

이방성 이종재 V-노치 균열의 고유벡터계수 해석에 대한 상반일 경로 적분법의 적용

조 상 봉[†] · 노 흥 래^{*}

(2000년 12월 28일 접수, 2001년 7월 9일 심사완료)

Application of the Reciprocal Work Contour Integral Method to the Analysis of Eigenvector Coefficients for V-notched Cracks in Anisotropic Dissimilar Materials

Sang-Bong Cho and Hong-Rae Roh

Key Words: Reciprocal Work Contour Integral Method(상반일 경로 적분법), Anisotropic Dissimilar Materials(이방성 이종재료), V-notched Crack(V-노치 균열), Eigenvalue and Eigenvector(고유치와 고유벡터), Eigenvector Coefficient(고유벡터 계수).

Abstract

This paper examines that it is possible to apply RWCIM for determining eigenvector coefficients associated with eigenvalues for V-notched cracks in anisotropic dissimilar materials using the complex stress function. To verify the RWCIM algorithm, two tests will be shown. First, it is performed to ascertain whether predicted coefficients associated with eigenvectors are obtained exactly. Second, it makes an examination of the state of stresses for FEM and RWCIM according to a number of eigenvectors at a location far away from the v-notched crack tip.

1. 서 론

여러 공업분야에서 이방성 재료인 복합재료의 사용이 많아지고, 또한 신소재의 개발과 더불어 이종재료 간의 접합 및 집착 구조물도 많아지고 있다. 이종재료 접합 구조물의 접합계면에는 응력의 불연속이나, 접합계면 V-노치 선단에서의 응력 특이성으로 인한 계면균열이 일어난다. 이에 대한 강도평가법이 시급히 요구된다.

이종재료 내의 V-노치 균열문제의 파괴역학적 인자(parameter)에 대한 연구로는 응력특이성(고유치) 및 응력강도계수(고유벡터)에 관한 연구로 나

눌 수 있다.

등방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제의 응력 특이성에 관한 연구는 Bogy^(1,2)를 시작으로 Hein과 Erdogan⁽³⁾등이 켈린변환법을 이용하여 연구하였고, Carpenter와 Byers⁽⁴⁾는 상반일 경로 적분법(reciprocal work contour integral method: RWCIM)을 이용하여 등방성 이종재 V-노치 균열문제의 응력 강도계수를 연구한 바 있다.

이방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제에 대한 응력특이성에 관하여 Ting과 Chou,⁽⁵⁾ Zwiers 등⁽⁶⁾ Ting⁽⁷⁾ 등이 일함 윌리엄 형태(one-tearm William's type)의 복소응력함수를 사용하여 연구하였다. 따라서, 복소응력함수를 이용한 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열 근방에서의 응력특이성⁽⁸⁾과 이방성과 유사등방성재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성⁽⁹⁾ 등의 고유치에 관한 연구가 있고, 응력강도 계수에 관한 연구는 최근 Labossiere와 Dunn⁽¹⁰⁾의

[†] 책임저자, 회원, 경남대학교 기계자동화공학부

E-mail : sbcho@kyungnam.ac.kr

TEL : (055)249-2620 FAX : (055)249-2617

^{*} 회원, 경남대학교 대학원 기계설계학과

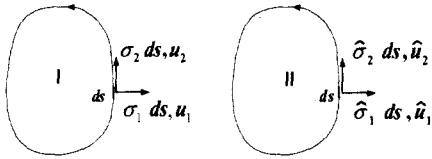


Fig. 1 System I and System II

연구가 보이나 아직 미흡한 상태이다. 본 논문에서는 이미 발표한 바 있는 이방성 이중재 V-노치 균열문제의 고유치에 대한 연구⁽⁸⁾에 이어 고유벡터계수를 구하기 위하여 상반일 경로 적분법의 적용 가능성을 검토하고자 한다.

