

다물체 동역학 모델의 경우 현가 요소의 정확한 데이터가 존재할 때 사용이 가능하며 lumped

parameter 모델에 비하여 상대적으로 큰 크기의 운동방정식을 풀어야 하기 때문에 계산상 효율이 떨어지는 단점이 있으나 컴퓨터의 연산처리능력이 날로 좋아지기 때문에 계산시간에 대한 단점이 보완되어지고 있다. 반면에, lumped parameter 모델의 경우 차량 모델에 필요한 기구학적 특성데이터를 구하기 어렵다는 단점이 있으며 정적환경의 실험 데이터를 바탕으로 다양한 주행 환경에 대한 차량의 반응을 해석할 수 없기 때문에 다물체 차량 모델에 비하여 정교함이 상대적으로 떨어진다.⁽¹⁾

보다 정교하고 빠른 다물체 차량 동역학 모델을 얻기 위한 다양한 방법들이 제시되었다.^(1~3) 그 중에서 미국의 IDS(Iowa Driving Simulator)에 적용된 실시간 다물체 차량 동역학 모델은 순환다물체 공식⁽³⁾을 사용하고 있다. 그러나 이 모델은 수치해석에 있어서 차량 현가 부분 시스템의 독립적인 특성을 고려하지 못하여 상대적으로 큰 크기의 운동방정식을 푼다. 이러한 단점을 보완

* 충남대학교 대학원 메카트로닉스공학과

† 책임저자, 회원, 충남대학교 메카트로닉스공학과

E-mail : sookim@cnu.ac.kr

TEL : (042)821-6872 FAX : (042)823-4919

하기 위하여, 차량의 조향 장치 및 현가 장치와 같은 부분 시스템을 특성에 따라 나누어 작은 크기의 운동 방정식으로 푸는 효율적인 부분 시스템 합성법이 제기 되었다.⁽⁴⁾ 이 방법의 특징은 부분 시스템의 수정이나 교체가 차량 모델 전체에 영향을 미치지 않고 수정이 필요한 부분 시스템에 국한되며, 또한, 프로그램 측면에서도 다양한 종류의 현가 장치를 서브 루틴 프로그램으로 모듈화 하여 사용할 수 있다는 장점이 있다. 하지만, 이 방법은 기존의 순환 다물체 차량 동역학 모델과 그 효율성은 비교되었지만,⁽⁴⁾ 조향 장치를 포함한 보다 복잡한 모델과 실시간 해석의 가능성에 관하여는 아직 검증된 바 없다.

따라서, 본 논문에서는 부분 시스템 합성법을 4개의 SLA(Short Long Arm)형 독립 현가 장치와 조향 장치를 장착한 미군 군용지프 HMMWV(High Mobility Multipurpose Wheeled Vehicle)⁽⁵⁾에 적용하여, 다물체 차량 모델을 개발하고, 비대칭 범프 통과, 스텝 조향 입력(J-turn)과 정현파 조향 입력 시험 시뮬레이션을 수행하여 개발된 모델의 실시간 해석 가능성을 검증하였다.

2. 다물체 차량 동역학 모델

2.1 HMMWV 모델

HMMWV는 4개의 SLA(Short Long Arm)형 현가 장치가 장착되어 있는 차량이다. SLA 현가 장치는 전륜은 휠의 상하 방향 움직임과 조향 장치에

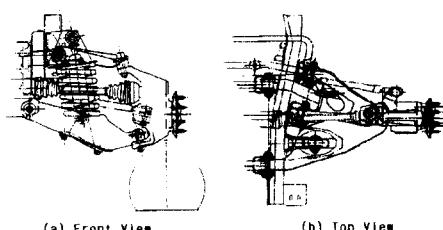


Fig. 1 Front Suspension CAD drawing

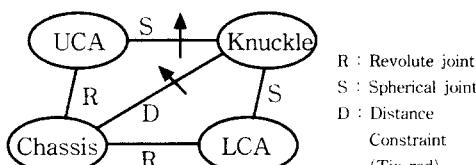


Fig. 2 SLA suspension topology

의한 회전 움직임으로 2개의 자유도를 가지고 있으며 후륜은 휠의 상하 방향 움직임에 대한 1개의 자유도를 가진다. Fig. 1과 2는 HMMWV의 SLA 형 현가 장치의 다물체 모델이다.⁽⁵⁾

