

TVD 수치모형의 개발: I. 선형 이송방정식

Development of TVD Numerical Models: I. Linear Advection Equation

이 종 욱* / 조 용 식** / 윤 광 석*** / 윤 태 훈****

Lee, Jong Wook / Cho, Yong-Sik / Yoon, Kwang Seok / Yoon, Tae Hoon

Abstract

By using the total variation diminishing (TVD) condition, accurate and upwind based schemes are firstly introduced to develop numerical models free from nonphysical oscillations in the vicinity of large gradients. These models are then applied to both abruptly and smoothly varying initial conditions. By comparing computed predictions to analytical solutions, it is clearly shown that the first-order upwind scheme produces the numerical viscosity and the second-order Lax-Wendroff scheme produces the spurious oscillations. However, the TVD scheme gives the most reasonable results.

keywords : TVD scheme, advection equation, numerical oscillation, upwind scheme

요 지

2차 이상의 정확도를 가지며 불연속면에서 수치진동이 발생하지 않는 수치모형의 개발을 위해 풍상차분기법에 기초한 TVD기법이 소개되었다. 이 수치모형을 불연속면이 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우에 대해 적용하였으며, 이 결과 1차 정확도의 풍상차분기법은 시간이 지나면서 수치점성의 영향이 커졌으며 2차 정확도의 Lax-Wendroff기법의 경우에는 불연속면에서 진동이 발생하였다. 그러나 TVD기법은 모든 경우에서 만족스러운 결과를 예측하였다.

핵심용어 : TVD기법, 이송방정식, 수치진동, 풍상차분기법

* 한양대학교 공과대학 토목공학과 인턴연구원

Interim Researcher, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea
(E-mail : sins1226@chollian.net)

** 교신저자, 한양대학교 공과대학 토목공학과 조교수

Corresponding Author, Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea (E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr)

*** 한국건설기술연구원 연구원

Researcher, Korea Institute of Construction Technology, Goyang, Kyonggi 411-410, Korea

**** 한양대학교 공과대학 토목공학과 교수

Professor, Department of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea

1. 서론

일반적으로 댐붕괴파와 같은 급변류의 수치모형에 사용되는 기법은 흐름의 이송특성을 고려한 풍상차분기법(Courant 등, 1952), 흐름불벡터 분리기법(Steger와 Warming, 1981) 및 근사 Riemann 해(Roe, 1981a; Osher, 1984)를 이용하는 방법 등이 있다. 풍상차분기법 혹은 상류이송기법은 Peclet수가 큰 경우에도 안정적인 계산이 가능하며, 수치진동이 발생하지 않으므로 물리적인 해를 구할 수 있다는 특징이 있다(Hoffmann과 Chiang, 1993). 그러나 대부분의 풍상차분기법 1차 정확도를 가지고 있으므로 시간이 경과함에 따라 점차 침투가 감소하게 되는 수치점성 효과를 포함하고 있다.

최근 van Leer(1974)와 Harten(1983) 등의 연구에 의해 불연속 수면 부근에서 진동이 발생하지 않으며 2차 이상의 정확도를 가지는 TVD(Total Variation Diminishing)기법 및 ENO(Essentially Non-Oscillatory)기법과 같은 높은 정확도(High resolution)기법에 관한 연구가 활발하게 진행되고 있다. 이 중 수리학 분야와 관련된 연구는 흐름불벡터 분리기법을 이용한 Jha 등(1995)의 연구, MacCormack기법을 TVD기법에 적용한 Garcia-Navarro와 Saviron(1992)의 연구, 음해적 MacCormack기법과 TVD기법을 결합시킨 Garcia-Navarro와 Priestley(1993)의 연구, 일반 좌표계에서 TVD기법을 적용한 Nakatani와 Komura(1993)의 연구 및 2차원 댐 붕괴파를 해석한 Fraccarollo와 Toro(1995)의 연구 등이 있다. 국내의 경우, 급변류 해석은 1차 정확도의 기법을 이용한 경우가 대부분이며(오성택 등, 1998; 윤태훈과 이종욱, 1999), 높은 정확도기법은 김원(1999)에 의해 적용된 ENO기법이 있다.

본 연구에서는 1차 정확도 풍상차분기법과 풍상차분기법에 기초한 2차 정확도의 WAF(Weighted Averaged Flux)기법 및 MUSCL(Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws)기법을 소개하며, 불연속면에서 발생하는 진동을 소거하기 위해 TVD기법의 제한자 함수(limiter function)를 도입한 수치기법을 개발하였다. 이 수치기법을 선형 이송방정식에 적용하여 정확성과 적용성을 검증한다.

다음 장에서는 풍상차분기법과 이 기법에 기초한 수

치기법의 특성을 서술하며, 제3장에서는 TVD기법을 기술한다. 제4장에서는 2장과 3장에서 언급된 기법을 불연속면이 존재하는 경우와 존재하지 않은 경우로 나누어 적용한다. 마지막으로 제5장에서는 결론을 기술한다.

