

TVD 수치모형의 개발: II. 천수방정식 Development of TVD Numerical Models: II. Shallow-Water Equations

이 종 옥* / 조 용 식**

Lee, Jong Wook / Cho, Yong-Sik

Abstract

In this study, a numerical model describing the shallow-water equations is newly developed by using a TVD scheme. The model has a second-order accuracy in time and space and is free from nonphysical oscillations, even in the vicinity of large gradients. Because a upwind based TVD scheme requires a Riemann solver, the HLLC scheme is employed in this model. To calibrate the applicability and accuracy, the developed model is used to simulate dam-break waves in an ideal channel and a sloshing flow in a paraboloidal basin. Agreements between numerical predictions and analytical solutions are very resonable.

keywords : TVD scheme, Riemann solver, flux limiter, moving boundary

요 지

본 연구에서는 TVD기법을 이용한 천수방정식의 수치모형을 개발하였다. 본 모형은 시간과 공간에서 2차 정확도를 가지며 불연속면에서 수치진동을 억제할 수 있다. 풍상차분기법에 근거한 TVD기법은 Riemann 해의 계산이 수반되어야 하며, 여기서는 HLLC기법이 사용되었다. 개발된 모형의 적용성과 정확성을 검증하기 위해 단순화된 하도에서 댐 붕괴과와 포물형 수조에서의 흐름의 오르내림을 모의하였다. 수치해는 해석해와 잘 일치하였다.

핵심용어 : TVD기법, Riemann 해, 흐름률 제한자, 이동경계

* 한양대학교 공과대학 토목공학과, 인턴연구원
Interim Researcher, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea
(E-mail : sins1226@chollian.net)

** 교신저자, 한양대학교 공과대학 토목공학과, 조교수
Corresponding Author, Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea (E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr)

1. 서 론

국내에서 도수 또는 댐 붕괴파와 같은 급변류의 수치모형에 관한 연구는 1차원 Saint Venant 방정식을 이용하여 직선수로의 도수를 해석한 오성택 등(1998)의 연구와 일반좌표계(generalized coordinate)에서 2차원 천수방정식을 개략 Riemann 해(approximate Riemann solver) 중 하나인 Roe 기법으로 해석한 윤태훈과 이종욱(1999), 고 정확도(high resolution) 기법을 음해적으로 해석하여 댐 붕괴파와 같은 급변류의 수치적 거동에 관한 김원(1999)의 연구 등이 있다. 이종욱 등(2001)의 연구에 나타난 것과 같이 일반적인 2차 이상의 정확도를 갖는 수치기법은 불연속면에서 수치진동이 발생하게 된다. 이러한 수치진동을 제거하기 위한 방법으로는 인공점성(artificial viscosity)을 이용하는 방법(Younus 등, 1994; Molls 등, 1995)과 TVD 조건을 만족하는 제한자(limiter)를 이용하는 방법(Jha 등, 1995; Fraccarollo와 Toro, 1995; 김원, 1999)으로 나눌 수 있다. 인공점성을 증가시키는 것은 진동과 발산을 억제하여 계산의 안정성을 높일 수는 있으나 과도하게 큰 계수의 사용은 전체적인 해에 영향을 미치므로 사용에 신중을 기해야 한다. 반면에 TVD 조건을 만족하는 제한자를 이용하는 방법은 TVD 기법의 특성인 단조성을 포함하고 있으므로 인공점성의 사용 없이도 불연속면에서 물리적으로 타당한 결과를 얻을 수 있다.

지배방정식이 선형 이송방정식인 경우에는 1개의 전파속도 또는 특성곡선(characteristic line)을 가지며 상수이지만 천수방정식은 3개의 전파속도를 가지며 이들 전파속도는 매 시간단계마다 계산되어야 할 미지수이다. 따라서 천수방정식과 같은 비선형방정식을 풍상차분기법으로 해석하기 위해서는 개략 Riemann 해를 통해 구간 평균값(piece-wise constant data)을 구해야 한다.