2. 상반일 경로 적분법(RWCIM)⁽⁴⁾

Fig. 1에서와 같이 평형상태에 놓여 있는 두께 t의 선형 탄성체에 서로 다른 두 하중 계가 작용하고 있는 경우를 생각해 보자. 하중 계를 I와 II라 하면 베티(Betti)의 상반일의 원리는 식 (1)과 같다.

$$\int_C \sum_{i=1}^2 (\sigma_i \widehat{u}_i - \widehat{\sigma}_i u_i) ds = \int_C T ds = 0 \quad (1)$$

여기서, $T = \sum_{i=1}^2 (\sigma_i \widehat{u}_i - \widehat{\sigma}_i u_i)$ 이다. 첨자 1과 2는 각각 표면력과 변위의 경로에 대한 법선과 접선 방향 성분을 표시한다.

Fig. 2의 V-노치 문제에 식 (1)을 적용하면 폐곡선 C는 식 (2)와 같다.

$$C = C_\epsilon + C'' + C' + C''' \quad (2)$$

식 (2)에서 곡선 C'와 C''는 표면력이 영(zero)이므로 식 (2)로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\int_{C'} T ds = - \int_{C_\epsilon} T ds \quad (3)$$

외부 경로 C'는 반 시계 방향의 적분경로이고, 내부 경로 C_ε는 시계 방향의 적분 경로이다. 내부 경로에서 -C_ε의 적분 방향은 반 시계 방향을 뜻한다. 또한, 식 (3)은 적분이 적분 경로에 독립임을 의미하고 있다.

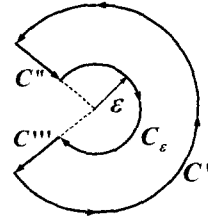


Fig. 2 V-notched configuration to which Betti's law is applied

상반일 경로 적분법에서 계 I의 경로 C_ε을 따르는 표면력과 변위 σ_i, u_i는 고유치 λ₁에서 λ_n까지에 대한 고유치와 고유벡터를 사용한 이론치를 이용하고, 계 II의 경로 C'을 따르는 표면력과 변위는 유한요소 해석결과를 이용한다.

또한 계 II에서의 경로 C_ε와 C'을 따르는 표면력과 변위 $\widehat{\sigma}_i, \widehat{u}_i$ 는 -λ₁에서 -λ_n까지의 고유치와 고유벡터를 사용하여 구한 이론치이다. 음의 고유치 즉, -λ₁에서 -λ_n의 표면력과 변위는 단지 지배미분방정식⁽⁸⁾을 만족하는 해이고 실제의 표면력과 변위로는 사용될 수 없다.⁽⁴⁾

이와 같이 상반일의 원리를 이용하여 λ₁에서 λ_n까지의 고유치에 대응하는 고유벡터를 구하는 것이 상반일 경로 적분법이다.

3. 이방성 이중재료 내의 V-노치 균열문제에 대한 고유벡터

3.1 복소수 고유치에 대한 응력장과 변위장
이방성 이중재료에 대한 응력함수는 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.⁽⁸⁾

$$U(z) = 2Re[A_1 z_1^{\lambda+1} + B_1 z_1^{\bar{\lambda}+1} + A_2 z_2^{\lambda+1} + B_2 z_2^{\bar{\lambda}+1}] \quad (4)$$

여기서, $z_i = x + \mu_i y$, $\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$ 이고 α_i와 β_i는 실수이다. 계수 A₁, B₁, A₂, B₂는 복소수이다.

식 (4)의 복소응력함수 형태로로부터 다음과 같은 복소수 고유치에 대한 응력장과 변위장을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{yy} = 2\text{Re}[U_{\bar{1}}'' + U_{\bar{2}}''] \quad (5)$$

$$\sigma_{xx} = 2\text{Re}[\mu_{\bar{1}}^2 U_{\bar{1}}'' + \mu_{\bar{2}}^2 U_{\bar{2}}''] \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = -2\text{Re}[\mu_{\bar{1}} U_{\bar{1}}'' + \mu_{\bar{2}} U_{\bar{2}}''] \quad (7)$$

$$u_{ix} = 2\text{Re}[p_{\bar{1}} U_{\bar{1}}' + p_{\bar{2}} U_{\bar{2}}'] \quad (8)$$

