

# 가중함수법에 의한 기계적 체결부에 존재하는 타원형 모서리균열의 혼합모드 응력확대계수

허성필<sup>†</sup> · 양원호<sup>\*</sup> · 김 철<sup>\*\*</sup>

(2000년 9월 22일 접수, 2001년 1월 9일 심사완료)

## Mixed-Mode Stress Intensity Factors for Elliptical Corner Cracks in Mechanical Joints by Weight Function Method

Sung-Pil Heo, Won-Ho Yang and Cheol Kim

**Key Words:** Weight Function Method(가중함수법), Mechanical Joint(기계적 체결부), Elliptical Corner Crack(타원형 모서리균열), Clearance(간극) Contact(접촉), Finite Element Method(유한요소법)

### Abstract

Mechanical joints such as bolted or riveted joints are widely used in structural components and the reliable determination of the stress intensity factors for corner cracks in mechanical joints is needed to evaluate the safety and fatigue life. This paper analyzes the mixed-mode stress intensity factors of surface and deepest points for quarter elliptical corner cracks in mechanical joints by weight function method and the coefficients included in weight function are determined by finite element analyses for reference loadings. The extended form of the weight function method for two-dimensional mixed-mode to three-dimensional is presented and the number of terms in weight function is determined by comparing the results for the different number of terms. The amount of clearance is an important factor in evaluating the severity of elliptical corner cracks in mechanical joints and even horizontal crack normal to the applied load is under mixed-mode in the case that clearance exists.

### 1. 서 론

항공기를 비롯한 많은 기계 구조물에 접합의 방법으로 볼트 체결 및 리벳 체결과 같은 기계적 체결이 널리 이용되고 있다. 이러한 기계적 체결부(mechanical joint)는 균열 발생의 가능성이 상대적으로 높으며 대부분 표면에서 모서리균열의 형태로 발생하여 성장하게 된다. 따라서 기계적 체결부의 파괴역학적 안전성 및 피로수명 등을 평가하기 위해서는 이러한 체결부에 존재하는 타원

형 모서리균열에 대한 정확한 응력확대계수(stress intensity factor; SIF)의 평가가 필요하다.

임의의 형상을 갖는 타원형 균열에 대한 응력확대계수는 주로 3차원 유한요소해석을 통해 구할 수 있으나 여러 하중 조건에 대한 해를 얻고자 하는 경우에는 모델 구성 및 해석에 많은 시간을 요하게 된다. 가중함수법(weight function method)은 균열 및 균열체(cracked body)의 형상에 대한 가중함수와 균열을 포함하지 않은 동일 형상의 구조물에 대한 응력장을 이용하여 효율적으로 응력확대계수를 구할 수 있는 방법이다. 균열을 포함하지 않은 모델에 대한 응력해석만을 수행하게 되므로 다양한 하중 조건에 대해서도 쉽게 응력확대계수를 구할 수 있다.

가중함수법의 적용에 관해서는 주로 2차원 균

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 성균관대학교 대학원 기계공학과

E-mail : spheo@orgio.net

TEL : (031)290-7496 FAX : (031)290-5849

<sup>\*</sup> 회원, 성균관대학교 기계공학부

<sup>\*\*</sup> 회원, 성균관대학교 대학원 기계설계학과

열<sup>(1,2)</sup> 및 3차원 타원형 균열<sup>(3,4)</sup>의 모드 I 문제에 관하여 많은 연구들이 진행되어 왔다. Fett 등은 일반적인 2차원 혼합모드 문제에 적용할 수 있는 가중함수를 제안하고 계면 근방의 균열에 대한 응력확대계수를 해석하였다.<sup>(5)</sup>

기계적 체결부에 존재하는 균열에 대한 파괴역학적 평가는 주로 2차원 균열에 대한 응력확대계수 해석이 수행되었고,<sup>(6,7)</sup> 균열 발생 초기에 해당하는 3차원 타원형 균열에 대해서는 2차원 접촉부와 타원형 균열을 동시에 고려해야 하는 어려움으로 대부분 볼트부를 고려하지 않거나 체결부에서의 접촉압력 분포를 가정하여 해석이 이루어져 왔다.<sup>(8,9)</sup> 따라서 실제 접촉부를 고려한 평가가 요구되는데, 3차원 유한요소해석은 특히 설계 초기 단계에서의 여러 하중 조건에 대한 응력확대계수의 평가나 간극(clearance)의 크기를 달리하는 반복적 해석에서 대단히 많은 시간을 요하게 된다. 가중함수법은 균열이 없는 모델의 응력해석을 바탕으로 한 접근이므로 이러한 유한요소해석의 한계를 극복할 수 있을 것이다. 저자 등은 가중함수법을 적용하여 볼트 체결부에 존재하는 2차원 균열에 대해 모드 I 응력확대계수가 최대가 되는 임계 경사각을 결정하고 간극의 크기와 균열길이에 따른 영향을 해석한 바 있다.<sup>(10)</sup>

본 연구에서는 기계적 체결부에 존재하는 1/4 타원형 모서리균열(quarter elliptical surface crack)에 대하여 가중함수법을 적용하여 혼합모드 응력확대계수를 해석하였다. 2차원 혼합모드 문제에 대한 가중함수법<sup>(5,10)</sup>을 3차원 혼합모드로 확장 적용하는 절차를 제시하였고, 가중함수법의 적용에서 항의 수에 따른 정확도를 비교 고찰하였다. 사용되는 볼트 또는 리벳의 크기에 따라 체결부에는 간극이 존재하게 되며 이러한 간극의 크기가 응력확대계수에 미치는 영향을 조사하였다.

## 2. 타원형 균열에 대한 가중함수법

### 2.1 타원형 모서리균열에 대한 가중함수법

Fig. 1과 같은 타원형 모서리균열에 대한 가중함수법의 적용에서는 작용 외력에 대해 균열이 발생할 위치에서의 2차원 응력장  $\sigma(x, z)$ 를 균열이 없는 모델에서 구하고, 이 응력장과 가중함수와의 곱을 식 (1)과 같이 전체 균열면에 대해 적분하여 타원형 경계를 따른 각 균열 선단에서의

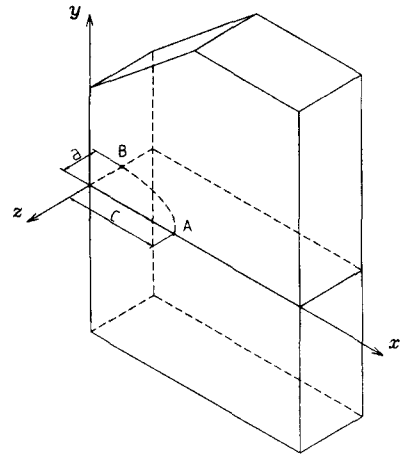


Fig. 1 Weight function method for an elliptical corner crack

응력확대계수를 구하게 된다.

$$K(\phi) = \iint_S h(x, z, a, c; \phi) \sigma(x, z) dS \quad (1)$$

식 (1)에서  $a$ 는 균열깊이,  $c$ 는 균열길이를 나타내며,  $\phi$ 는 균열 선단의 위치를 표시하는 타원매개각이다. 가중함수  $h(x, z, a, c; \phi)$ 는 기하학적 형상에는 의존하지만 작용하중에는 독립인 특성을 가지고 있기 때문에 특정의 균열 및 균열체 형상에 대해 적합한 가중함수가 결정되면 임의의 하중조건에 대해서도 식 (1)의 적분을 통해 간단하게 응력확대계수를 구할 수 있다.