2. 수치기법의 특성

2.1 1차 정확도의 풍상차분기법

풍상차분기법의 일반적인 특성을 알아보기 위해 식 (1)의 1차원 선형 이송방정식의 차분기법을 살펴본다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

여기서 x , t 는 각각 공간과 시간에 대한 독립변수, $u(x, t)$ 는 x 방향으로 이송되는 물리량을 의미하며, a 는 일정한 유속, $f(u) = au$ 로서 흐름률이다.

풍상차분기법은 Courant 등(1952)에 의해 제안되었으며, 식 (1)과 같은 선형 이송방정식의 경우 수치기법은 다음과 같다. 그림 1에서 보는 바와 같이 a 가 양의 값을 갖는다면 구하고자 하는 미지값 u_i^{n+1} 은 a 에 의해 이송되기 이전의 위치 x_p 에서의 u_p^n 로 표현할 수 있다.

$$u_i^{n+1} = u_p^n = u_{i-1}^n + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} (x_p - x_{i-1}) = u_i^n - c(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (2)$$

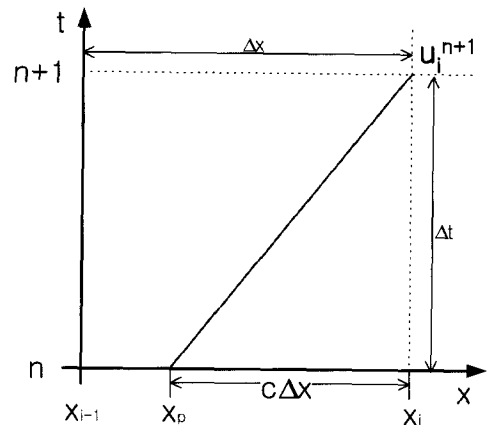


그림 1. 풍상차분기법($a > 0$)

여기서 i, n 은 x, t 에 관한 첨자, $c = a\Delta t/\Delta x$ 로서 Courant수를 나타내며 $\Delta x, \Delta t$ 는 각각 공간격자와 시간격자의 크기이다.

식 (2)와 같은 방법으로 a 가 음의 값을 갖는 경우에도 차분식을 유도할 수 있으며 이 식을 정리하면 식 (3)과 같다.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [a^+ (u_i^n - u_{i-1}^n) - a^- (u_{i+1}^n - u_i^n)],$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^{UP} - f_{i-1/2}^{UP}) \quad (3)$$

여기서 $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \min(a, 0)$ 이고 $f_{i+1/2}^{UP}$ 는 1차 정확도 풍상차분기법의 수치흐름률(numerical flux)이며 식 (4)로 표현된다.

$$f_{i+1/2}^{UP} = a^+ u_i^n + a^- u_{i+1}^n = \frac{1}{2}(1+s)au_i^n + \frac{1}{2}(1-s)au_{i+1}^n \quad (4)$$

여기서 s 는 $sign(a)$ 이다. 그림 1에서 보는 바와 같이 이 수치기법은 $0 \leq |c| \leq 1$ 의 조건에서 안정적인 수치계산이 가능하며, 이를 Courant 안정조건이라고 한다.

2.2 WAF기법

WAF기법은 1차 정확도의 풍상차분기법 및 Lax-Wendroff기법의 확장이라고 생각할 수 있으며 시간과 공간에서 2차 정확도를 가지며(Billett와 Toro, 1997), 수치흐름률 $f_{i+1/2}^{WAF}$ 를 $-\Delta x/2 \sim \Delta x/2$ 구간의 흐름률 $f(u)$ 를 적분하여 식 (5)와 같이 표현한다.

$$f_{i+1/2}^{WAF} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} f[u_{i+1/2}(x, \Delta t/2)] dx \quad (5)$$

여기서 $u_{i+1/2}(x, t)$ 는 (u_i^n, u_{i+1}^n) 에서의 Riemann 해를 의미하며 그림 2와 같이 각 구간 평균값(piecewise constant data)의 개념을 도입하면 식 (6)과 같다.

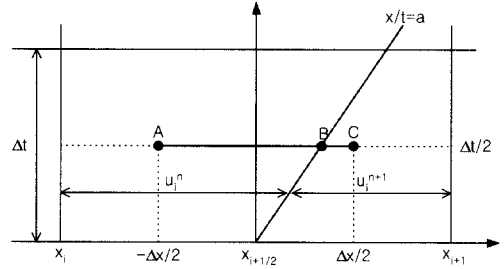


그림 2. WAF기법($a > 0$)

$$u_{i+1/2}(x, t) = \begin{cases} u_i^n & \text{for, } \frac{x}{t} < a \\ u_{i+1}^n & \text{for, } \frac{x}{t} > a \end{cases} \quad (6)$$