$$u_{iy} = 2\text{Re}[q_{\bar{1}} U_{\bar{1}}' + q_{\bar{2}} U_{\bar{2}}'] \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} U_{\bar{1}} &= A_{\bar{1}} z_{\bar{1}}^{\lambda+1} + B_{\bar{1}} z_{\bar{1}}^{\bar{\lambda}+1} \\ U_{\bar{2}} &= A_{\bar{2}} z_{\bar{2}}^{\lambda+1} + B_{\bar{2}} z_{\bar{2}}^{\bar{\lambda}+1} \\ p_{\bar{1}} &= a_{\bar{1}1} \mu_{\bar{1}}^2 + a_{\bar{1}2} - a_{\bar{1}6} \mu_{\bar{1}} \\ p_{\bar{2}} &= a_{\bar{1}1} \mu_{\bar{2}}^2 + a_{\bar{1}2} - a_{\bar{1}6} \mu_{\bar{2}} \\ q_{\bar{1}} &= a_{\bar{1}2} \mu_{\bar{1}} + \frac{a_{\bar{1}2}}{\mu_{\bar{1}}} - a_{\bar{1}6} \\ q_{\bar{2}} &= a_{\bar{1}2} \mu_{\bar{2}} + \frac{a_{\bar{1}2}}{\mu_{\bar{2}}} - a_{\bar{1}6} \end{aligned} \quad (10)$$

이고, 아래 첨자 $j=1, 2$ 는 재료 1, 2를 의미하며, 위 첨자 '는 1차 미분을 ''는 2차 미분을 의미한다. a_{jmn} 는 콤플라이언스(compliance)이다.

3.2 복소수 고유치에 대한 고유벡터

Fig. 3과 같은 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제에 대한 경계조건과 연속조건은 다음과 같다.

$$\theta = -\theta_1 \text{ 에서 } \sigma_{1\theta\theta} = 0, \sigma_{1r\theta} = 0 \quad (11)$$

$$\theta = 0 \text{ 에서 } \sigma_{1\theta\theta} = \sigma_{2\theta\theta}, \sigma_{1r\theta} = \sigma_{2r\theta} \quad (12)$$

$$u_{1r} = u_{2r}, u_{1\theta} = u_{2\theta} \quad (13)$$

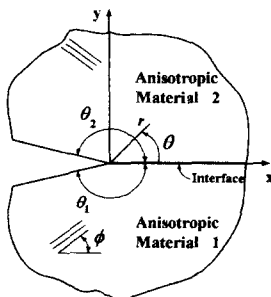


Fig. 3 V-notched crack in anisotropic dissimilar materials

$$\theta = \theta_2 \text{ 에서 } \sigma_{2\theta\theta} = 0, \sigma_{2r\theta} = 0 \quad (14)$$

이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 극좌표계로 변환된 응력과 변위장을 식 (11)에서 식 (14)까지의 경계조건과 연속조건에 대입하여 다음의 고유치와 고유벡터 식을 얻을 수 있다.

$$[D(\lambda)]\{A\} = 0 \quad (15)$$

$$\{A\} = [A_{11} \bar{B}_{11} A_{12} \bar{B}_{12} A_{21} \bar{B}_{21} A_{22} \bar{B}_{22}]^T \quad (16)$$

$$\{0\} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (17)$$

$$[D(\lambda)] = \begin{bmatrix} [t_1] & [0] \\ [s_1] & [s_2] \\ [u_1] & [u_2] \\ [0] & [t_2] \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서, $[D(\lambda)]$ 의 구성성분은 다음과 같이 주어진다.

$$[t_j] = \begin{bmatrix} d_{\bar{1}} & d_{\bar{2}} & d_{\bar{3}} & d_{\bar{4}} \\ d_{\bar{5}} & d_{\bar{6}} & d_{\bar{7}} & d_{\bar{8}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$d_{\bar{1}} = \{\cos(e_j) + \mu_{\bar{1}} \sin(e_j)\}^{\lambda+1}$$