타원형 균열에서는 대부분의 경우에 표면점(surface point)이나 최심점(deepest point)에서 최대 응력확대계수가 나타나며, 두 선단에서의 응력확대계수로부터 타원형 경계를 따른 응력확대계수의 범위를 예측해 볼 수 있다. 타원형 경계를 따른 각 균열 선단에서의 응력확대계수에 대한 가중함수의 개발도 있었으나,<sup>(11)</sup> 정확도와 적용성 측면에서 기존의 대부분의 연구<sup>(3,4)</sup>도 표면점과 최심점에서의 응력확대계수에 초점을 맞추고 있다. Fig. 1에서 타원형 균열의 표면점을 A, 최심점을 B라 할 때 두 균열 선단에서의 응력확대계수는 각각 식 (2), (3)과 같이 표현된다.

$$K_{(A)} = \iint_S h(x, z, a, c; \phi=0) \sigma(x, z) dS \quad (2)$$

$$K_{(B)} = \iint_S h(x, z, a, c; \phi=\pi/2) \sigma(x, z) dS \quad (3)$$

3차원 타원형 균열에 대한 가중함수법의 적용

에서는 식 (2), (3)에서와 같이 2차원 응력장 및  $x, z$ 의 함수로 표현되는 가중함수를 고려하여 면 적적분을 수행하게 된다. 그러나 많은 경우에 균열이 없는 모델에서의 응력장을 1차원으로 근사화할 수 있으며, Fig. 1에서 응력장이 두께 방향으로 일정하고,  $x$ 방향을 따라서만 변화한다고 가정하면 식 (4), (5)에서와 같이 균열 길이 방향으로의 선적분으로 응력확대계수를 구할 수 있게 된다.

$$K_{(A)} = \int_0^c h_{(A)}(x, a, c) \sigma(x) dx \quad (4)$$

$$K_{(B)} = \int_0^c h_{(B)}(x, a, c) \sigma(x) dx \quad (5)$$

## 2.2 가중함수법에 의한 타원형 모서리균열의 혼합모드 응력확대계수

경사진 균열을 포함하여 기하학적 대칭성이 존재하지 않는 일반적인 타원형 균열의 혼합모드 문제에서는 균열면상에 작용하는 수직응력  $\sigma_y$ 에 대해서도 모드 I뿐 아니라 모드 II 및 모드 III 응력확대계수가 모두 나타나며, 전단응력  $\tau_{xy}$  및  $\tau_{yz}$ 에 대해서도 모드 II, 모드 III뿐 아니라 모드 I 응력확대계수가 모두 나타난다. 타원형 균열이 존재하는 구조물에 일반적인 하중이 작용하면 균열면상에는 수직응력과 전단응력이 모두 나타나며 이 때에는 위의 경우들을 중첩하여 응력확대계수를 구할 수 있다.

타원형 모서리균열의 표면점에서는 Fig. 1의 좌표축을 기준으로  $\tau_{xy}$ 가 모드 II,  $\tau_{yz}$ 가 모드 III에 해당되며, 각 모드의 응력확대계수는 식 (6)~(8)로 표현된다.

$$K_{I(A)} = \int_0^c \{h_{I(A)}^{(\sigma)}(x, c) \sigma_y(x) + h_{I(A)}^{(\tau_{xy})}(x, c) \tau_{xy}(x) + h_{I(A)}^{(\tau_{yz})}(x, c) \tau_{yz}(x)\} dx \quad (6)$$

$$K_{II(A)} = \int_0^c \{h_{II(A)}^{(\sigma)}(x, c) \sigma_y(x) + h_{II(A)}^{(\tau_{xy})}(x, c) \tau_{xy}(x) + h_{II(A)}^{(\tau_{yz})}(x, c) \tau_{yz}(x)\} dx \quad (7)$$

$$K_{III(A)} = \int_0^c \{h_{III(A)}^{(\sigma)}(x, c) \sigma_y(x) + h_{III(A)}^{(\tau_{xy})}(x, c) \tau_{xy}(x) + h_{III(A)}^{(\tau_{yz})}(x, c) \tau_{yz}(x)\} dx \quad (8)$$

위 식에서  $\sigma_y(x)$ ,  $\tau_{xy}(x)$ ,  $\tau_{yz}(x)$ 는 균열면이 될 위치에서의 수직응력과 전단응력 분포를 나타내

며 균열이 없는 모델에 대한 응력해석으로부터 얻게 된다. 식 (6)~(8)에 포함된 9개의 가중함수는 표면점의 경우에  $x=c$ 에서의 특이성(singularity)을 고려하여 식 (9)~(11)과 같은 무한급수의 형태로 설정한다.

$$h_{I(A)}^{(\sigma)} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{I(A),n}^{(\sigma)} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{n-1/2} \quad (9)$$

$$h_{I(A)}^{(\tau_{xy})} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{I(A),n}^{(\tau_{xy})} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{n-1/2} \quad (10)$$

$$h_{I(A)}^{(\tau_{yz})} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{I(A),n}^{(\tau_{yz})} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{n-1/2} \quad (11)$$

식 (9)~(11)은 모드 I 응력확대계수에 해당하는 가중함수들이지만 모드 II, 모드 III에 해당하는 가중함수들도 같은 형태이다.

타원형 균열의 최심점에서는  $\tau_{yz}$ 가 모드 II,  $\tau_{xy}$ 가 모드 III에 해당되며, 각 모드의 응력확대계수는 식 (12)~(14)로 표현된다.

$$K_{I(B)} = \int_0^c \{h_{I(B)}^{(\sigma)}(x, c) \sigma_y(x) + h_{I(B)}^{(\tau_{xy})}(x, c) \tau_{xy}(x) + h_{I(B)}^{(\tau_{yz})}(x, c) \tau_{yz}(x)\} dx \quad (12)$$

$$K_{II(B)} = \int_0^c \{h_{II(B)}^{(\sigma)}(x, c) \sigma_y(x) + h_{II(B)}^{(\tau_{xy})}(x, c) \tau_{xy}(x) + h_{II(B)}^{(\tau_{yz})}(x, c) \tau_{yz}(x)\} dx \quad (13)$$

$$K_{III(B)} = \int_0^c \{h_{III(B)}^{(\sigma)}(x, c) \sigma_y(x) + h_{III(B)}^{(\tau_{xy})}(x, c) \tau_{xy}(x) + h_{III(B)}^{(\tau_{yz})}(x, c) \tau_{yz}(x)\} dx \quad (14)$$

식 (6)~(8), (12)~(14)는 2차원 균열의 혼합모드 문제에 대한 가중함수법<sup>(5)</sup>을 3차원 타원형 균열의 혼합모드 문제로 확장한 형태이다.