본 연구에서는 HLLC 기법으로 Riemann 해를 계산하였으며, 1차 정확도를 갖는 단점을 보완하기 위해 시간과 공간에 대한 2차 정확도의 WAF(Weighted Averaged Flux) 기법과 이종욱 등(2001)이 제안한 SUPERBEE 형 흐름을 제한자(flux limiter)를 이용한 TVD 기법을 천수방정식에 적용하였다.

다음 장에서는 지배방정식인 천수방정식을, 제3장에서는 HLLC 기법을, 제4장에서는 WAF 기법을 이용한 TVD 기법을 서술하며, 5장에서는 개발된 수치모형을

단순화 된 수로에서 댐의 붕괴파와 포물형 수조에서의 흐름의 오르내림에 따른 이동경계에 적용하였다. 마지막으로 제6장에서는 결론을 서술한다.

2. 지배방정식의 유한차분

2.1 지배방정식

2차원 천수방정식은 Reynold 방정식을 수심방향으로 적분함으로써 얻을 수 있다. 수심적분을 하기 위하여 정수압분포의 가정을 도입하고 바람에 의한 응력과 전향력의 항을 무시하면 식 (1)-(3)의 천수방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} + gh \frac{\partial(h+z_b)}{\partial x} \\ = -\frac{1}{\rho} \tau_{xb} + \nu_t \left\{ \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} + gh \frac{\partial(h+z_b)}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \tau_{yb} + \nu_t \left\{ \frac{\partial(hv)}{\partial x} + \frac{\partial(hu)}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 x , y 는 흐름방향과 하폭방향의 독립변수, h 는 수심, u , v 는 각각 x , y 방향의 유속, g 는 중력가속도, z_b 는 하상고, ρ 는 밀도, ν_t 는 와점성계수이며 τ_{ib} 는 바닥의 전단응력항으로 Chaudhry (1993)에 의하면 Chezy 계수 C 를 이용하여 식 (4)와 같이 표현 할 수 있다.

$$\tau_{xb} = \frac{\rho g}{C^2} u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tau_{yb} = \frac{\rho g}{C^2} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (4)$$

식 (2)와 (3)의 중력항은 비보존형 형태로 표현되어 있으므로 이를 보존형으로 변환하고 다시 정리하면 천수방정식은 식 (5)와 같은 행렬을 이용한 벡터형태의 천수방정식으로 표현된다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} - \mathbf{G} \quad (5)$$

여기서 \mathbf{Q} 는 미지행렬, \mathbf{E} 와 \mathbf{F} 는 비점성 흐름물 (inviscid flux), \mathbf{E}_v 와 \mathbf{F}_v 는 점성 흐름물(viscous flux), \mathbf{G} 는 바닥마찰항(S_{fi})과 하상의 변화(S_{oi})를 나타내며 다음과 같다.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_v = \nu_t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial x} \\ \frac{\partial(hv)}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \nu_t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial y} \\ \frac{\partial(hv)}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{fx} - S_{ox}) \\ gh(S_{fy} - S_{oy}) \end{pmatrix}$$

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}},$$

$$S_{ox} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_{oy} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}$$

여기서 바닥마찰항의 Chezy 계수 C 를 Manning 조도계수 n 으로 변환하여 사용하였다.

2.2 유한차분식

지배방정식인 식 (5)의 시간미분항과 비점성 흐름물을 양해적으로 표현하면 식 (7)과 같다.

$$\mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{E}_{i+1/2,j}^f - \mathbf{E}_{i-1/2,j}^f) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathbf{F}_{i,j+1/2}^f - \mathbf{F}_{i,j-1/2}^f) \quad (7)$$

여기서 \mathbf{E}^f , \mathbf{F}^f 는 수치흐름물이며 본 연구에서는 풍상차분기법에 근거한 방법인 HLLC 개략

Riemann 해를 사용하였고 수치흐름물의 결정 방법은 제3장에 설명하였다.