$$d_{\bar{2}} = \{\cos(e_j) + \bar{\mu}_{\bar{1}} \sin(e_j)\}^{\lambda+1}$$

$$d_{\bar{3}} = \{\cos(e_j) + \mu_{\bar{2}} \sin(e_j)\}^{\lambda+1}$$

$$d_{\bar{4}} = \{\cos(e_j) + \bar{\mu}_{\bar{2}} \sin(e_j)\}^{\lambda+1}$$

$$d_{\bar{5}} = \{\sin(e_j) - \mu_{\bar{1}} \cos(e_j)\} \{\cos(e_j) + \mu_{\bar{1}} \sin(e_j)\}^{\lambda}$$

$$d_{\bar{6}} = \{\sin(e_j) - \bar{\mu}_{\bar{1}} \cos(e_j)\} \{\cos(e_j) + \bar{\mu}_{\bar{1}} \sin(e_j)\}^{\lambda}$$

$$d_{\bar{7}} = \{\sin(e_j) - \mu_{\bar{2}} \cos(e_j)\} \{\cos(e_j) + \mu_{\bar{2}} \sin(e_j)\}^{\lambda}$$

$$d_{\bar{8}} = \{\sin(e_j) - \bar{\mu}_{\bar{2}} \cos(e_j)\} \{\cos(e_j) + \bar{\mu}_{\bar{2}} \sin(e_j)\}^{\lambda}$$

여기서, $e_1 = -\theta_1, e_2 = \theta_2$ 이고,

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[s_j] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_{\bar{1}} & \bar{\mu}_{\bar{1}} & \mu_{\bar{2}} & \bar{\mu}_{\bar{2}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[u_j] = \begin{bmatrix} p_{\bar{1}} & \bar{p}_{\bar{1}} & p_{\bar{2}} & \bar{p}_{\bar{2}} \\ q_{\bar{1}} & \bar{q}_{\bar{1}} & q_{\bar{2}} & \bar{q}_{\bar{2}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

식 (15)에 대해 유용한 해를 얻는 조건은

$$|D(\lambda)| = 0 \quad (23)$$

이고, 여기서 $|D(\lambda)|$ 는 행렬 $[D]$ 의 행렬식이다. 이 행렬식의 해가 이방성 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 고유치가 되고 각 고유치에 대한 고유벡터가 비자명 해이다. 또한, 식 (23)의 특성방정식의 근을 구하면 실수 고유치뿐만 아니라 복소수 고유치를 얻게 되므로 복소수 고유치에 대한 고유벡터와 실수 고유치에 대한 고유벡터를 구하여야 한다.

먼저 식 (23)의 특성방정식의 근이 복소수 고유치를 가질 경우에 대한 고유벡터에 대해 알아보자. 식 (23)에서 복소수 고유치 λ_m 을 가질 경우 식 (15)을 다음과 같이 행렬을 분할할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [D_{11}] & [D_{12}] \\ 1 \times 1 & 1 \times 7 \\ [D_{21}] & [D_{22}] \\ 7 \times 1 & 7 \times 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A_{11m}} \\ \overline{B_{11m}} \\ A_{12m} \\ \overline{B_{12m}} \\ A_{21m} \\ \overline{B_{21m}} \\ A_{22m} \\ \overline{B_{22m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

식 (24)으로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$[D_{21}]\{A_{11m}\} + [D_{22}] \begin{bmatrix} \overline{B_{11m}} \\ A_{12m} \\ \overline{B_{12m}} \\ A_{21m} \\ \overline{B_{21m}} \\ A_{22m} \\ \overline{B_{22m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{B_{11m}} \\ A_{12m} \\ \overline{B_{12m}} \\ A_{21m} \\ \overline{B_{21m}} \\ A_{22m} \\ \overline{B_{22m}} \end{bmatrix} = -[D_{22}]^{-1}[D_{21}]\{A_{11m}\} = \begin{bmatrix} Y_{(1)} \\ Y_{(2)} \\ Y_{(3)} \\ Y_{(4)} \\ Y_{(5)} \\ Y_{(6)} \\ Y_{(7)} \end{bmatrix} \{A_{11m}\} \quad (26)$$