최심점의 경우에는  $x=0$ 에서의 특이성을 고려하여 각 가중함수들을 설정하며, 모드 II에 해당하는 가중함수들은 식 (15)~(17)과 같다.

$$h_{II(B)}^{(\sigma)} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{II(B),n}^{(\sigma)} \left(\frac{x}{c}\right)^{n-1/2} \quad (15)$$

$$h_{II(B)}^{(\tau_{xy})} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{II(B),n}^{(\tau_{xy})} \left(\frac{x}{c}\right)^{n-1/2} \quad (16)$$

$$h_{II(B)}^{(\tau_{yz})} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{II(B),n}^{(\tau_{yz})} \left(\frac{x}{c}\right)^{n-1/2} \quad (17)$$

식 (9)~(11), (15)~(17)의 가중함수에 포함된 미정계수들은 기준하중(reference loading)에 대한

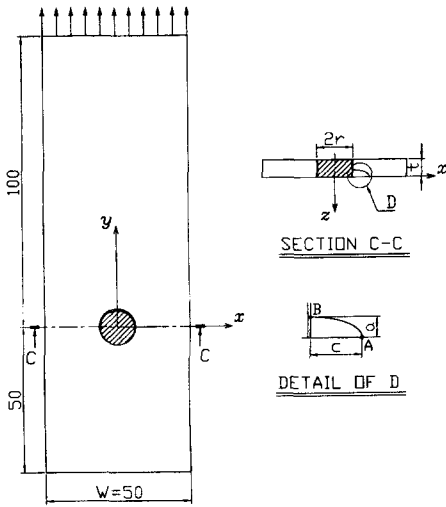


Fig. 2 Configuration of a quarter elliptical corner crack in mechanical joints

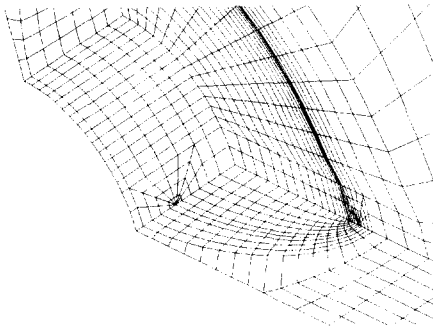


Fig. 3 Finite element mesh for symmetric quarter elliptical corner crack at a hole

응력확대계수로부터 결정할 수 있다.<sup>(3-5,10)</sup>

### 3. 혼합모드 응력확대계수 해석

#### 3.1 기계적 체결부에 존재하는 타원형 모서리 균열의 개요 및 유한요소해석

Fig. 2와 같이 볼트 체결 및 리벳 체결과 같은 기계적 체결부에 1/4타원형 모서리균열이 존재하고 있고 외부에 균일 인장하중을 받고 있는 평판에 대하여 해석을 수행하였다. 구멍의 크기는 지름 12.5mm로 고정되어 있고, 볼트의 크기를 바꾸어 구멍과 볼트 사이에 간극이 존재하도록 하였다. 사용된 재료는 탄성계수가 68.95GPa, 푸아송

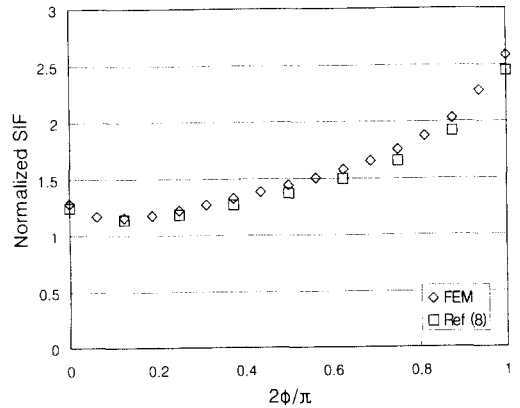


Fig. 4 Normalized stress intensity factors for symmetric quarter elliptical corner crack at a hole along the crack front

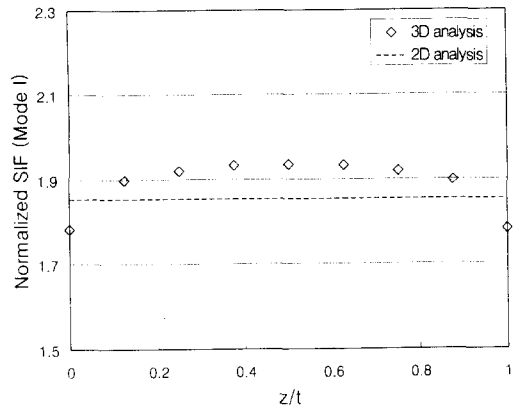


Fig. 5 Normalized stress intensity factors for a through-thickness crack in mechanical joints along the crack front

의 비가 0.25인 알루미늄이며, 유한요소해석은 상용 프로그램인 ABAQUS를 이용하였다.

유한요소해석의 타당성을 검증하기 위하여 응력집중부에 대칭으로 존재하는 1/4타원형 모서리 균열에 대해 Fig. 3과 같은 유한요소망을 구성하여 응력확대계수를 구하였다. 유한요소모델에서 균열선단에는 응력의 특이성을 표현할 수 있는 1/4절점 요소(quarter point element)를 사용하였고, 균열면 변위로부터의 응력확대계수 계산을 위하여 타원형 균열선단을 가로지르는 선이 타원에 수직하도록 요소망을 구성하였다.

Fig. 4는  $a/c=0.4$ ,  $a/t=0.6$ 인 경우에 대하여 타원

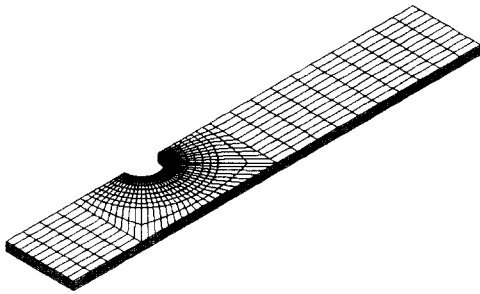


Fig. 6 Finite element mesh for an uncracked plate with a mechanical joint

형 균열 선단을 따른 응력확대계수를  $\sigma\sqrt{\pi a}$ 로 무차원화하여 나타낸 것으로 기존 연구와의 비교를 통해 타당성을 입증한 Lin과 Smith의 해석 결과<sup>(8)</sup>를 함께 나타내었다. 그림에서 두 결과가 전반적으로 잘 일치하는 것으로 보아 본 연구에서 구성한 응력집중부에 존재하는 타원형 모서리균열에 대한 유한요소망이 타당함을 입증할 수 있다.

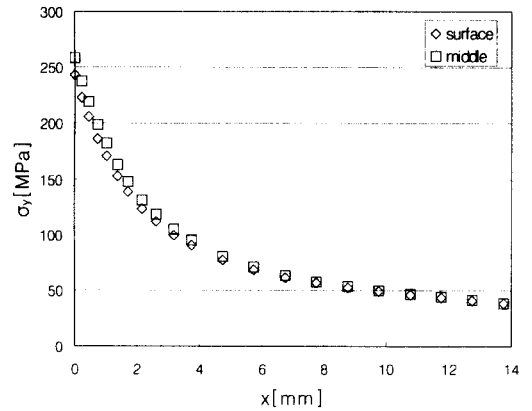
Fig. 5는 저자 등의 2차원 균열에 대한 연구<sup>(10)</sup>에서 타당성을 입증한 볼트 체결부의 관통 균열에 대해 3차원 유한요소해석을 수행하고, 두께방향으로의 응력확대계수 변화를 나타낸 것이다. 함께 나타낸 2차원 균열에 대한 결과와의 차이가 Fawaz의 연구<sup>(9)</sup> 등에서와 일치하므로 본 연구에서의 균열 및 접촉부를 포함한 3차원 유한요소해석이 타당하다고 할 수 있겠다.