그림 2에서 알 수 있듯이 $-\Delta x/2 \sim \Delta x/2$ 의 구간은 거리 \overline{AB} 와 \overline{BC} 로 구분할 수 있으며 이 거리는 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{AB} = \beta_1 \Delta x = \frac{\Delta x}{2}(1+c),$$

$$\overline{BC} = \beta_2 \Delta x = \frac{\Delta x}{2}(1-c) \quad (7)$$

따라서 식 (6)과 식 (7)을 이용하면 식 (5)의 수치흐름률은 다음 식 (8)과 같이 표현된다.

$$f_{i+1/2}^{WAF} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\Delta x}{2}(1+c)(au_i^n) + \frac{\Delta x}{2}(1-c)(au_{i+1}^n) \right]$$

$$= \frac{1}{2}(1+c)(au_i^n) + \frac{1}{2}(1-c)(au_{i+1}^n) \quad (8)$$

결과적으로 수치흐름률 $f_{i+1/2}^{WAF}$ 는 Lax-Wendroff기법과 동일하다. $a > 0$ 일 경우, 상류방향의 흐름률(upwind flux) $f_i = au_i^n$ 에 대한 가중치 β_1 이 하류방향의 흐름률(downwind flux) $f_{i+1} = au_{i+1}^n$ 에 대한 가중치 β_2 보다 크다. 즉, WAF기법은 상류방향의 흐름률에 큰 가중치를 주어 평균하므로 풍상차분기법의 확장된 방법이라고 할 수 있다.

2.3 MUSCL기법

MUSCL형 고 정확도 수치기법은 Van Leer(1974, 1977a, 1977b)에 의해 소개된 방법으로 1차 정확도의

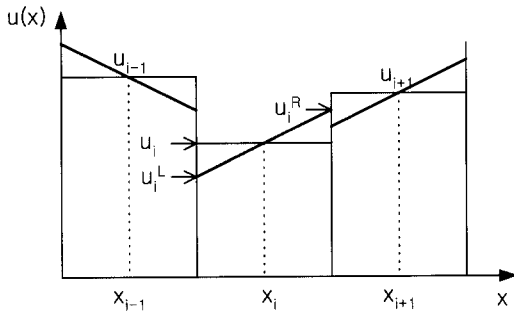


그림 3. 구간 평균값의 재조정

풍상차분기법의 확장된 개념으로 구간 평균값을 재조정하여 고 정확도의 수치흐름률을 유도하는 방법이다. 이 기법은 그림 2.3에서와 같이 구간 평균값을 식 (9)를 이용하여 구간 선형값(piecewise linear data)으로 가정하고 이 값을 이용하여 Riemann 해를 구하는 방법이다.

$$u_i^L = u_i^n - \frac{1}{2} \Delta_i, \quad u_i^R = u_i^n + \frac{1}{2} \Delta_i \quad (9)$$

여기서 Δ_i 는 구간 선형값의 경사자로서 식 (10)과 같다.

$$\Delta_i = \frac{1}{2} (1 + \omega) \Delta u_{i-1/2} + \frac{1}{2} (1 - \omega) \Delta u_{i+1/2} \quad (10)$$

이 때, $\Delta u_{i-1/2} = u_i^n - u_{i-1}^n$, $\Delta u_{i+1/2} = u_{i+1}^n - u_i^n$ 이며 ω 는 조정 가능한 계수로서 $-1 \sim +1$ 의 값을 가지며 $a > 0$ 일 때 $\omega = 1$ 이면 Warming-Beam기법, $\omega = -1$ 이면 Lax-Wendroff 기법과 동일하게 된다.

MUSCL기법은 식 (9)에 의해 계산된 변수를 이용하여 $\Delta t/2$ 후의 변수(\bar{u}_i^L , \bar{u}_i^R)를 식 (11)에 의해 계산한다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^L &= u_i^L - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(u_i^R) - f(u_i^L)] \\ \bar{u}_i^R &= u_i^R - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(u_i^R) - f(u_i^L)] \end{aligned} \quad (11)$$

식 (1)의 흐름률 $f(u) = au$ 와 식 (9)를 식 (11)에 대입하면 식 (12)와 식 (13)과 같다.

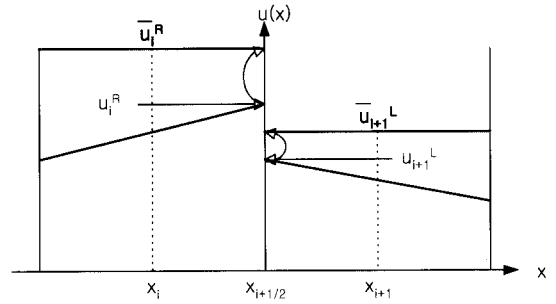


그림 4. 구간 평균값과 구간 선형값

$$f(u_i^L) = a(u_i^n - \frac{1}{2} \Delta_i), \quad f(u_i^R) = a(u_i^n + \frac{1}{2} \Delta_i) \quad (12)$$

$$\bar{u}_i^L = u_i^n - \frac{1}{2} (1 + c) \Delta_i, \quad \bar{u}_i^R = u_i^n + \frac{1}{2} (1 - c) \Delta_i \quad (13)$$