타이어 모델은 타이어의 특성을 수학적으로 모델링한 해석적 모델, 실제 타이어의 실험 결과를 표현할 수 있는 곡선의 방정식을 구하여 사용하는 수치적 모델과 2가지 방법을 보완하여 사용하는 모델이 있다. 본 논문에서는 해석 모델과 수치 모델을 보완한 STI 타이어 모델⁽⁶⁾을 사용하였다. 타이어에서 발생하는 힘은 타이어의 수직력(normal force), 전후 방향 미끄럼률(slip ratio)과 옆 미끄럼각(side slip angle)과 캠버각(Camber angle)의 함수로 표현되어지는 전후방향 힘(longitudinal force), 횡력(lateral force)과 얼라이닝 토크(aligning torque)로 나누어진다. Fig. 3은 전후방향 미끄럼과 옆 미끄럼각에 대한 타이어의 힘과 모멘트값이다. 일반적인 타이어의 특성⁽⁶⁾과 일치함을 볼 수 있다.

조향 장치는 좌우측 타이어가 띡(rack)의 기구학적 조건에 의하여 운동할 수 있도록 전륜의 좌

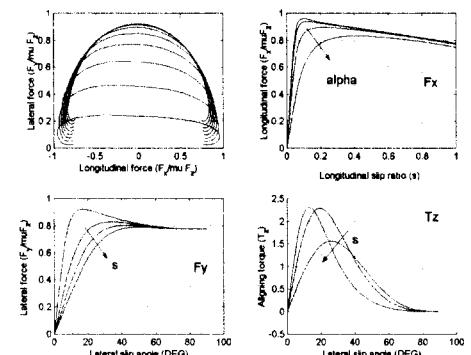


Fig. 3 Tire force and moments for slip angle and slip ratio

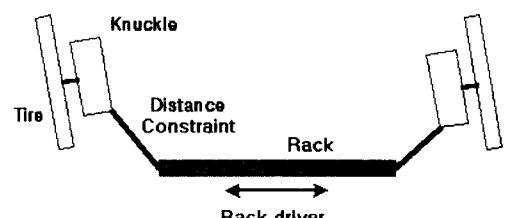


Fig. 4 Steering system modeling

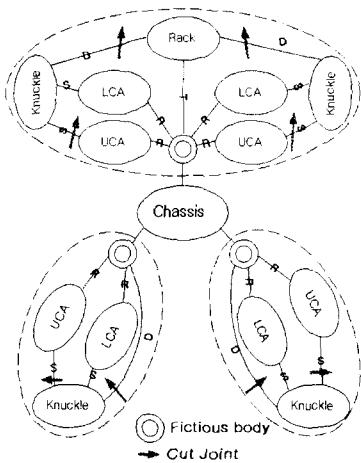


Fig. 5 HMMWV topology
(3-subsystem model)

우측 타이로드(tie rod)를 질량이 없는 거리구속조건식(distance constraint)으로 모델링 하였으며 컴플라이언스에 의한 조향각과 조향축에 전달되어지는 조인트 반력을 고려하지 않았다. 또, 조향핸들의 회전 운동을 고려하지 않고 랙(rack)에 기구학적 구동조건을 사용하여 Fig. 4와 같이 모델링 하였다.

앞에서 기술한 현가, 조향, 타이어 모델을 사용하여 HMMWV 전차량 시스템을 구성하였다. Fig. 5는 부분시스템으로 나누어진, 전차량 모델의 그래프 이론에 따른 시스템 위상(topology)을 나타내고 있다. 여기서, HMMWV 시스템은 independent decoupled loop의 정의⁽³⁾에 따라 3개의 부분 시스템으로 나뉘어 있음을 볼 수 있다. 그러나, 랙(rack)을 기구학적으로 구동할 경우 랙(rack)의 기구학적 특성을 전륜의 양쪽 현가 모듈의 위치, 속도와 가속도 구속방정식에 고려하고, 랙의 운동 효과를 차체의 관성 효과에 추가할 수 있으므로, 1개의 부분 시스템으로 이루어진 전륜의 현가-조향 부분 시스템을 Fig. 6과 같이 2개의 현가 장치 부분 시스템으로 나눌 수 있다. 더구나 부분 시스템 합성법은 부분 시스템의 개수가 늘어남에 따라 효율성이 증가하므로 기구학적으로 구동되는 조향 장치 모델의 경우 더욱 더 계산상의 이득이 얻어진다.⁽⁴⁾