### 3.2 기계적 체결부에 존재하는 타원형 모서리 균열에 대한 가중합수법의 적용

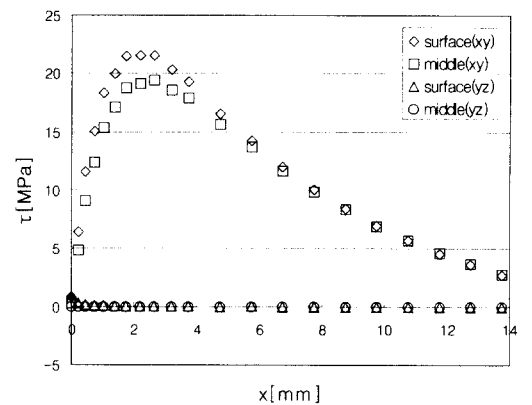
#### 3.2.1 가중합수의 결정

기계적 체결부에 존재하는 타원형 균열은 하중 조건 및 균열의 경사각 등에 따라 일반적으로 혼합모드 상태에 놓이게 되며 적합한 가중합수를 사용하여 표면점에 대해서는 식 (6)~(8), 최심점에 대해서는 식 (12)~(14)에 의해 모드 I, 모드 II, 모드 III 응력확대계수를 계산할 수 있다.

가중합수법을 적용하기 위하여 먼저 균열이 없는 모델에 대해 Fig. 6과 같은 유한요소망을 사용하여 응력해석을 수행하였다. 대칭성을 고려하여 1/4만을 모델링하였고, 볼트부는 강체 요소(rigid element)를 사용하였으며, 접촉부는 볼트부와 구멍 사이의 접촉 조건이 만족되도록 상세하게 요



(a) Normal stress distribution



(b) Shear stress distribution

Fig. 7 Stress distribution for an uncracked plate with a mechanical joint

소를 구성하였다.

Fig. 7(a), (b)는 각각 작용하중에 수직인 면에서 반지름 방향을 따른 수직응력과 전단응력 분포를 나타낸 것으로 평판의 표면에서와 중심에서의 결과를 함께 나타내었다. 그림에서와 같이 표면에서와 중심에서의 응력 차이가 크지 않고, x방향을 따른 변화가 동일한 형태로 나타나므로 본 연구에서는 균열이 없는 모델에서의 응력장을 두께 방향으로의 일정한 1차원 응력장으로 가정하여 앞장의 절차를 따라 가중합수법을 적용하였다. 또한 Fig. 7(b)에서 전단응력  $\tau_{yz}$ 는 거의 0인 값을 가지므로, 응력확대계수를 계산하기 위한 적분식에서  $\tau_{yz}$ 가 포함된 항을 고려하지 않아도 무방할 것이다.

식 (9)~(11), (15)~(17)에서 무한급수의 형태로 설정한 각 가중함수는 기존의 연구들<sup>(1~5)</sup>에서와 같이 실제 문제에서는 유한항으로 적용하게 된다. 저자 등의 2차원 균열에 대한 연구<sup>(10)</sup>에서는 3개의 항으로 구성된 가중함수를 사용하여 타당한 결과를 얻었으나, 3차원 타원형 균열에서는 Fett의 연구<sup>(12)</sup>를 바탕으로 가중함수에 포함되는 항의 수를 증가시켜가며 정확도를 비교하였다.

타원형 균열의 표면점에서의 모드 I, 모드 II, 모드 III 응력확대계수를 구하기 위해서는 식 (6)~(8)에 포함된 9개의 가중함수 중에서 앞의  $\tau_{yz}$ 에 관한 고찰을 바탕으로 6개의 가중함수를 결정해야 한다. 4개의 항으로 구성된 가중함수를 사용하는 경우에 모드 I에 포함된 2개의 가중함수는 식 (18), (19)와 같이 표현할 수 있다.

$$h_{I(A)}^{(\sigma)} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x/c}} + D_{I(A),1}^{(\sigma)} \sqrt{1-\frac{x}{c}} + D_{I(A),2}^{(\sigma)} \left(1-\frac{x}{c}\right)^{3/2} + D_{I(A),3}^{(\sigma)} \left(1-\frac{x}{c}\right)^{5/2} \right\} \quad (18)$$

$$h_{I(A)}^{(\tau_{yz})} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \left\{ D_{I(A),1}^{(\tau_{yz})} \sqrt{1-\frac{x}{c}} + D_{I(A),2}^{(\tau_{yz})} \left(1-\frac{x}{c}\right)^{3/2} + D_{I(A),3}^{(\tau_{yz})} \left(1-\frac{x}{c}\right)^{5/2} \right\} \quad (19)$$

이 가중함수에 포함된 미정계수를 결정하기 위하여 기존의 연구들<sup>(3~5,10)</sup>에서와 동일한 방법으로 균열면상에 작용하는 기준하중에 대한 응력확대계수를 미리 구해놓고, 이 하중 조건에 대하여 가중함수법을 적용함으로써 미정계수를 구하였다. 식 (20)과 같은 형태의 기준하중을 고려하였고,  $\tau_{xy}$ 에서도 같은 형태로 설정하였다.

$$\sigma_y(x) = \sigma_0 \left(1 - \frac{x}{c}\right)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (20)$$

식 (18)의 가중함수의 경우에는 3개의 미정계수를 구하기 위하여 3개의 기준하중을 고려하고 이들에 대하여 식 (21)~(23)과 같이 가중함수법을 적용한다.

$$\int_0^c h_{I(A)}^{(\sigma)}(x, c) \sigma_0 dx = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_{I(A),1}^{(\sigma)} \quad (21)$$

$$\int_0^c h_{I(A)}^{(\sigma)}(x, c) \sigma_0 \left(1 - \frac{x}{c}\right) dx = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_{I(A),2}^{(\sigma)} \quad (22)$$

$$\int_0^c h_{I(A)}^{(\sigma)}(x, c) \sigma_0 \left(1 - \frac{x}{c}\right)^2 dx = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_{I(A),3}^{(\sigma)} \quad (23)$$

여기서  $F_{I(A),1}^{(\sigma)}$ ,  $F_{I(A),2}^{(\sigma)}$ ,  $F_{I(A),3}^{(\sigma)}$ 는 세 기준하중에 대한 무차원 응력확대계수로, 균열면상에 각각의  $\sigma_y(x)$ 를 가하여 유한요소해석을 통해 얻을 수 있다.  $Q$ 는 타원의 형상계수로 타원형 균열 선단에서의 응력확대계수를 무차원화 시키는 데 일반적으로 사용된다. 이들 적분을 수행하여 정리하면 식 (24)~(26)과 같은 연립방정식이 세워지며 이를 풀면 가중함수  $h_{I(A)}^{(\sigma)}$ 에 포함된 3개의 미정계수를 구할 수 있게 된다.