식 (13)에 의해 계산된 값을 1차 정확도의 풍상차분기법인 식 (4)의 수치흐름률에 대입하면, MUSCL기법의 수치흐름률을 계산할 수 있다(그림 4).

$$f_{i+1/2}^{MSL} = \frac{1}{2} (1 + s) f(\bar{u}_i^R) + \frac{1}{2} (1 - s) f(\bar{u}_{i+1}^L) \quad (14)$$

2.4 수치기법의 단조성

불연속 수면이 존재하지 않는 점변류의 흐름에서는 1차 정확도의 수치기법보다는 2차 이상의 정확도를 갖는 수치기법이 정확도에서는 뛰어나다. 그러나 급변류의 경우, 특히 도수(hydraulic jump)와 같은 불연속 수면을 갖는 흐름에서는 2차 정확도 이상의 고 정확도의 수치기법은 불연속면 부근에서 진동이 발생하여 물리적으로 부적절한 값을 계산하게 된다. 수치기법의 단조성은 식 (15)를 만족할 경우 유지될 수 있다(Hirsch, 1990).

$$\frac{\partial H}{\partial u_k^n} \geq 0 \quad (15)$$

여기서 H 는 식 (4)와 같은 차분식의 계수로서 식 (16)와 같다.

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} &= H(u_{i-l_L}^n, \dots, u_{i+l_R}^n) \\
 &= \sum_{k=-l_L}^{l_R} b_k u_{i+k}^n
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

식 (16)에서 l_L 과 l_R 은 양의 정수이며, b_k 는 수치 기법의 계수이다. 1차 정확도의 풍상차분기법인 식 (4)의 경우 식 (16)을 적용하면 $b_{-1} = c^+$, $b_0 = (1 - |c|)$, $b_1 = -c^-$ 이다. 따라서 Courant 안정조건 $0 \leq |c| \leq 1$ 에서는 모든 $b_k \geq 0$ 이며 식 (15)를 만족하므로 단조성 기법이라고 할 수 있다.

식 (8)과 $\omega = -1$ 인 경우 식 (14)는 Lax-Wendroff기법과 동일하며 이 때 수치기법의 계수 b_k 는 다음과 같다.

$$b_{-1} = \frac{(1+c)c}{2}, \quad b_0 = 1 - c^2, \quad b_1 = -\frac{(1-c)c}{2}$$

위와 같은 경우에는 식 (15)를 만족하지 못하므로 단조성 기법이 아니며 불연속면 부근에서 진동이 예상된다. 따라서 단조성은 수치모형의 거동을 결정하는 중요한 특성 중의 하나이다. 두 개의 초기값 $v_0(x)$ 와 $u_0(x)$ 가 모든 x 에서 $v_0(x) \geq u_0(x)$ 의 조건을 만족한다면 식 (4)와 같은 단조성 기법을 이용하여 수치해 $v(x, t)$ 와 $u(x, t)$ 를 구했을 경우, 모든 시간에서 $v(x, t) \geq u(x, t)$ 를 만족하게 된다(Harten, 1983). 여기에서 유도할 수 있는 다른 특성은 기지값 u_i^n 으로부터 단조성 기법을 이용하여 미지값 u_i^{n+1} 을 계산하였다면 식 (17)과 같은 부등식을 만족한다.

$$\max\{u_i^{n+1}\} \leq \max\{u_i^n\}, \quad \min\{u_i^{n+1}\} \geq \min\{u_i^n\} \tag{17}$$

식 (17)의 물리적인 의미는 계산영역에서 새로운 항은 생성되지 않으며 따라서 물리적 현상과 거리가 먼 진동은 발생하지 않음을 의미한다. 즉, 보존법칙 (conservation law)의 특성과 잘 일치한다.

3. TVD기법

TVD기법은 식 (18)과 같은 총변동량의 크기를 억제하는 방법으로 식 (17)을 내포하고 있으므로 불연속수면에서 진동이 발생하지 않으며 2차 이상의 정확도를 확보할 수 있는 기법이다.

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \tag{18}$$

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \tag{19}$$

모든 시간단계 n 에서 식 (19)의 조건을 만족하는 기법을 TVD기법이라고 하며 모든 TVD기법은 단조성의 특성을 내포하고 있다.