점성 흐름물 행렬은 자체에 미분항을 포함하고 있으므로 2계 미분에 해당하며 식 (8)을 이용하면 쉽게 차분식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(L \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \{ (\delta_x^+ L) M_{i+1,j} - (\delta_x^- L) M_{i,j} + (\delta_x^- L) M_{i,j} - (\delta_x^+ L) M_{i-1,j} \} \quad (8)$$

여기서 $\delta_x^+ L = L_{i+1,j} + L_{i,j}$,

$$\delta_x L = L_{i+1,j} + 2L_{i,j} + L_{i-1,j},$$

$$\delta_x^- L = L_{i,j} + L_{i-1,j} \text{ 이다.}$$

3. HLLC기법

개략 Riemann 해 중 하나인 HLLC기법은 HLL (Harten 등, 1983)기법의 단점을 개선시킨 방법으로 Fraccarollo와 Toro(1995)에 의해 2차원 천수방정식에 적용된 바 있다. 2차원 천수방정식의 경우, 특성치(eigen value)는 비점성 흐름물의 Jacobian 행렬로부터 구할 수 있으며 x 방향의 값은 다음과 같다.

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + \sqrt{gh} \quad (9)$$

따라서 그림 1에서와 같이 3개의 전파속도(S_L , S_* , S_R)로 구분되어지는 개략 Riemann 해의 구간 평균값을 구할 수 있다. 그림 1은 x 방향의 성분만 고려한 것으로 \mathbf{Q}_L^* , \mathbf{Q}_R^* 지역의 x 방향 유속 성분인 u 는 u^* 로서 동일하게 취급되며 y 방향 유속 성분인 v 는 각각 v_L , v_R 로 구분할 수 있다. Rankine-Hugoniot 조건(Hirsh, 1990; Toro, 1999)을 이용하면 비점성 흐름물의 수치흐름물은 식 (10)으로 표현된다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{E}_L & , \text{ for } 0 \leq S_L \\ \mathbf{E}_L^* = \mathbf{E}_L + S_L (\mathbf{Q}_L^* - \mathbf{Q}_L) & , \text{ for } S_L \leq 0 \leq S^* \\ \mathbf{E}_R^* = \mathbf{E}_R - S_R (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_R^*) & , \text{ for } S^* \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{E}_R & , \text{ for } 0 \geq S_R \end{cases} \quad (10)$$

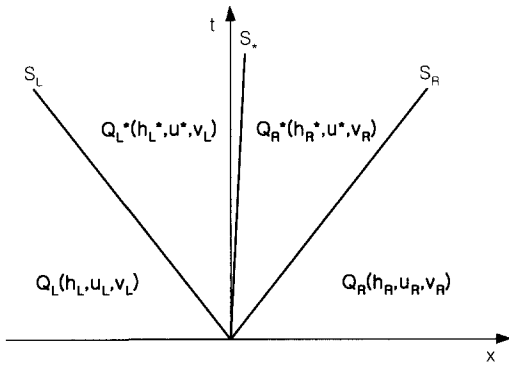


그림 1. HLLC기법의 구간 평균값

그러나, 식 (10)을 계산하기 위해서는 Q_L^* , Q_R^* 의 값과 전파속도를 알아야 한다. Harten 등(1983)에 의한 HLL기법에서는 $Q^* = Q_L^* = Q_R^*$ 이므로 이때의 유속성분 u^* 는 식 (11)에서 구할 수 있으나, 그림 1에서와 같이 HLLC기법에서는 $h^* \neq h_L^* \neq h_R^*$ 로 표현할 수 없으므로 식 (12)를 이용하여 h_L^* 과 h_R^* 를 각각 계산해야 한다. 자세한 유도과정은 Toro(1999)를 참고할 수 있다.

$$Q^* = \frac{S_R Q_R - S_L Q_L + E_L - E_R}{S_R - S_L} \quad (11)$$

$$h_K^* = h_K \left(\frac{S_K - u_K}{S_K - S_*} \right) \quad (12)$$

여기서 아래첨자 K 는 L 또는 R 이다.

또, 하나의 미지수인 전파속도는 Roe의 평균치(Roe, 1981)를 이용하는 방법이 있으나 본 연구에서 사용한 방법을 소개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_L &= \min \{ (u_{i,j} - \sqrt{gh_{i,j}}), (u_{i+1,j} - \sqrt{gh_{i+1,j}}) \} \\ S_* &= u^* \\ S_R &= \max \{ (u_{i,j} + \sqrt{gh_{i,j}}), (u_{i+1,j} + \sqrt{gh_{i+1,j}}) \} \end{aligned} \quad (13)$$

식 (10)은 x 방향만을 분리하여 고려한 것으로 y 방향에 대해서도 비슷한 방법으로 수치흐름률 $F_{i,j+1/2}^{HLLC}$ 를 계산할 수 있으므로 여기서는 생략하였다.