$$D_{I(A),1}^{(\sigma)} + \frac{3}{5} D_{I(A),2}^{(\sigma)} + \frac{3}{7} D_{I(A),3}^{(\sigma)} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}Q} \sqrt{\frac{a}{c}} F_{I(A),1}^{(\sigma)} - 3 \quad (24)$$

$$D_{I(A),1}^{(\sigma)} + \frac{5}{7} D_{I(A),2}^{(\sigma)} + \frac{5}{9} D_{I(A),3}^{(\sigma)} = \frac{5\pi}{2\sqrt{2}Q} \sqrt{\frac{a}{c}} F_{I(A),2}^{(\sigma)} - \frac{5}{3} \quad (25)$$

$$D_{I(A),1}^{(\sigma)} + \frac{7}{9} D_{I(A),2}^{(\sigma)} + \frac{7}{11} D_{I(A),3}^{(\sigma)} = \frac{7\pi}{2\sqrt{2}Q} \sqrt{\frac{a}{c}} F_{I(A),3}^{(\sigma)} - \frac{7}{5} \quad (26)$$

타원형 균열의 최심점에서의 모드 I, 모드 II, 모드 III 응력확대계수를 구하기 위해서는 표면점에서와 유사하게 식 (12)~(14)에 포함된 가중함수들을 결정해야 하며 모드 II에 포함된 2개의 가중함수는 식 (27), (28)과 같이 표현된다.

$$h_{II(B)}^{(\sigma)} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \left\{ D_{II(B),1}^{(\sigma)} \sqrt{\frac{x}{c}} + D_{II(B),2}^{(\sigma)} \left(\frac{x}{c}\right)^{3/2} + D_{II(B),3}^{(\sigma)} \left(\frac{x}{c}\right)^{5/2} \right\} \quad (27)$$

$$h_{II(B)}^{(\tau_{xy})} = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \left\{ D_{II(B),1}^{(\tau_{xy})} \sqrt{\frac{x}{c}} + D_{II(B),2}^{(\tau_{xy})} \left(\frac{x}{c}\right)^{3/2} + D_{II(B),3}^{(\tau_{xy})} \left(\frac{x}{c}\right)^{5/2} \right\} \quad (28)$$

식 (28)의 가중함수의 경우 표면점에서와 유사하게 기준하중에 대해 가중함수법을 적용하면 식 (29)~(31)과 같은 연립방정식을 세울 수 있고, 이를 풀면 가중함수  $h_{II(B)}^{(\sigma)}$ 에 포함된 3개의 미정계수를 구할 수 있다.

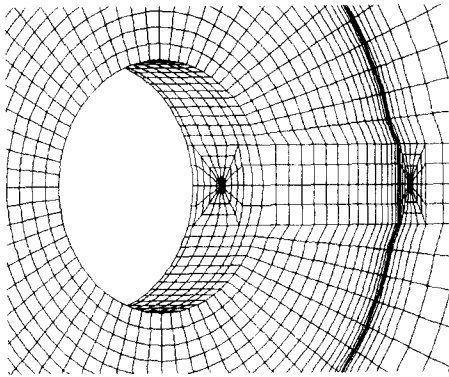


Fig. 8 Finite element mesh for a quarter elliptical corner crack in mechanical joints

$$D_{II(B),1}^{(\tau_{\theta})} + \frac{3}{5} D_{II(B),2}^{(\tau_{\theta})} + \frac{3}{7} D_{II(B),3}^{(\tau_{\theta})} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2Q}} \sqrt{\frac{a}{c}} F_{II(B),1}^{(\tau_{\theta})} \quad (29)$$

$$D_{II(B),1}^{(\tau_{\theta})} + \frac{3}{7} D_{II(B),2}^{(\tau_{\theta})} + \frac{5}{21} D_{II(B),3}^{(\tau_{\theta})} = \frac{15\pi}{4\sqrt{2Q}} \sqrt{\frac{a}{c}} F_{II(B),2}^{(\tau_{\theta})} \quad (30)$$

$$D_{II(B),1}^{(\tau_{\theta})} + \frac{1}{3} D_{II(B),2}^{(\tau_{\theta})} + \frac{5}{33} D_{II(B),3}^{(\tau_{\theta})} = \frac{105\pi}{16\sqrt{2Q}} \sqrt{\frac{a}{c}} F_{II(B),3}^{(\tau_{\theta})} \quad (31)$$

각 가중함수에 포함된 미정계수를 결정하기 위해서는 유한요소해석을 통해 기준하중에 대한 응력확대계수를 구해야 한다. Fig. 8은 해석에 사용된 유한요소망을 나타낸 것으로 이러한 기준 응력확대계수(reference stress intensity factor)를 구하기 위해서와 가중함수법 적용의 타당성을 입증하기 위한 해석에 사용된다.  $a/c=0.4$ 인 균열 형상에 대하여 세 기준하중에 대한 표면점에서의 무차원 응력확대계수들을 Table 1에 나타내었다. 표에서 전단응력과 모드 I 과의 커플링 효과를 나타내는  $F_{I(A)}^{(\tau_{\theta})}$ 항과, 수직응력과 모드 II 및 모드 III와의 커플링 효과를 나타내는  $F_{II(A)}^{(\sigma)}$ ,  $F_{III(A)}^{(\sigma)}$  항은 0 또는 거의 0에 가까운 값을 나타내며 이는 최심점의 경우에도 마찬가지이다. Fett 등의 연구<sup>(5)</sup>에서와 같은 계면 근방의 균열이나 기하학적 비대칭성이 심한 문제의 경우에는 이러한 값들이 고려되어야 하겠으나, 표의 결과로부터 기계적 체결부에 존재하는 타원형 모서리균열에서는 이 값들

Table 1 Reference stress intensity factors at the surface point of elliptical cracks

$a/t$	0.2	0.4	0.6	0.8
$F_{I(A),1}^{(\sigma)}$	0.8272	0.9266	1.120	1.388
$F_{I(A),2}^{(\sigma)}$	0.1567	0.2191	0.3346	0.4963
$F_{I(A),3}^{(\sigma)}$	0.07881	0.1240	0.2048	0.3157
$F_{I(A),1}^{(\tau_{\theta})}$	0	9.55E-5	6.37E-5	0
$F_{I(A),2}^{(\tau_{\theta})}$	0	1.27E-4	8.49E-5	0
$F_{I(A),3}^{(\tau_{\theta})}$	0	6.37E-6	0	0
$F_{II(A),1}^{(\sigma)}$	-6.37E-6	2.55E-5	7.64E-5	0
$F_{II(A),2}^{(\sigma)}$	0	1.81E-5	5.73E-5	1.11E-4
$F_{II(A),3}^{(\sigma)}$	-3.82E-6	1.34E-5	4.25E-5	1.11E-4
$F_{II(A),1}^{(\tau_{\theta})}$	0.9233	0.9338	0.9756	1.067
$F_{II(A),2}^{(\tau_{\theta})}$	0.2178	0.2249	0.2500	0.3020
$F_{II(A),3}^{(\tau_{\theta})}$	0.1175	0.1226	0.1401	0.1762
$F_{III(A),1}^{(\sigma)}$	0	0	0	0
$F_{III(A),2}^{(\sigma)}$	0	0	0	0
$F_{III(A),3}^{(\sigma)}$	0	0	0	-8.91E-4
$F_{III(A),1}^{(\tau_{\theta})}$	-0.4255	-0.4318	-0.4498	-0.5085
$F_{III(A),2}^{(\tau_{\theta})}$	-0.1072	-0.1106	-0.1211	-0.1485
$F_{III(A),3}^{(\tau_{\theta})}$	-0.05665	-0.05893	-0.06635	-0.08450