2.2 차량 운동 방정식

위에서 기술한 바와 같이 기구학적 구동조건을

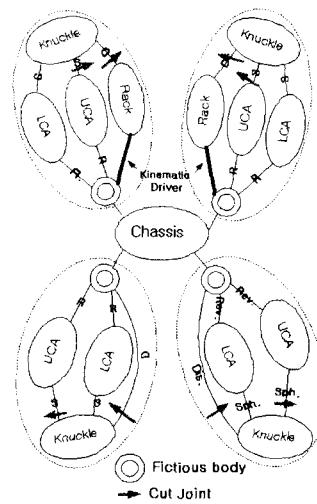


Fig. 6 HMMWV topology
(4-subsystem model)

고려한 랙(rack)을 사용할 경우, Fig. 6과 같이 HMMWV는 4개의 현가 부분 시스템으로 구성될 수 있다. 이 경우 HMMWV는 차체(chassis)에서 X, Y, Z에 대한 병진운동(3개), roll, pitch, yaw의 회전운동(3개), 4개의 독립적인 SLA 현가 시스템의 운동(4개), 타이어 회전 운동(4개)으로 총 14개의 자유도를 가진다. 조향을 위한 랙 운동은 기구학적 구동식에 의해 기술되므로 자유도에 계산되지 않는다.

HMMWV에 기준의 순환 다물체 공식⁽³⁾을 적용하면, 식 (1)과 같이 크기가 42x42인 상대적으로 큰 크기의 운동방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{00} & \bar{\mathbf{M}}_{01} & \bar{\mathbf{M}}_{02} & \bar{\mathbf{M}}_{03} & \bar{\mathbf{M}}_{04} \\ \bar{\mathbf{M}}_{10} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{M}}_{20} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ symm & \bar{\mathbf{M}}_{30} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{M}}_{40} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}_0 \\ \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \\ \ddot{\mathbf{q}}_3 \\ \ddot{\mathbf{q}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_0 \\ \bar{\mathbf{P}}_1 \\ \bar{\mathbf{P}}_2 \\ \bar{\mathbf{P}}_3 \\ \bar{\mathbf{P}}_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서, $\bar{\mathbf{M}}_{00} = \mathbf{M}_{0(6 \times 6)} + \sum_{i=1}^4 (\mathbf{M}_{yy})_{i(6 \times 6)}$ 는 차체의 관성 행렬과 현가 부분 시스템이 차체에 미치는 관성 행렬을 합한 행렬, $\bar{\mathbf{M}}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{qq(5 \times 5)} & \Phi_{q(5 \times 4)}^T \\ \Phi_{q(4 \times 5)} & \mathbf{0}_{(4 \times 4)} \end{bmatrix}_{9 \times 9}$ 는 독립적인 부분 시스템의 관성 행렬과 구속 조건식

의 확장 행렬, $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{(5 \times 1)} \\ \lambda_{(4 \times 1)} \end{bmatrix}$ 는 부분 시스템의 일반좌표에 대한 가속도 벡터와 절단 조인트의 구속력을 나타내는 라그랑지 승수 벡터, $\bar{\mathbf{P}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{q(5 \times 1)} \\ \gamma_{(4 \times 1)} \end{bmatrix}$ 는 부분 시스템의 힘 행렬과 가속도 구속방정식에 의해 생기는 행렬이고, $\bar{\mathbf{M}}_0 = [\mathbf{M}_{qq}(6 \times 6) \quad \mathbf{0}_{(6 \times 4)}]$ 은 차체와 각 부분 시스템이 연성효과를 나타낸 관성 행렬이다.