4. WAF형 TVD기법

이종욱 등(2001)에서와 같이 WAF기법에 의한 수치흐름률은 $-\Delta x/2 \sim \Delta x/2$ 의 구간에서 흐름률을 적분함으로써 얻을 수 있다.

$$E_{i+1/2,j}^{WAF} = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} E(Q_{i+1/2,j}(x, \Delta t/2)) dx \quad (14)$$

제3장에서 서술한 것과 같이 $-\Delta x/2 \sim \Delta x/2$ 의 구간은 4개의 구간 평균값으로 나타낼 수 있으므로 식 (14)은 식 (15)로 변환할 수 있다.

$$E_{i+1/2}^{WAF} = \sum_{k=1}^4 \beta_k E_{i+1/2}^{(k)} \quad (15)$$

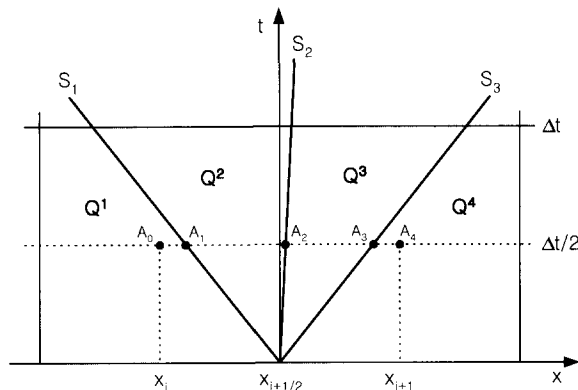


그림 2. WAF기법의 수치흐름률

여기서 $\mathbf{E}_{i+1/2,j}^{(k)} = \mathbf{E}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^{(k)})$ 로서 식 (10)의 HLLC기법의 구간 평균값을 사용할 수 있으며 β_k 는 무차원 거리로서 식 (16)과 같다.

$$\beta_k = \frac{A_k - A_{k-1}}{\Delta x} = \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}) \quad (16)$$

식 (16)에서 c_k 는 전파속도 S_k 에 대한 Courant 수로서 $\Delta t S_k / \Delta x$ 이고 $c_0 = -1$, $c_4 = 1$ 이다. 따라서, 식 (16)을 식 (15)에 대입하고 정리하면 식 (17)를 구할 수 있다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j}^{WAF} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{i,j} + \mathbf{E}_{i+1/2,j}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 c_k \Delta \mathbf{E}_{i+1/2,j}^{(k)} \quad (17)$$

여기서 $\Delta \mathbf{E}_{i+1/2,j}^{(k)} = \mathbf{E}_{i+1/2,j}^{(k+1)} - \mathbf{E}_{i+1/2,j}^{(k)}$ 이다. 그러나 일반적인 2차 이상의 정확도를 갖는 수치기법은 불연속면 인근에서 수치진동이 발생하게 되며 이를 없애기 위해 TVD조건의 흐름률 제한자를 이용할 수 있다.

이종욱 등(2001)의 연구에서 사용한 선형 이송방정식은 1개의 전파속도를 가지므로 강력한 TVD조건을 만족시킬 수 있으나 본 연구의 지배방정식인 천수방정식은 3개의 전파속도를 갖는 비선형방정식이다. 그러므로 각각의 전파속도에 따른 단일 물리량 q 의 변화량을 조사함으로써 TVD조건을 적용할 수 있으며, 매 계산 격자마다 3개의 제한자 함수가 필요하게 된다. Euler방정식의 경우, Toro(1999)는 q 를 밀도나 내부에너지를 선택할 수 있다고 밝힌 바 있으나 천수방정식의 경우 수심 h 를 선택해야 한다. 식 (17)을 흐름률 제한자를 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j}^{TVD} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{i,j} + \mathbf{E}_{i+1/2,j}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \text{sign}(c_k) \phi_{i+1/2,j}^{(k)} \Delta \mathbf{E}_{i+1/2,j}^{(k)} \quad (18)$$