을 계수에 포함하는  $h_{I(A)}^{(\tau_{\theta})}$ ,  $h_{II(A)}^{(\sigma)}$ ,  $h_{III(A)}^{(\sigma)}$ 는 응력확대계수 계산에서 고려하지 않아도 될 것이며 이는 2차원 균열<sup>(10)</sup>에서와 같은 절차이다.

### 3.2.2 가중함수법 적용의 타당성 검토

Table 2와 Table 3은 서로 다른 균열 형상과 간극 조건을 갖는 타원형 표면균열에 대하여 가중함수에 포함되는 항의 수를 3개에서 6개로 변화시켜가며 앞의 절차에 따라 계산한 모드 I, 모드 II, 모드 III 응력확대계수를 무차원화하여 나타낸 것이다. 기준하중에 대한 유한요소해석 결과를 바탕으로 가중함수의 계수를 구하고, 균열이 없는 모델에 대한 응력해석을 통해서 얻은 균열면상의 수직응력과 전단응력을 적절한  $x$ 의 다항식으로 곡선적합(curve fitting)한 후 이들의 값을 적분하여 계산한 결과이다. 표에서 FEM은 타당성 검토의 기준이 되는 값으로 Fig. 8의 타원형 모서리균열과 접촉부를 포함한 모델에 대해 유한요소해석을 수행하여 응력확대계수를 구한 결과를 나타낸다. 본 연구의 가중함수법의 적용에서는 균

**Table 2** Normalized stress intensity factors for a quarter elliptical corner crack in mechanical joints due to the number of terms included in weight function (clearance=1%,  $a/c=0.4$ ,  $a/t=0.6$ )

Uncracked stress		at surface				at middle				averaged				FEM
No. of terms		3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5	6	
Surface point	$F_{I(A)}$	1.741	1.680	1.684	1.686	1.814	1.748	1.752	1.754	1.778	1.714	1.718	1.720	1.623
	$F_{II(A)}$	0.2165	0.2329	0.2207	0.2269	0.2039	0.2200	0.2095	0.2144	0.2102	0.2264	0.2151	0.2207	0.2145
	$F_{III(A)}$	-0.1264	-0.0874	-0.1151	-0.1032	-0.1219	-0.0836	-0.1073	-0.0981	-0.1242	-0.0855	-0.1112	-0.1006	-0.1007
Deepest point	$F_{I(B)}$	3.963	4.161	4.254	4.290	4.213	4.428	4.526	4.562	4.088	4.295	4.390	4.426	4.533
	$F_{II(B)}$	-0.3985	-0.3680	-0.3411	-0.3290	-0.3569	-0.3222	-0.2976	-0.2881	-0.3777	-0.3451	-0.3194	-0.3085	-0.3412
	$F_{III(B)}$	-0.7307	-0.6095	-0.4673	-0.3792	-0.6570	-0.5189	-0.3890	-0.3193	-0.6938	-0.5642	-0.4281	-0.3492	-0.3218

**Table 3** Normalized stress intensity factors for a quarter elliptical corner crack in mechanical joints due to the number of terms included in weight function (clearance=5%,  $a/c=0.8$ ,  $a/t=0.4$ )

Uncracked stress		at surface				at middle				averaged				FEM
No. of terms		3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5	6	
Surface point	$F_{I(A)}$	2.929	2.951	2.947	2.947	3.077	3.100	3.096	3.096	3.003	3.025	3.021	3.022	2.958
	$F_{II(A)}$	0.5582	0.5626	0.5616	0.5618	0.4884	0.4919	0.4912	0.4913	0.5233	0.5273	0.5264	0.5265	0.5227
	$F_{III(A)}$	-0.2865	-0.2627	-0.2655	-0.2653	-0.2484	-0.2290	-0.2311	-0.2310	-0.2674	-0.2458	-0.2483	-0.2482	-0.2460
Deepest point	$F_{I(B)}$	4.543	4.638	4.653	4.654	4.796	4.894	4.909	4.910	4.670	4.766	4.781	4.782	4.887
	$F_{II(B)}$	-0.3018	-0.2586	-0.2525	-0.2521	-0.2484	-0.2126	-0.2081	-0.2078	-0.2751	-0.2356	-0.2303	-0.2300	-0.2527
	$F_{III(B)}$	-0.4516	-0.2723	-0.2376	-0.2343	-0.3635	-0.2151	-0.1893	-0.1870	-0.4076	-0.2437	-0.2135	-0.2106	-0.2057

열이 없는 모델에 대한 응력장을 1차원으로 가정하였는데, Fig. 7에서와 같이 평판의 표면에서와 중심에서 약간 다르게 나타나며 Table 2, 3에 표면과 중심에서의 응력장을 사용하였을 때와 이들의 평균 응력장을 사용하였을 때의 결과를 함께 나타내었다.

전반적으로 모드 I 응력확대계수는 중심에서의 응력장을 사용하였을 때가 상대적으로 크게 평가되고, 모드 II와 모드 III 응력확대계수는 표면에서의 응력장을 사용하였을 때가 크게 평가된다. 이는 Fig. 7에서와 같이 수직응력은 중심에서, 전단응력은 표면에서 상대적으로 크게 나타나기 때문이다. 따라서 엄밀하게는 2차원 응력장을 고려하여 면적적분을 통해 응력확대계수를 계산해야 하겠으나 적용성을 고려하여 1차원 응력장으로 가정하는 경우에는 표면에서와 중심에서의 응력을 평균한 응력장을 사용하는 것이 합리적이라 할 수 있을 것이다.

가중함수에 포함되는 항의 수에 따라서는 표면점과 최심점에서의 모든 응력확대계수에 대한 전체적인 정확도를 고려한다면  $a/c=0.4$ 인 경우에는 6개의 항을,  $a/c=0.8$ 인 경우에는 5개의 항을 가지

는 가중함수를 사용하는 것이 합당하다고 판단된다. 기존의 타원형 균열에 대한 대부분의 연구<sup>(3,4)</sup>들에서처럼 모드 I 응력확대계수에만 초점을 맞춘다면 항의 수를 4개 정도로 하여도 유한요소해석 결과와 대략 5% 오차 이내의 결과를 얻을 수 있겠으나, 특히 최심점에서의 모드 III의 경우에는 대단히 큰 오차를 가지게 된다. 물론 항의 수를 많이 포함시키면 기준 하중에 대한 해석이 추가되나, 주된 관심인 최심점에서의 모드 I 응력확대계수도 항의 수가 증가함에 따라 정확도가 증가하고, 또한 균열 형상에 관계없는 공통적인 적용을 위하여 본 연구에서는 6개의 항을 포함하는 가중함수를 사용하였다.