3.1 흐름률 제한자(flux limiter) 방법

흐름률 제한자 방법을 이용한 TVD기법은 2.2절에서 소개한 WAF기법을 이용하는 방법이다. 먼저, 식 (8)의 수치흐름률을 흐름률 제한자 ϕ 를 이용하여 다시 쓰면 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned}
 f_{i+1/2}^{FL} &= \frac{1}{2}(1 + \phi_{i+1/2}) \\
 &\quad (au_i^n) + \frac{1}{2}(1 - \phi_{i+1/2})(au_{i+1}^n)
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

식 (20)은 $\phi = c$ 일 경우 식 (8)과 동일한 Lax-Wendroff기법이 되며, $\phi = \text{sign}(a)$ 일 경우 식 (4)의 풍상차분기법과 같아진다. 식 (20)의 흐름률 제한자가 식 (19)의 조건을 만족하는 상·하 경계값을 정의하기 위해 식 (21)을 이용할 수 있다(Roe, 1981b).

$$\min\{u_{i-s}^n, u_i^n\} \leq u_i^{n+1} \leq \max\{u_{i-s}^n, u_i^n\} \tag{21}$$

여기서 $s = \text{sign}(a)$ 이며 단조성 기법의 특성인 식 (17)과 같은 의미를 갖는다. 만약 $u_{i-s}^n \leq u_i^n$ 이라고 가정하면, 식 (21)는 $u_{i-s}^n \leq u_i^{n+1} \leq u_i^n$ 및 $u_{i-s}^n - u_i^n \leq u_i^{n+1} - u_i^n \leq 0$ 이 된다. 또 이 식을 $u_{i-s}^n - u_i^n$ 으로 나누면 식 (22)를 얻을 수 있으며, $u_{i-s}^n \geq u_i^n$ 인 경우에도 동일한 과정으로 식 (22)를 유도할 수 있다.

$$0 \leq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{u_{i-s}^n - u_i^n} \leq 1 \tag{22}$$

흐름률 제한자의 상류 및 하류경계는 식 (22)를 이용하는 방법과 Harten(1983)에 제시된 TVD의 특성을

이용하는 방법이 있으며 자세한 유도과정은 Hirsh(1990)이나 Toro(1999) 등의 문헌을 참고할 수 있다.

본 연구에서는 여러 가지 흐름률 제한자 함수 중에서 Toro(1999)에 의하면 가장 적절한 값을 예측하는 다음 식 (23)과 식 (24)의 제한자를 사용하였다.

$$\phi_{sa}(r, c) = \begin{cases} 1 & , \text{ for } r \leq 0 \\ 1 - 2(1 - |c|)r & , \text{ for } 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ |c| & , \text{ for } \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \\ 1 - (1 - |c|)r & , \text{ for } 1 \leq r \leq 2 \\ 2|c| - 1 & , \text{ for } r \geq 2 \end{cases} \quad (23)$$

$$\phi_{vl}(r, c) = \begin{cases} 1 & , \text{ for } r \leq 0 \\ 1 - \frac{2(1 - |c|)r}{1 + r} & , \text{ for } r \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

여기서 r 는 상류 변동량(upwind change, Δ_{upwind})과 국부 변동량(local change, Δ_{local})의 비로서 식 (25)와 같으며 ϕ_{sa} 와 ϕ_{vl} 은 Sweby(1984)에 제시된 흐름률 제한자 중 각각 SUPERBEE, VANLEER에 상응하는 함수이다.

$$r = \frac{\Delta_{upwind}}{\Delta_{local}} = \begin{cases} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} & \text{for } a > 0 \\ \frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} & \text{for } a < 0 \end{cases} \quad (25)$$

3.2 경사 제한자(slope limiter) 방법

경사 제한자 방법을 이용한 TVD기법은 2.3절에서 소개된 MUSCL기법에서 식 (10)의 경사제한자를 TVD조건에 만족하도록 제한하는 방법이다.

$$\bar{\Delta}_i = \psi_i \Delta_i \quad (26)$$

여기서 ψ_i 는 식 (27)로 정의되는 r 의 함수이다.

$$r = \frac{\Delta u_{i-1/2}}{\Delta u_{i+1/2}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} \quad (27)$$

본 연구에서는 TVD조건을 만족하는 경사 제한자 함수 중 흐름률 제한자의 ϕ_{sa} 와 ϕ_{vl} 에 상응하는 ψ_{sa} 와 ψ_{vl} 를 사용하였다.

$$\psi_{sa}(r) = \begin{cases} 0 & , \text{ for } r \leq 0 \\ 2r & , \text{ for } 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , \text{ for } \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \\ \min\{r, \psi_R, 2\} & , \text{ for } r \geq 1 \end{cases} \quad (28)$$

$$\psi_{vl}(r) = \begin{cases} 0 & , \text{ for } r \leq 0 \\ \min\left\{\frac{2r}{1+r}, \psi_R\right\} & , \text{ for } r \geq 0 \end{cases} \quad (29)$$

여기서 ψ_R 은 식 (20)과 같다.

$$\psi_R = \frac{2\beta_{i+1/2}}{1 - \omega + (1 + \omega)r}, \quad \beta_{i+1/2} = \frac{2}{1 - c} \quad (30)$$