여기서 $\phi_{i+1/2,j}^{(k)}$ 는 흐름률 제한자이며 여러 가지 종류가 있으나 본 연구에서는 이종욱 등(2001)이 권장한 SUPERBEE형 제한자를 사용하였으며 이는 식 (19)

과 같다.

$$\phi_{sa}(r, c) = \begin{cases} 1 & , \text{ for } r \leq 0 \\ 1 - 2(1 - |c|)r & , \text{ for } 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ |c| & , \text{ for } \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \\ 1 - (1 - |c|)r & , \text{ for } 1 \leq r \leq 2 \\ 2|c| - 1 & , \text{ for } r \geq 2 \end{cases} \quad (19)$$

여기서 r 은 k 번째 파의 전파속도에 따라 변화하는 h 의 양에 의해 결정되며 상류 변동량(upwind change, Δupwind)과 국부 변동량(local change, Δlocal)의 비로 표현된다.

$$r = \frac{\Delta \text{upwind}}{\Delta \text{local}} = \begin{cases} \frac{\Delta h_{i-1/2,j}^{(k)}}{\Delta h_{i+1/2,j}^{(k)}} & , \text{ for } c_k > 0 \\ \frac{\Delta h_{i+3/2,j}^{(k)}}{\Delta h_{i+1/2,j}^{(k)}} & , \text{ for } c_k < 0 \end{cases} \quad (20)$$

여기서 $\Delta h_{i-1/2,j}^{(k)} = h_{i,j}^{(k)} - h_{i-1,j}^{(k)}$ 이다.

식 (18)은 x 방향의 수치흐름률이며, y 방향의 수치흐름률도 쉽게 구할 수 있다. 이렇게 구한 수치흐름률을 식 (7)에 대입하면 2차 정확도를 갖는 TVD형 수치모형을 구성할 수 있다.

5. 수치모형의 적용

5.1 댐 붕괴파의 전파

제4장에서 개발된 수치모형의 적용성을 검토하기 위해 Jha 등(1995)과 김원(1999) 등이 사용한 댐 붕괴파의 전파를 해석하였다. 그림 3은 바닥마찰이 없는 가상하도(2000m × 20m)에서의 초기조건을 나타내며 댐 하류의 수심 h_0 는 5m와 0.005m의 경우에 대해 모의하였다. 수치해석에 사용된 계수는 $\Delta x = 4\text{m}$, $\Delta y = 2\text{m}$, $\Delta t = 0.2\text{sec}$ 이며 $n = 0.0$, $\nu_i = 0.0$ 이다.

그림 4와 그림 5는 댐 붕괴 60초 후를 해석해와 함께 수치해를 도시한 것이다. 해석해는 Stoker(1957) 및 김원(1999)에서 찾을 수 있으며, 수치해는 개략 Riemann 해인 HLLC기법과 이 기법을 WAF형