식 (26)로부터 복소수 고유치에 대한 재료 1과

재료 2의 고유벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{bmatrix} A_{11m} \\ \overline{B_{11m}} \\ A_{12m} \\ \overline{B_{12m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Y_{(1)} \\ Y_{(2)} \\ Y_{(3)} \end{bmatrix} \{A_{11m}\} = [E_1]\{A_{11m}\} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} A_{21} \\ \overline{B_{21m}} \\ A_{22m} \\ \overline{B_{22m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{(4)} \\ Y_{(5)} \\ Y_{(6)} \\ Y_{(7)} \end{bmatrix} \{A_{11m}\} = [E_2]\{A_{11m}\} \quad (28)$$

여기서,

$$\{A_{11m}\} = [1 \quad j] \begin{bmatrix} Re[A_{11m}] \\ Im[A_{11m}] \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} Re[A_{11m}] \\ Im[A_{11m}] \end{bmatrix} \quad (29)$$

식 (27) ~ (29)로부터 복소수 고유치 λ_m 에 대한 응력과 변위는 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u_{jr} \\ u_{j\theta} \\ \sigma_{jrr} \\ \sigma_{jr\theta} \\ \sigma_{j\theta\theta} \end{bmatrix} = 2Re\{[G_j]\} \begin{bmatrix} A_{j1m} \\ \overline{B_{j1m}} \\ A_{j2m} \\ \overline{B_{j2m}} \end{bmatrix} = 2Re\{[G_j][E_j][F]\} \begin{bmatrix} Re[A_{11m}] \\ Im[A_{11m}] \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$= [C_j(\lambda_m)] \begin{bmatrix} Re[A_{11m}] \\ Im[A_{11m}] \end{bmatrix}$$

여기서, λ_m 은 m 번째의 복소수 고유치를 의미한다. 8개의 고유벡터 $A_{11m}, \overline{B_{11m}}, A_{12m}, \overline{B_{12m}}, A_{21m}, \overline{B_{21m}}, A_{22m}, \overline{B_{22m}}$ 는 A_{11m} 로 표현됨을 식 (27)과 (28)에서 알 수 있다. 따라서, 식 (30)에서 $[C_j(\lambda_m)]$ 는 응력과 변위를 m 번째의 복소수 고유치 λ_m 에 대응하는 고유벡터의 실수부 계수 $Re[A_{11m}]$ 와 허수부 계수 $Im[A_{11m}]$ 로 표현할 수 있는 행렬이다.

3.3 실수 고유치에 대한 응력장과 변위장

이방성 이중재료에서 고유치 λ 가 실수일 때 식 (4)의 복소응력함수는 다음과 같이 표현되어야 한다.

$$U(z) = 2\text{Re}[A_1 z_1^{\lambda+1} + A_2 z_2^{\lambda+1}] \quad (31)$$

식 (31)의 복소응력함수 형태로부터 다음과 같은 실수 고유치에 대한 응력과 변위장을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{xx} = 2\text{Re}[\mu_1^2 U_1'' + \mu_2^2 U_2''] \quad (32)$$

$$\sigma_{yy} = 2\text{Re}[U_1'' + U_2''] \quad (33)$$

$$\sigma_{xy} = -2\text{Re}[\mu_1 U_1'' + \mu_2 U_2''] \quad (34)$$

$$u_x = 2\text{Re}[p_1 U_1' + p_2 U_2'] \quad (35)$$

$$u_y = 2\text{Re}[q_1 U_1' + q_2 U_2'] \quad (36)$$

여기서,

$$U_1 = A_1 z_1^{\lambda+1} \quad (37)$$

$$U_2 = A_2 z_2^{\lambda+1} \quad (38)$$

이다.

이방성 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 극좌표계로 변환된 응력과 변위장을 식 (11)에서 식 (14)까지의 경계조건과 연속조건에 대입하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$[D(\lambda)]\{Ar\} = \{0\} \quad (39)$$

여기서,

$$\{Ar\} = [A_{11} \overline{A_{11}} A_{12} \overline{A_{12}} A_{21} \overline{A_{21}} A_{22} \overline{A_{22}}]^T \quad (40)$$

$$\{0\} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (41)$$

이며, $[D(\lambda)]$ 은 식 (18)과 동일하다.