Fig. 9는 본 연구에서 결정한 가중함수 중에서  $a/c=0.8$ ,  $a/t=0.4$ 인 타원형 균열의 표면점에 대한 가중함수를 나타낸 것이다. 각 모드에 대한 가중함수 중에서 실제 응력확대계수 계산에 참여한  $h_{I(A)}^{(a)}$ ,  $h_{II(A)}^{(r)}$ ,  $h_{III(A)}^{(r)}$ 에  $\sqrt{c}$ 를 곱하여 무차원화된 형태로 나타내었다. 표면점에서는 그림에서와 같이 모드 I, 모드 II 가중함수가  $x=c$ 에서 특이성을 갖게 된다. 가중함수의 그래프는 다른 균열 형상에서도 유사하게 나타나며, 최심점에 대한 가중



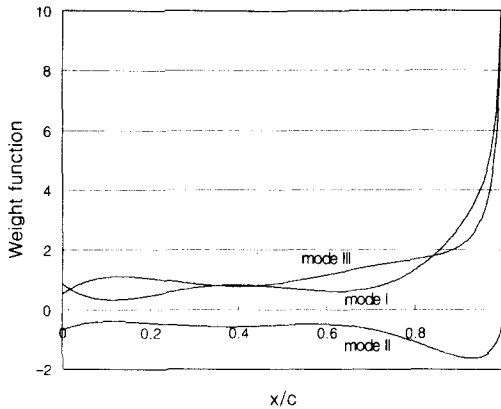


Fig. 9 Weight functions for the surface point of an elliptical corner crack in mechanical joint

함수의 경우에는 모드 I, 모드 III 가중함수가  $x=0$ 에서의 특이성을 갖는 형태가 된다.

Table 4는 두 가지 균열 형상 및 간극 조건에 대하여 가중함수법과 유한요소법으로 구한 표면점과 최심점에서의 모드 I, 모드 II, 모드 III 응력확대계수를 나타낸 것이다. Tables 2~4로부터 간극의 크기 및 균열 형상에 상관없이 가중함수법에 의한 결과가 유한요소해석에 의한 결과와 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 3차원 타원형 균열과 접촉부를 포함하는 유한요소해석은 가중함수법의 적용에 필요한 균열이 없는 모델에 대한 응력해석에 비하여 대략 20~30배 정도의 해석 시간이 소요되므로, 표에 나타난 정도의 오차 범위 내에서의 응력확대계수 해석은 간극의 크기를 달리하는 등의 여러 하중조건에 대한 해석에서 충분한 적용성을 갖는다고 할 수 있겠다.

Tables 2~4에서 모드 I에 비하여 모드 II 및 모드 III 응력확대계수의 오차가 다소 크게 나타나고 있는데, 이는 균열이 없는 모델에서의 전단응력분포가 수직응력에 비해 평판의 표면에서와 중심에서의 차이가 크기 때문으로 생각된다. 따라서 균열이 없는 모델에 대한 응력장을 엄밀하게 2차원으로 고려하여 면적적분을 수행하는 가중함수법을 적용하게 된다면 정확도를 더욱 향상시킬 수 있을 것으로 예측된다.

3.3 간극의 크기에 따른 응력확대계수

가중함수법에 의해 기계적 체결부에 존재하는 수평한 타원형 모서리균열에 대하여 혼합모드 응

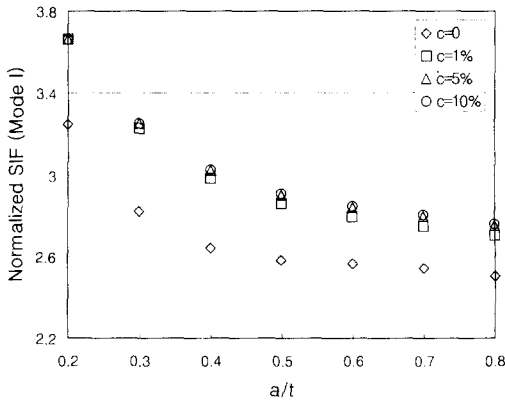
Table 4 Normalized stress intensity factors for quarter elliptical corner cracks in mechanical joints by weight function method and finite element method

Position	Mode	$a/c=0.4, a/t=0.6$ clearance=5%		$a/c=0.8, a/t=0.4$ clearance=1%	
		WFM	FEM	WFM	FEM
Surface point	$F_{I(A)}$	1.750	1.671	2.982	2.905
	$F_{II(A)}$	0.2880	0.2825	0.4604	0.4672
	$F_{III(A)}$	-0.1326	-0.1311	-0.2183	-0.2219
Deepest point	$F_{I(B)}$	4.406	4.509	4.834	4.959
	$F_{II(B)}$	-0.3533	-0.3602	-0.2123	-0.2525
	$F_{III(B)}$	-0.3854	-0.3512	-0.1967	-0.1980

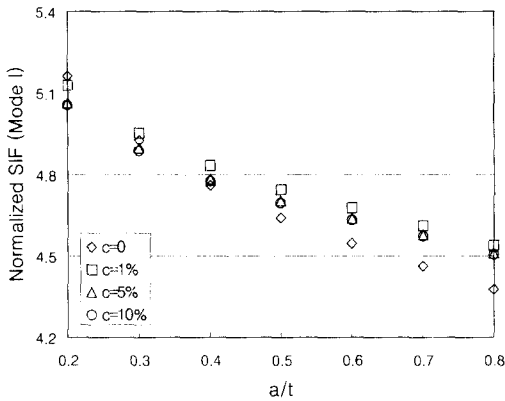
력확대계수 해석을 수행하고,  $a/c=0.8$ 인 경우에 균열깊이에 따른 결과를 Fig. 10에 나타내었다. Fig. 10(a)와 10(b)는 각각 표면점에서와 최심점에서의 모드 I 응력확대계수이고, 나머지 모드에 대해서는 대표적으로 Fig. 10(c)에 최심점에서의 모드 II 응력확대계수를 나타내었다. 실제 체결부에는 사용되는 볼트 또는 리벳의 크기에 따라 간극이 존재하게 되며 이러한 간극의 크기가 응력확대계수에 미치는 영향을 조사하기 위해서 간극이 없는 경우와 간극의 크기가 구멍 지름의 1%, 5%, 10%인 경우에 대해 응력확대계수를 구하였다.