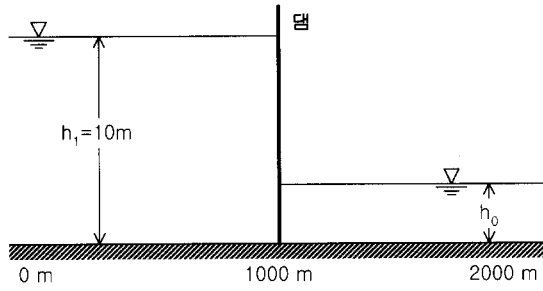


그림 3. 댐 붕괴파의 초기조건

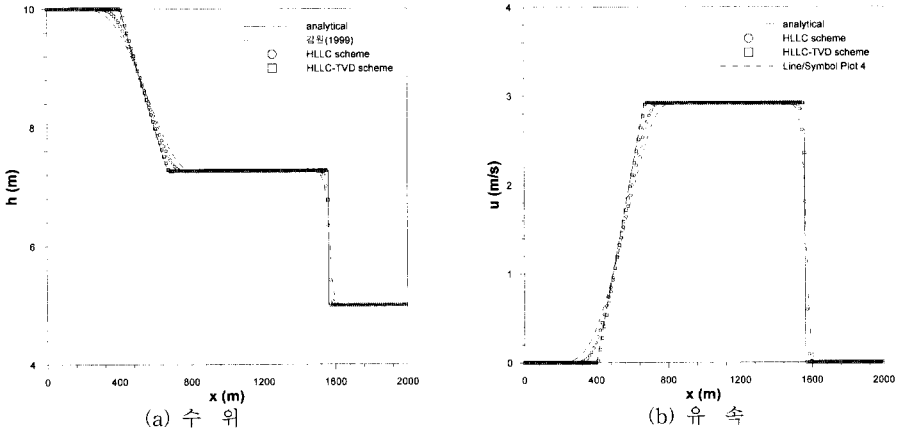


그림 4. $h_1/h_0=0.5$ 인 경우 댐 붕괴파의 전파

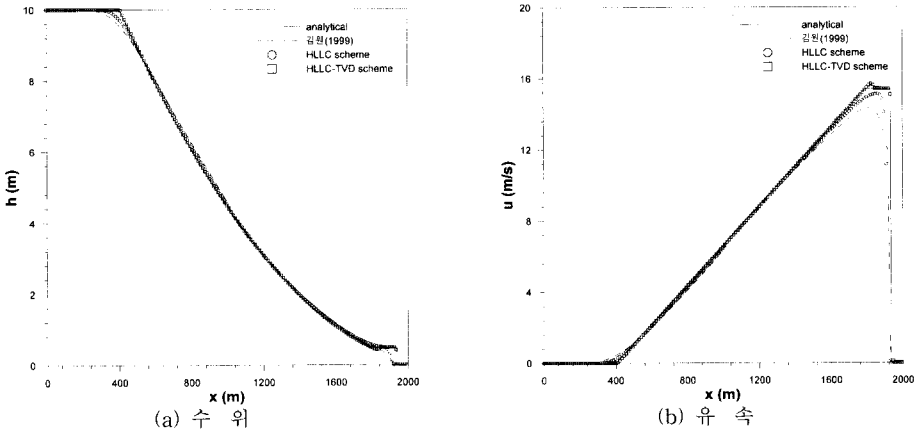


그림 5. $h_1/h_0=0.0005$ 인 경우 댐 붕괴파의 전파

TVD조건에 적용시킨 방법 및 김원(1999) 등 3가지이다. 그림 4는 $h_1/h_0=0.5$ 인 경우의 홍수와 전파를 나타낸 것으로 상류(subcritical flow)와 하류(supercritical flow)가 교차하는 천이흐름이 발생되지는 않았다. 전 구간에 걸쳐 김원(1999)의 연구결과보

다는 HLLC기법과 TVD기법이 개선된 결과를 보이고 있다. 특히 TVD기법은 홍수파의 선단에서 발생하는 약간의 불일치를 제외하고는 해석해와 거의 일치하고 있어 그 정확성이 탁월하다고 할 수 있다. 이는 본 연구가 풍상차분기법을 기반으로 하는 개략 Riemann 해

에 기반을 두고 있는 반면, 김원(1999)의 ENO기법은 대표적인 중앙차분기법인 Beam-Warming기법에 기반을 두고 있는 방법이기 때문인 것으로 판단된다.

그림 5는 초기하류의 수위가 0.005m인 경우로서 그림 4와는 달리 흐름사이에서 Froude수가 약 16.6인 강한 충격파가 발생하였다. 이 경우에도 TVD기법이 홍수파의 선단 등을 거의 유사하게 모의하였으나 약간의 수치진동이 관찰되었다.

5.2 포물형 수조의 이동경계조건

댐 붕괴피나 제방 월류흐름의 정확한 해석을 위해서는 홍수파의 선단에 따라 이동하는 경계조건이 필수적이다. 따라서, 본 연구에서는 조용식과 윤태훈(1996) 등이 검증했던 바다마찰이 없는 포물형 수조(그림 6)에서 유체의 주기적인 거동을 수치적으로 관찰하였다. 해석하는 타원형 수조에서 비선형 천수방정식을 직접 해석한 Thacker(1981)의 정확해를 사용하였다.