Fig. 6의 위상도와 같이 부분 시스템을 적용하여 차량을 해석하는 경우 먼저 각각의 독립적인 부분 시스템이 차체에 미치는 효과를 효과 관성 행렬과 효과 힘 행렬을 통하여 구하고 그 효과를 차체의 운동방정식에 합성하여 차체의 운동방정식을 식 (2)와 같이 구한다.

$$(\bar{\mathbf{M}}_0 + \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{M}}_i) \dot{\bar{\mathbf{Y}}}_0 = (\hat{\mathbf{Q}}_0 - \mathbf{M}_{qq}^{rack} \ddot{q}_{rack} + \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{P}}_i) \quad (2)$$

여기서, k 는 부분 시스템의 개수를 나타내며 $\bar{\mathbf{M}}_i$, $\bar{\mathbf{P}}_i (i=1 \sim 4)$ 는 각 부분 시스템이 차체에 미치는 관성 효과를 나타내는 효과 관성 행렬과 효과 힘 행렬을 나타내고 있다. 식 (2)를 이용하여 차체의 운동 $\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_0(t)$ 를 독립적으로 구할 수 있다.

차체 가속도의 상태 벡터인 $\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_0(t)$ 를 구하면 순환공식에 의하여 아래와 같은 독립적인 부분 시스템에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{qq} & \Phi_q' \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{q}}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_q \\ \gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{qq}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{Y}}}_0(t) - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_q^{rack} \ddot{q}_{rack} \end{bmatrix} \quad (3)$$

식 (2)와 (3)에서 \ddot{q}_{rack} 에 관계되는 항은 HMMWV의 전륜에서 기구학적 조향 장치를 고려하는 경우에 해당하는 항들이다.

HMMWV 차량에서 부분 시스템 합성법을 적용할 경우 차체 운동방정식(6x6) 1번, SLA 현가 운동방정식(9x9) 4번을 풀게 되므로 기존의 순환 다물체 공식에 비하여 상대적으로 작은 크기의 운동방정식을 풀게 된다. 또한, 현가 장치의 관성, 힘 효과를 차체에 합성하고 부분 시스템을 독립적으로 해석하는 과정에서 현가의 기구학적 특성

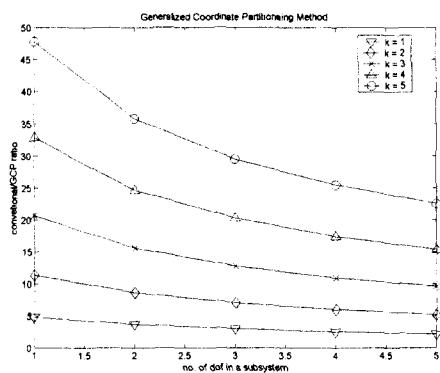


Fig. 7 Efficiency of synthesis method for closed loop subsystems with 4 subsystem constraint equations

에 따라 일반좌표 분할법⁽⁷⁾이나 라그랑지 승수 제거법⁽³⁾을 적용하여 보다 효율적으로 풀 수 있다.

3. 부분 시스템 합성법의 효율성

위에서 기술한 바와 같이 부분 시스템 합성법을 적용하는 과정에서 일반좌표 분할법이나 라그랑지 승수 제거법과 같은 미분대수 방정식의 해법을 사용하여 구현할 경우 효율성이 많이 달라질 수 있다.⁽⁸⁾ 여기서는 일반좌표 분할법의 계산량을 수치해석 방법에 따른 오퍼레이션 카운트⁽⁹⁾를 통하여 기존의 순환 공식의 계산량과 비교하여 보았다. 지면관계상 알고리즘과 전체 계산량을 구하는 부분은 생략하고 계산량을 비교하는 그림만 수록하였다.

Fig. 7은 SLA형 현가 장치와 같이 구속 조건식이 4개이고 자유도가 1개인 시스템에서 부분 시스템의 개수에 따른 일반좌표 분할법의 효율성을 나타내고 있다.

k 는 부분 시스템의 개수를 나타내고 있으며 세로축은 기존의 순환 공식에 대한 일반좌표 분할법의 계산량 비율이다. HMMWV의 경우 SLA 현가 장치가 4개이므로 4개의 부분 시스템으로 나눌 수 있다. HMMWV에 일반좌표 분할법을 적용할 경우 기존의 순환 공식에 비해 운동방정식의 해를 구하는 부분에서 이론상으로 약 32.8 배 효율적인 것을 알 수 있다.