4. 수치해석

2장과 3장에서 소개된 수치기법의 정확성과 적용성을 알아보기 위해 불연속면이 존재하지 않는 조건(test1)과 존재하는 조건(test2)의 경우에 대해 모의하였다. 그 결과를 그림 5와 그림 6에 수록하였다. 적용된 수치기법은 (a) 1차 정확도의 풍상차분기법, (b) WAF기법 및 MUSCL기법 중 $\omega = -1$ 인 경우에 해당하는 Lax-Wendroff기법, (c) 흐름률 제한자중 SUPERBEE형 제한자 ϕ_{sa} 를 이용한 방법, (d) 흐름률 제한자중 VANLEER형 제한자 ϕ_{vl} 를 이용한 방법, (e) 경사 제한자 중 SUPERBEE형 제한자 ψ_{sa} 를 이용한 방법, (f) 경사 제한자 중 VANLEER형 제한자 ψ_{vl} 를 이용한 방법 등이다.

본 연구에서 사용한 지배방정식은 식 (1)의 선형 이송방정식으로 $a = 1.0$ 을 사용하였다. 식 (31)은 불연

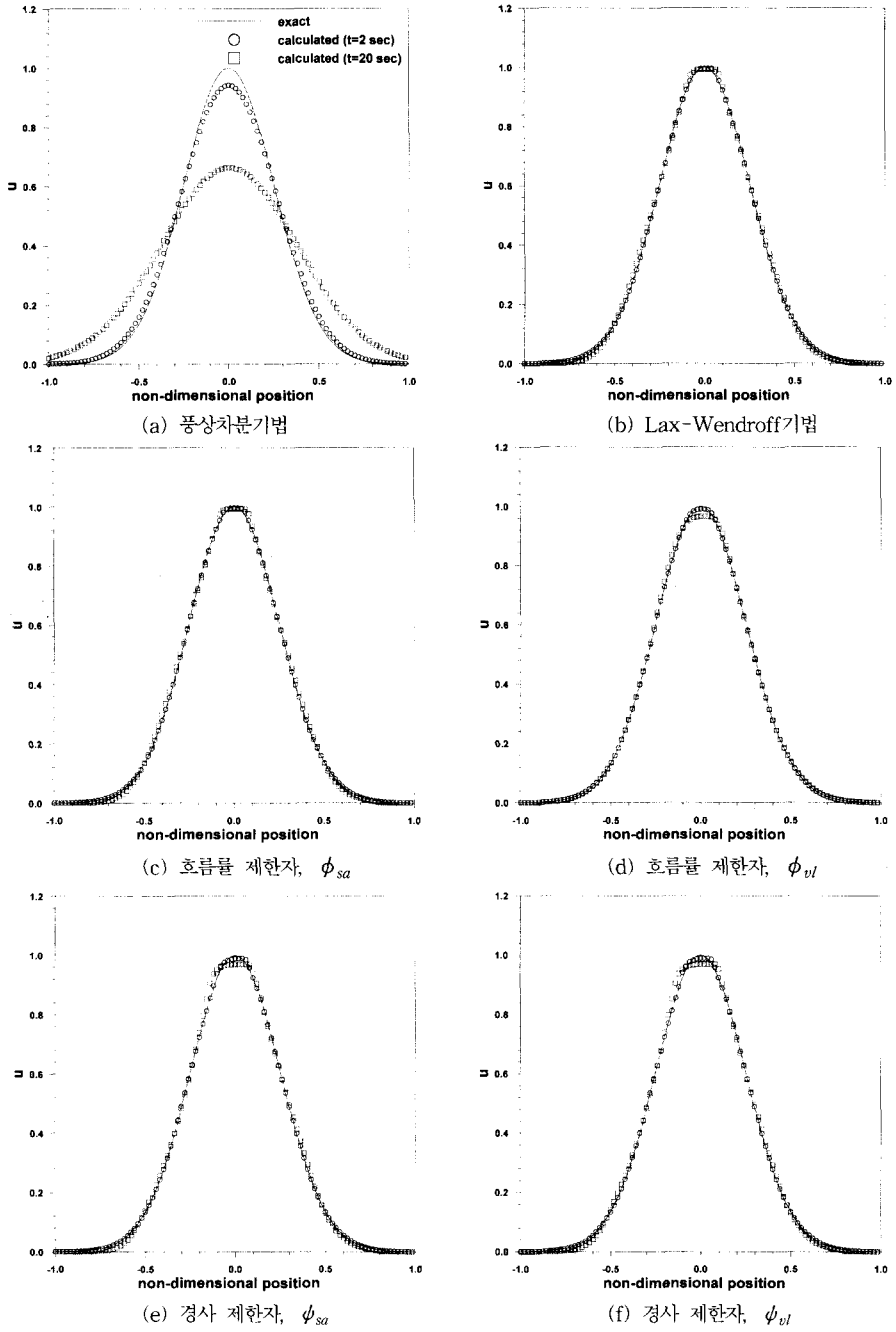
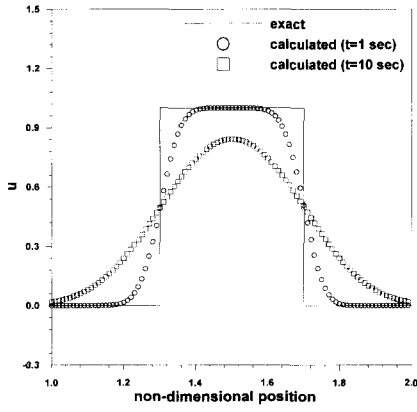