그림 6은 수조와 유체의 초기조건을 도시한 것으로 수조 중앙에서 수심이 최고이며, 이 때 유체와 수조의 접촉면은 최소가 되고, 반대로 수조 중앙에서 수심이 최소가 될 때 유체와 수조의 접촉면은 최고가 된다. 여기서 사용한 기호는 Thacker(1981)가 사용한 기호를 그대로 사용한 것으로 본 모형이 사용하고 있는 수심과는 다소 차이가 있다(Thacker, 1981; 조용식과 윤태훈, 1996).

수조의 초기수심은 식 (21)과 같이 정의되며 이 때의 시간과 공간에 따른 정확해는 식 (22)-(24)로 표현된다.

$$h = h_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (21)$$

$$\zeta = h_0 \left[\frac{(1-A^2)^{1/2}}{1-A \cos \omega t} - 1 - \frac{r^2}{a^2} \left\{ \frac{1-A^2}{(1-A \cos \omega t)^2} - 1 \right\} \right] \quad (22)$$

$$u = \frac{A \omega \sin \omega t}{2(1-A \cos \omega t)} x \quad (23)$$

$$v = \frac{A \omega \sin \omega t}{2(1-A \cos \omega t)} y \quad (24)$$

여기서 $\omega = (8gh_0)^{1/2}/a$, $A = (a^4 - r_0^4)/(a^4 + r_0^4)$ 이며 h_0 는 그림 6에 보인 바와 같이 수조 중앙에서 평균해수면상의 수심, a 는 x 축의 절편, r 은 원형수조의 중앙에서 거리, r_0 는 초기상태의 수조의 중심에서 유체와 수조가 만나는 지점까지의 거리이다.

Q_M^n 에서 유체와 수조가 만나는 지점이 존재한다고 가정하자. 이 경우 적절한 구간 평균값을 계산하기 위해서는 가상의 격자에서 Q_{M+1}^n 의 값이 정의되어야 한다. 이 때 사용 가능한 값은 식 (25)와 같다.

$$h_{M+1}^n = h_M^n, \quad u_{M+1}^n = -u_M^n, \quad v_{M+1}^n = -v_M^n \quad (25)$$

본 연구에서는 이동경계의 검증을 위해 식 (25)의 이동경계조건을 사용하였으며 수치모형에 사용한 변수는 식 (26)으로서 조용식과 윤태훈(1996)이 사용한 변수와 같은 것을 사용하였다.

$$h_0 = 1.0m, \quad r_0 = 2,000m, \quad a = 2,500m \quad (26)$$

$$\Delta x = 12.5m, \quad \Delta y = 12.5m, \quad \Delta t = 1.25 \text{ sec}$$

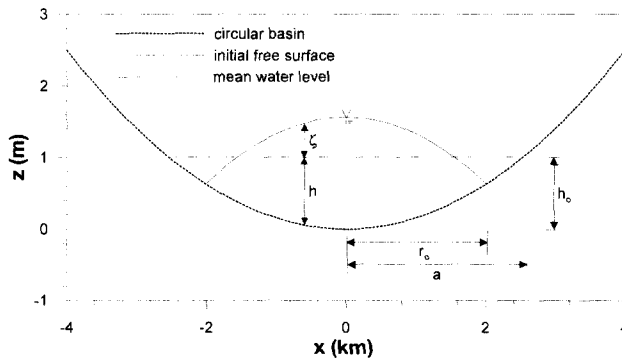


그림 6. 포물형 수조의 이동경계

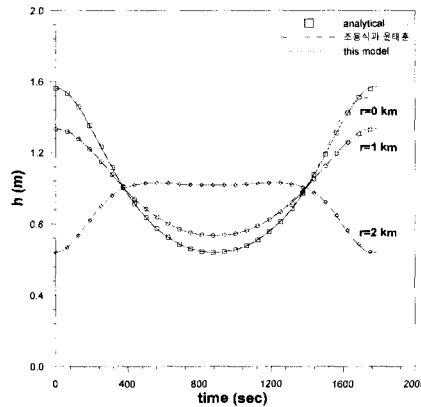


그림 7. $r=0, 1, 2\text{km}$ 에서 시간별 자유수면의 변화

원형 수조에서 유체의 거동은 x 및 y 축에 대해 대칭이므로 수치계산은 수조의 1/4에 대해서만 계산하였다.