표면점에서의 모드 I 응력확대계수는 2차원 균열<sup>(10)</sup>에서와 유사하게 간극이 없는 경우에 비하여 간극이 1% 존재하는 경우가 상대적으로 크게 증가하나 간극이 존재하는 경우들끼리는 크게 차이가 나지 않는다. 최심점에서는 균열깊이가 작아짐에 따라 간극이 없는 경우의 모드 I 응력확대계수가 상대적으로 커지는 경향을 가진다. 이는 Fig. 11에 나타난 균열 없는 모델의 응력 분포에서 최심점의 응력확대계수에 큰 영향을 미치는  $x=0$ 에서의 응력이 간극이 없는 경우가 가장 크게 나타나며 균열깊이가 작을 때는 이 영향이 크게 반영되기 때문으로 생각된다. 또한  $x=0$  근방에서 간극이 1%일 때의 응력장이 가장 크게 나타나고 있으며, Fig. 10(b)에서 전반적으로 이 경우의 응력확대계수가 가장 크게 나타남을 알 수 있다. 따라서 기계적 체결부에 대한 파괴역학적 평가에서는 간극의 크기가 중요한 인자가 되며, 이에 대한 정확한 고려가 필요함을 알 수 있다.

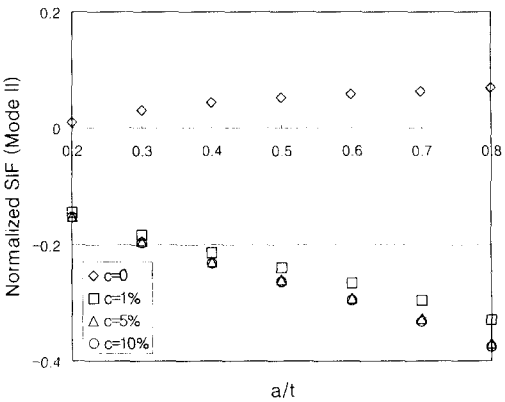
표면점 및 최심점에서의 모드 II 및 모드 III 응



(a) Mode I SIF at surface point



(b) Mode I SIF at deepest point



(c) Mode II SIF at deepest point

Fig. 10 Stress intensity factors due to the amount of clearance

력확대계수는 Fig. 10(c)에서와 대체로 유사한 경

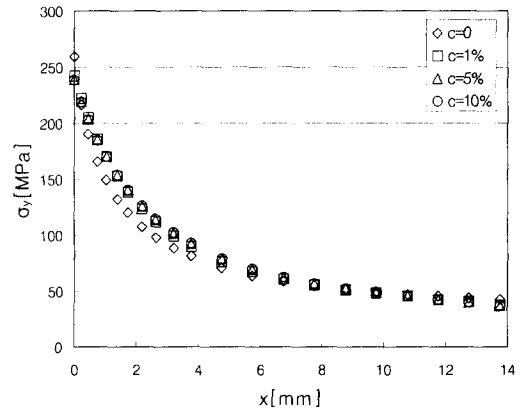


Fig. 11 Normal stress distribution for an uncracked plate due to the amount of clearance

향을 보이며, 그림에서와 같이 기계적 체결부에 간극이 존재하는 경우에는 수평한 모서리균열, 즉 작용하중에 수직인 균열일지라도 혼합모드 상태에 놓이게 됨을 알 수 있다. 이로부터 3차원 타원형 모서리균열에서도 2차원 균열<sup>(10)</sup>에서와 마찬가지로 특정의 경사각에서 모드 I 응력확대계수가 최대가 되는 가장 위험한 상황에 놓일 수 있음을 예측해 볼 수 있다.

4. 결론

가중함수법에 의해 기계적 체결부에 존재하는 1/4타원형 모서리균열의 표면점과 최심점에서의 혼합모드 응력확대계수를 해석하였다. 2차원 혼합모드 문제에 대한 기존의 가중함수법을 3차원 혼합모드로 확장 적용하여 그 타당성을 입증하였다. 가중함수법의 적용에서 1차원 응력장을 사용한 선적분을 통해 응력확대계수를 구하였고, 유한요소해석을 통해 균열면상에 작용하는 기준하중에 대한 응력확대계수를 구하고 이로부터 가중함수의 미정계수들을 결정하였다.

본 연구에서는 모드 I, 모드 II, 모드 III 응력확대계수 모두에 대한 정확도를 고려하여 가중함수 설정에서의 항의 수에 따른 결과를 비교 고찰하여 적절한 항의 수를 결정하였다. 또한 균열이 없는 모델에 대한 응력장 고찰을 통해 정확도를 더욱 향상시킬 수 있는 가능성을 제시하였다.

타원형 균열의 표면점에서는 간극의 존재에 의해 모드 I 응력확대계수가 상대적으로 크게 증가

하나, 간극의 크기는 거의 영향을 미치지 않으며, 최심점에서는 균열깊이에 따라 다른 영향을 나타낸다. 따라서 기계적 체결부 존재하는 모서리균열에 대한 파괴역학적 평가에서 간극의 크기가 중요한 인자임을 알 수 있다. 체결부에 간극이 존재하는 일반적인 경우에는 작용하중에 수직인 타원형 균열일지라도 혼합모드 상태가 된다.

## 후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Glinka, G. and Shen, G., 1991, "Universal Features of Weight Functions for Cracks in Mode I," *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 40, No. 6, pp. 1135~1146.
- (2) Wu, X. R. and Carlsson, A. J., 1991, "*Weight Functions and Stress Intensity Factor Solutions*," Pergamon Press, New York.
- (3) Wang, X. and Lambert, S. B., 1995, "Stress Intensity Factors for Low Aspect Ratio Semi-elliptical Surface Cracks in Finite-thickness Plates Subjected to Nonuniform Stresses," *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 51, No. 4, pp. 517~532.
- (4) Kiciak, A., Glinka, G., Eman, M. and Shiratori, M., 1998, "Weight Functions and Stress Intensity Factors for Corner Quarter-elliptical Crack in Finite Thickness Plate Subjected to In-plane Loading," *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 60, No. 2, pp. 221~238.
- (5) Fett, T., Munz, D. and Tilscher, M., 1997, "Weight Functions for Sub-Interface Cracks," *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 3, pp. 393~400.
- (6) Cartwright, D. J. and Parker, A. P., 1982, "Opening Mode Stress Intensity Factor for Cracks in Pin-loads Joints," *Int. J. of Fracture*, Vol. 18, No. 1, pp. 65~78.
- (7) Ju, S. H., 1997, "Stress Intensity Factors for Cracks in Bolted Joints," *Int. J. of Fracture*, Vol. 84, pp. 129~141.
- (8) Lin, X. B. and Smith, R. A., 1999, "Stress Intensity Factors for Corner Cracks Emanating from Fastener Holes under Tension," *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 62, pp. 535~553.
- (9) Fawaz, S. A., 1998, "Application of the Virtual Crack Closure Technique to Calculate Stress Intensity Factors for Through Cracks with an Elliptical Crack Front," *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 59, No. 3, pp. 327~342.
- (10) 허성필, 양원호, 정기현, 2000, "가중합수법에 의한 볼트 체결부 균열의 임계 경사각 결정에 관한 연구," 대한기계학회논문집 A권, 제24권, 제9호, pp. 2344~2352.
- (11) Wang, X. and Lambert, S. B., 1995, "Local Weight Functions for Semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates," *Theoret. Appl. Fracture Mechanics*, Vol. 23, pp. 199~208.
- (12) Fett, T., 1992, "Direct Determination of Weight Functions from Reference Loading Cases and Geometrical Conditions," *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 42, No. 3, pp. 435~444.