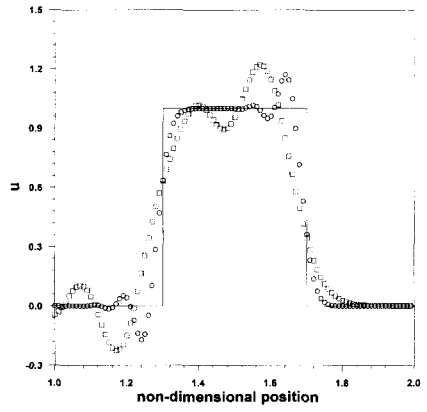
그림 5. 수치모의 결과(test1)

속면이 존재하지 않는 경우에 적용된 초기조건이며, 식 (32)는 불연속면이 존재하는 경우에 적용된 초기조건이다.

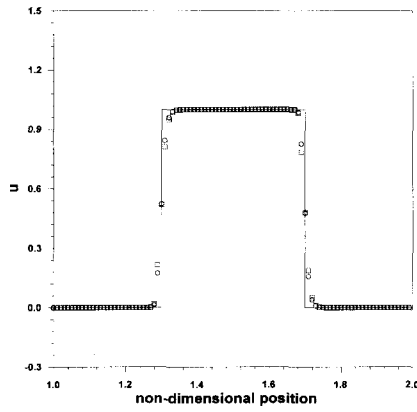
$$u(x, 0) = ae^{-\beta x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (31)$$



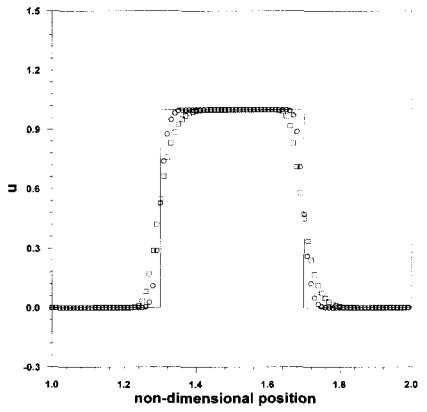
(a) 풍상차분기법



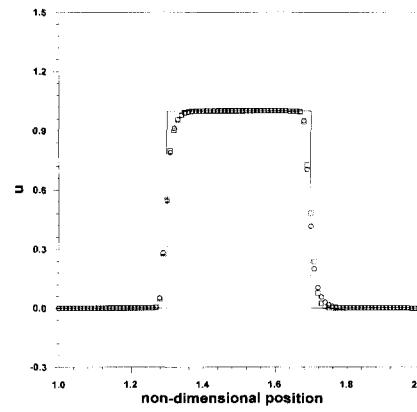
(b) Lax-Wendroff기법



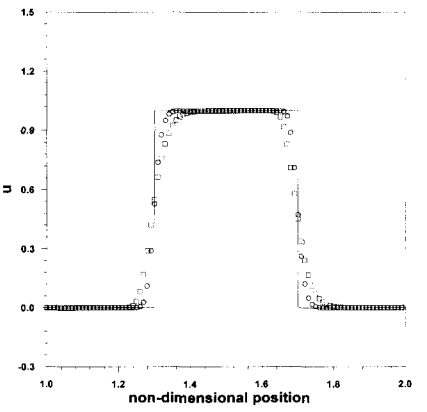
(c) 흐름률 제한자, ϕ_{sa}



(d) 흐름률 제한자, ϕ_{vl}



(e) 경사 제한자, ψ_{sa}



(f) 경사 제한자, ψ_{vl}

그림 6. 수치모의 결과(test2)

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0.3 \\ 1 & \text{for } 0.3 \leq x \leq 0.7 \\ 0 & \text{for } x \geq 0.7 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (32)$$

Test1의 경우 $\alpha = 1.0$, $\beta = 8.0$, $\Delta x = 0.2$ 를 사용되었고 test2는 $\Delta x = 0.1$ 을 사용하였다. 두 경우 모두 시간증분 Δt 의 결정은 Courant 안정조건을 0.8로 고정하여 구하였다.