그림 7은 특정지점에서 수위의 시간별 변화를 정확해와 본 연구에서 개발한 TVD기법의 계산 결과를 비교한 것이다. 1차 정확도의 풍상차분기법을 사용한 조용식과 윤태훈(1996)의 연구결과는 시간이 경과함에 따라 점차 정확해와 차이를 보이는 수치점성(numerical viscosity)의 영향이 나타났으며 이는 이종욱 등(2001)의 연구결과와 일치한다. 그러나 TVD 기법의 경우 1주기 T 시간동안 큰 차이 없이 정확해와 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 풍상차분기법에 기반한 2차 정확도의 WAF기법을 이용하여 수심평균된 2차원 천수방정식의 수치모형을 개발하였으며 도수와 댐 붕괴파와 같은 급변류의 흐름에서 발생하는 수치진동을 억제하기 위해 TVD기법을 적용하였다. 개발된 수치모형의 적용성을 검증하기 위해 해석해가 존재하는 가상하도의 댐 붕괴파와 원형수조에서 발생하는 이동경계를 모의하였으며 두 경우 모두 HLLC기법에 비해 TVD기법이 해석해에 가까운 결과를 계산하였다. 가상하도에서 발생하는 댐 붕괴파의 경우, TVD기법에서 Froude수가 아주 크게 되면 미소한 진동이 발생하였으나 전체적인 해에는 영향을 미치지 않으며 아주 작은 값으로서 실제 문제의 적용에는 큰 무리가 없을 것으로 판단된다. 풍상차분기법에 기반을 둔 본 연구는 Riemann 해를

계산해야 함으로 프로그램 작성이 다소 복잡해지기는 하나 Beam-Warming기법에 기반을 두고 있는 김원(1999)의 연구에 비해 정확한 값을 예측하였다. 이동 경계조건의 수치모의를 알아보기 위해 적용한 원형수조에서 유체의 거동은 유체와 수조의 경계면을 따라 수면의 상승과 하강을 적절하게 모의하였다. 따라서 본 연구의 결과를 이용하면 댐 붕괴나 홍수시 제방의 붕괴 혹은 월류에 의한 피해를 격감시킬 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2000-041-E00600)에 의하여 연구되었기에 이에 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

- 김 원 (1999). 고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형의 개발. 박사학위논문, 경북대학교.
- 오성택, 황승용, 이길성 (1998). “흐름률 분리방법에 의한 도수의 수치해석.” 대한토목학회논문집, 제 18권, 제 II-3호, pp. 215~221.
- 윤태훈, 이종욱 (1999). “불연속흐름의 2차원 수치해석.” 대한토목학회논문집, 제19권, 제 II-4호, pp. 445~454.
- 이종욱, 조용식, 윤광석, 윤태훈 (2001). “TVD수치모형의 개발: I. 선형 이송방정식.” 한국수자원학회논문집, 제34권, 제2호, pp. 177~186.
- 조용식, 윤태훈 (1996). “경사지형에서의 이동경계조

- 진.” 대한토목학회논문집, 제16권, 제II-1호, pp. 73~81.
- Chaudhry, M.H. (1993). *Open-channel flow*. Prentice Hall.
- Fraccarollo, L and Toro, E.F. (1995). “Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, pp. 843~864.
- Hirsch, C. (1990). *Numerical computation of internal and external flow-Volume 2: computational methods for inviscid and viscous flows*. John Wiley & Sons Ltd.
- Jha, A.K., Akiyama, J., and Ura, M. (1995). “First and second-order flux difference splitting schemes.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, pp. 877~884.
- Molls, T. and Chaudhry, M.H. (1995). “Depth-averaged open-channel flow model.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, pp. 453~465.
- Roe, P.L. (1981). “Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes.” *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357~372.
- Thacker, W.C. (1981). “Some exact solutions to the nonlinear shallow water wave equations.” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 107, pp. 499~508.
- Toro, E.F. (1999). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer.
- Younus, M. and Chaudhry, M.H. (1994). “A depth-averaged k- ϵ turbulence model for the computation of free-surface flow.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 32, pp. 415~444.

(논문번호:01-013/접수:2001.02.05/심사완료:2001.03.29)