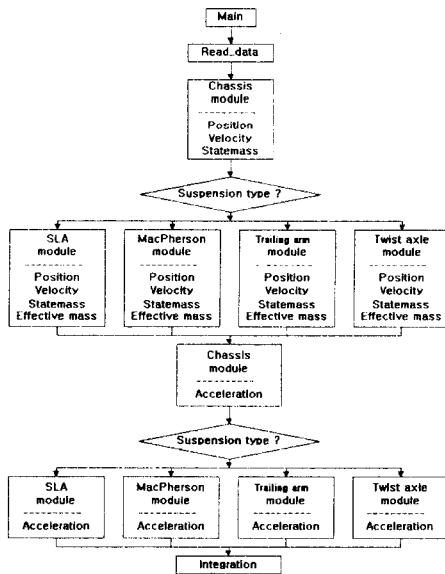


Fig. 8 Program structure

4. 프로그램 구현

Fig. 8은 부분 시스템 합성법을 적용한 경우의 프로그램의 흐름도이다. 부분 시스템 합성법을 적용한 모델링으로 독립 현가 장치가 모듈화되어 있음을 알 수 있다. 이러한 부분 시스템 합성법은 현가 장치를 차체와 분리하여 해석하므로, 현가 장치의 수정 및 교체가 프로그램 상에서는 현가 모듈에 국한되어 기존의 순환 다물체 공식을 적용한 경우에 비하여 매우 효과적이다.

또한, 위의 구조를 살펴보면 현가 장치 모듈의 해석에 대한 부분이 독립적이므로 병렬처리를 이용한 해석이 용이하기 때문에 실시간 시뮬레이션에 보다 적합한 것을 알 수 있다.

5. 시뮬레이션 결과

부분 시스템 합성법을 이용한 실시간 시뮬레이션 가능성을 검증하기 위하여 HMMWV 차량을 모델링하고 비대칭 범프 통과, 스텝 조향 입력(J-turn)과 정현파 입력 시험과 같은 차량 시험을 수행하였다.

5.1 비대칭 범프 통과 시험

부분 시스템의 합성 효과와 차량 모델의 검증

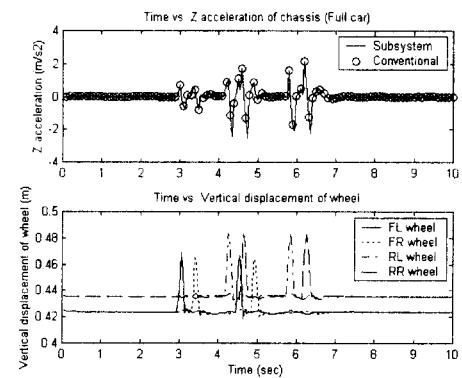


Fig. 9 Vertical displacement for unsymmetric bump run simulation

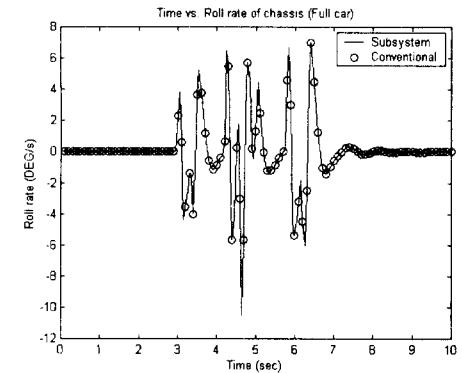


Fig. 10 Roll rate for unsymmetric bump run simulation

을 위하여 타이어가 포함된 전차량을 해석하였다. 평형 상태에서 10km/h의 속도로 출발하여 왼쪽 바퀴가 10m와 14m, 오른쪽 바퀴가 11m와 15m에서 폭 0.5m, 높이 5cm의 반사인(Half sine) 비대칭 범프를 통과하는 해석을 수행하였다. Fig. 9는 차체의 수직 가속도와 휠의 수직 변위를 비교한 그림이며 Fig. 10은 차체의 롤속도(roll rate)를 나타낸 그림이다. 기존의 순환공식과 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

5.2 J-turn 시험

J-turn 시험은 ISO(International Organization for Standardization) 7401의 실차 시험 규격에 규정된 시험 방법 중에서 스텝 조향 입력 시험에 대한 차량의 동특성을 관찰하는 시험으로서 차량의 과도 응답 특성과 정상 상태의 응답 특성을 관찰할