그림 5와 그림 6에서 횡축은 무차원 거리로서 이송된 거리를 고려한 값이다. 그림 5로부터 1차 정확도인 풍상차분기법은 시간이 진행될수록 첨두의 값이 점차 줄어드는 소위, 수치점성 효과가 관찰되었으며, Lax-Wendroff기법은 전체적으로 정확한 예측하였으나 시간이 지날수록 첨두가 왼쪽으로 이동하는 경향이 있었다. 그림 5(c)~(f)의 TVD기법은 첨두가 다소 평평해지는 경향이 있는 것으로 조사되었으며 이는 흐름을 제한자와 경사 제한자 모두가 상·하류의 경계값을 제한하기 때문인 것으로 판단된다.

불연속 흐름이 존재하는 그림 6 중 단조성 조건인 식 (15)를 만족하는 1차 정확도 풍상차분기법은 불연속면에서 진동이 발생하지 않았지만 그림 5(a)에서와 같이 시간이 지날수록 첨두가 점차 스며들었으며 단조성 조건을 만족하지 못하는 Lax-Wendroff기법은 진동이 발생하였다. TVD기법은 모두 진동의 현상이 관찰되지는 않았으며 근사한 결과를 예측하였다. test1과 test2의 수치결과로부터 TVD기법이 뛰어난 정확성을 확보할 수 있는 것으로 예측되었으며 이 중 SUPERBEE형 흐름을 제한자 ϕ_{sa} 를 이용하는 방법을 권장한다.

5. 결 론

본 연구에서 채택한 지배방정식은 선형방정식이므로 쉽게 적용이 가능하나 비선형방정식의 경우에는 전파 속도 또는 특성속도가 방정식 자체에서 풀어야 할 미지수가 되므로 풍상차분기법에 기반한 TVD기법의 적용은 Roe기법(1981a) 등의 근사 Riemann 해가 병행되어야 하는 어려움이 따른다.

감사의 글

본 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원

(KRF-2000-041-E00600)에 의하여 연구되었기에 이에 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

- 김원(1999). 고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형의 개발. 박사학위논문, 경북대학교
- 오성택, 황승용, 이길성(1998). "흐름을 분리방법에 의한 도수의 수치해석." 대한토목학회논문집, 제18권, 제II-3호, pp. 215~221.
- 윤태훈, 이종욱(1999). "불연속흐름의 2차원 수치해석." 대한토목학회논문집, 제19권, 제II-4호, pp. 445~454.
- Billett, S.J. and Toro, E.F. (1997). "WAF-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 130, pp. 1~24.
- Courant, R., Isaacson, E., and Reeves, M. (1952). "On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences." *Communication on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 5, pp. 243~255.
- Fraccarollo, L and Toro, E.F. (1995). "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, pp. 843~864.
- Garcia-Navarro, P. and Priestley, A. (1993). "The application of an implicit TVD method for water flow modelling in channels and pipes." Numerical Analysis Internal Report 6, Department of Mathematics, University of Reading.
- Garcia-Navarro, P. and Saviron, J.M. (1992). "MacCormack's method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open channel flow." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 30, pp. 95~105.
- Harten, A. (1983). "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, pp. 357~393.
- Hirsch, C. (1990). *Numerical computation of internal and external flow-Volume 2:*

- computational methods for inviscid and viscous flows.* John Wiley & Sons Ltd.
- Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T. (1993). *Computational fluid dynamics for engineers.* Engineering Education System.
- Jha, A.K., Akiyama, J., and Ura, M. (1995). "First and second-order flux difference splitting schemes." *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 121, pp. 877~884.
- Nakatani, T. and Komura, S. (1993). "A numerical simulation of flow with hydraulic jump using TVD-MacCormack scheme." *Proceeding of XXV Congress of IAHR*, Vol. 1, pp. 9~13.
- Osher, S. (1984). "Riemann solvers, the entropy condition and difference approximations." *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 21, pp. 217~235.
- Roe, P.L. (1981a). "Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes." *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357~372.
- Roe, P.L. (1981b). *Numerical algorithms for the linear wave equation.* Technical Report 81047, Royal Aircraft Establishment, UK.
- Steger, J.L. and Warming, R.F. (1981) "Flux vector splitting of inviscid gas-dynamic equations with application to finite difference methods" *Journal of Computational Physics*, Vol. 40, pp. 263~293.
- Sweby, P. K. (1984). "High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws." *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 21, pp. 995~1101.
- Toro, E.F. (1999). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics.* Springer
- van Leer, B. (1974). "Towards the ultimate conservative difference scheme II. monotonicity and conservation combined in a second order scheme" *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, pp. 361~370.
- van Leer, B. (1977a). "Towards the ultimate conservative difference scheme III. upstream-centered finite difference schemes for ideal compressible flow." *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, pp. 263~275.
- van Leer, B. (1977b). "Towards the ultimate conservative difference scheme IV. a new approach to numerical convection." *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, pp. 276~299.

(논문번호:01-012/접수:2001.02.05/심사완료:2001.03.29)