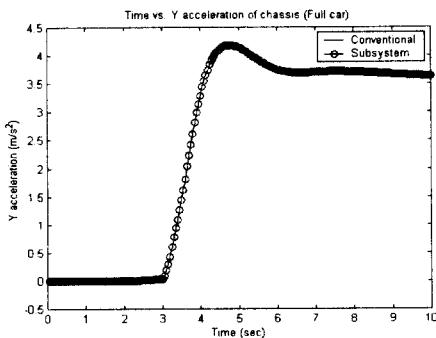


Fig. 11 Lateral acceleration for J-turn test

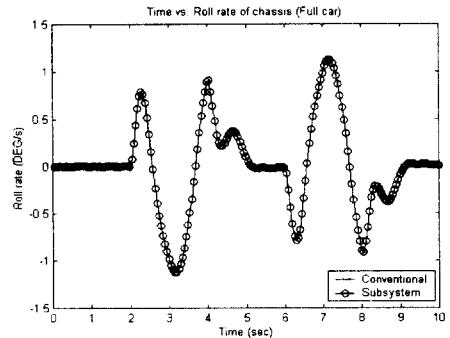


Fig. 13 Roll rate for sine steering test

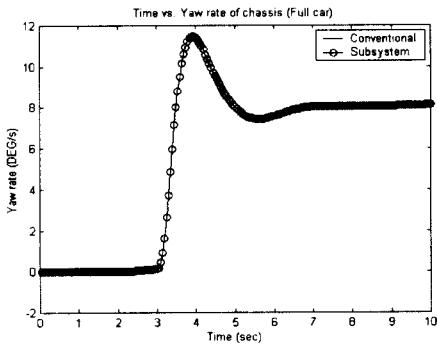


Fig. 12 Yaw rate for J-turn test

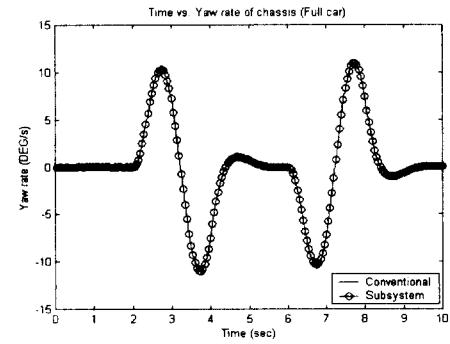


Fig. 14 Yaw rate for sine steering test

수 있다. 100km/h의 속도를 규정속도로 하고 있으며 직진 주행으로부터 횡가속도가 0.4g (3.924m/s^2)가 되도록 랙의 구동입력으로 3초와 3.1초 사이에서 좌회전을 할 수 있도록 8mm의 계단입력을 사용하였다. 차량의 횡가속도, 요속도(yaw rate)의 응답 특성은 Fig. 11과 12와 같다. 실차 시험과 비슷한 경향을 나타냄을 알 수 있다.

5.3 정현파 입력 시험

초기 속도 60km/h의 속도에서 주기가 2초이고 진폭(랙의 변위)이 1cm인 2개의 정현파 입력(single sine input)을 랙의 구동 입력으로 사용하여 2중 차선변경(double lane change)과 유사한 해석을 하였다.

Fig. 13에서 15까지는 롤속도(roll rate), 요속도(yaw rate)와 차체의 궤적을 나타내었다. Fig. 15의 궤적을 살펴보면 두번의 차선 변경 후 제자리에서 약 30cm 정도 옆으로 밀린 것을 알 수 있

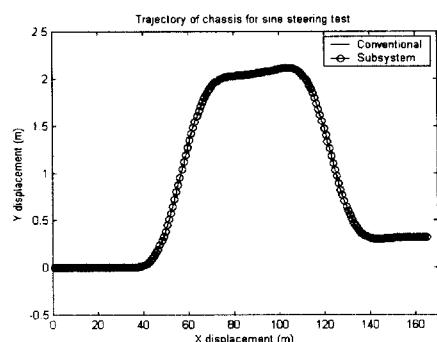


Fig. 15 Chassis trajectory for sine steering test

다. 이는 사용된 타이어 데이터와 무게중심 위치가 실제 차량과 정확히 일치하지 않기 때문이라 생각되어진다. Fig. 13에서 15까지를 살펴보면 조향 장치가 포함된 HMMWV 모델이 일반적인 차량의 응답^(1,2,6)과 비슷한 경향을 가지는 것을 알 수 있다. Fig. 9에서 15까지의 모든 시뮬레이

Table 1 Comparison CPU time, CPU ratio

	Subsystem synthesis method	Conventional recursive formulation
Total Function Evaluation time (ratio)	1.67msec/frame (3.23)	5.39msec/frame (1)
Acceleration Evaluation time (ratio)	0.21msec/frame (19.1)	4.01msec/frame (1)
1 frame CPU time / stepsize	24.7 %	69.8 %

선에서 기존의 방법과 부분 시스템을 이용한 방법이 잘 일치함을 알 수 있다.

5.4 CPU time 비교

실시간의 가능여부를 살펴보기 위하여 기존의 순환 공식에 대하여 프로그램의 전체 루프 타임과 일반좌표 분할법을 이용한 부분 시스템 합성법이 적용되는 가속도 해석부분의 CPU time을 비교하여 표 1에 나타내었다. P-III 533Mhz 컴퓨터에서 적용기는 Adams Bashforth 3차 공식⁽⁹⁾을 사용하고 컴파일러는 Digital Visual Fortran 6.0을 사용하였다. 여기서 적분스텝은 8.3ms를 사용하였다. 부분 시스템 합성법이 사용된 가속도 해석부분에서 약 19.1배의 속도 향상이 있는 것으로 나타났다. 이론상의 효율비 32.8배에 미치지 못하는데 이는 프로그램 구현에 있어서 다수의 서브루틴 호출에서 비롯되는 것으로 생각된다. 전체적으로 기존의 순환공식에 비해 약 3.23배의 속도 향상이 있는 것으로 나타났다. 부분 시스템 합성법을 사용할 경우 현재 사용한 시스템의 적분 시간의 약 24.7%정도만을 차지하므로 현재 단계에서 실시간 해석이 가능한 것으로 나타났다.

6. 결 론

본 논문에서는 조향 장치가 포함된 경우의 부분 시스템 합성법을 이용한 실시간 차량 동역학 모델을 개발하였다. 기구학적 조향 장치가 포함되는 경우 3개의 부분 시스템을 4개의 부분 시스템으로 나누어 계산의 효율성을 향상할 수 있었다. 또한 이 방법을 HMMWV에 적용하여 실제

적분 시간의 약 24.7%의 계산시간으로 실시간 해석 결과를 얻을 수 있었으며 다양한 시뮬레이션을 통하여 부분 시스템 합성법을 적용한 모델의 검증을 수행하였다.

추후 제동과 구동계를 추가하여 시뮬레이터에 적합한 차량 모델이 제시될 것이다. 또한, 부분 시스템 합성법의 구조상 특성을 활용하여 병렬처리를 적용한 실시간 해석이 연구될 예정이다.

참고문헌

- (1) Choi, G.J., Yoo, Y.M., Lee, L.P., and Yoon, Y.S., 2000, "A Real-time Multibody Dynamic Analysis Method using Suspension Composite Joints," *Int. Journal of Vehicle Design*, vol. 24, Nos 2/3, pp. 259~273.
- (2) 정홍규, 김상섭, 1998, "현가장치의 기구학적 특성을 고려한 효율적인 차량동역학 해석방법," 대한자동차공학회 춘계학술대회 논문집, Vol II, pp. 666~673.
- (3) Tsai, F.F., Haug, E.J., 1989, "Automated Methods for High Speed Simulation of Multibody Dynamic Systems," *Technical Report R-47*, Center for Computer Aided Design, The University of Iowa.
- (4) 김성수, 한종규, 1999, "차량 동역학을 위한 부분 시스템 합성 공식에 관한 연구," 대한기계학회논문집 A권, 제23권, 제3호, pp. 520~534.
- (5) HMMWV M1025 Dynamics Model, 1997, Automotive Research Center, Center for CAD, Iowa.
- (6) Allen R. Wade, Magdaleno Raymond E., Rosenthal Theodore J., 1995, "Tire Modeling for Vehicle Dynamic Simulation," SAE Paper No. 950312.
- (7) Haug, E.J., 1992, *Intermediate Dynamics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- (8) 오영석, 김성수, 1999, "구속 다물체 동역학 해석을 위한 미분대수 방정식 변환 방법," 대한기계학회 '99 동역학 및 제어부문 - 생산 및 설계부문 공동학술대회 논문집 pp. 105~110.
- (9) Atkinson, K., 1988, *Numerical Analysis*, John Wiley & Sons.