식 (39)에 대해 유용한 해를 얻는 조건은

$$|D(\lambda)| = 0 \quad (42)$$

이고, 여기서 $|D(\lambda)|$ 는 행렬 $[D]$ 의 행렬식이다.

3.4 실수 고유치에 대한 고유벡터

식 (23)의 특성방정식의 근이 실수 고유치를 가질 경우에 대한 고유벡터에 대해 알아보자.

실수 고유치 λ_n 을 가질 경우 식 (39)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} [D(\lambda_n)]\{Ar_n\} &= [D(\lambda_n)][U]\{ar_n\} \\ &= [Dr(\lambda_n)]\{ar_n\} \\ &= \{0\} \end{aligned} \quad (43)$$

여기서,

$$\{Ar_n\} = [U]\{ar_n\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}[A_{11n}] \\ \text{Im}[A_{11n}] \\ \text{Re}[A_{12n}] \\ \text{Im}[A_{12n}] \\ \text{Re}[A_{21n}] \\ \text{Im}[A_{21n}] \\ \text{Re}[A_{22n}] \\ \text{Im}[A_{22n}] \end{bmatrix}$$

이다.

식 (39)을 식 (24)에서와 같이 복소수 고유치의 경우와 같은 방법으로 실수 고유치 λ_n 에 대한 응력과 변위를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_{jr} \\ u_{j\theta} \\ \sigma_{jrr} \\ \sigma_{jr\theta} \\ \sigma_{j\theta\theta} \end{Bmatrix} &= 2\text{Re}[[Gr_j]] \begin{Bmatrix} A_{j1n} \\ A_{j2n} \\ A_{j2n} \end{Bmatrix} \\ &= 2\text{Re}[Gr_j][U_j][Er_j] \text{Re}[A_{11n}] \\ &= [Cr_j(\lambda_n)]\text{Re}[A_{11n}] \end{aligned} \quad (44)$$

여기서, λ_n 은 n 번째의 복소수 고유치를 의미한다. 8개의 고유벡터 $A_{11n} \overline{A_{11n}} A_{12n} \overline{A_{12n}} A_{21n} \overline{A_{21n}} A_{22n} \overline{A_{22n}}$ 는 $\text{Re}[A_{11n}]$ 으로 되며, $[Cr_j(\lambda_n)]$ 는 응력과 변위를 n 번째의 복소수 고유치 λ_n 에 대응하는 고유벡터의 실수부 계수 $\text{Re}[A_{11n}]$ 만으로 표현할 수 있는 행렬이다.

따라서, 이방성 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 변위와 응력들은 복소수 고유치에 대한 응력

과 변위식 (30)과 실수 고유치에 대한 응력과 변위 식 (44)으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{u_{jr} \ u_{j\theta} \ \sigma_{jrr} \ \sigma_{j\theta\theta} \ \sigma_{j\theta r}\}^T = \sum_{i=1}^m [Cr_j(\lambda_i)] \{Re[A_{11i}]\} + \sum_{i=1}^m [C_j(\lambda_i)] \{Re[A_{11i}] \ Im[A_{11i}]\}^T \quad (45)$$

4. 수치 해석 및 고찰

먼저, 상반일 경로 적분법 프로그램의 신뢰성을 검토하고자 유한요소 해석결과를 이용할 응력과 변위에, 고유벡터 계수를 임의로 가정하여 계산한 응력과 변위를 대신에 사용하여 가정한 고유벡터 계수를 찾아내는지를 검토한다.

Fig. 4의 해석모델에서 재료 1과 2의 물성치는 Table 1과 같으며, 쉐기각도 $\theta_1 = 170^\circ$, $\theta_2 = 170^\circ$, 1재료의 주축 1과 x축이 이루는 회전각도 $\phi_1 = 45^\circ$, 2재료의 주축 1과 x축이 이루는 회전각도 $\phi_2 = 30^\circ$ 이다. 평면응력(plane stress) 상태로 해석하여 두 개의 고유치를 얻었다. 응력과 변위들은 두 개의 고유치에 대한 고유벡터의 함으로 얻어지므로, 이들 각 고유치에 대한 고유벡터의 계수들을 가정하고 식 (45)에 대입하여 응력과 변위들을 구할 수 있다. Fig. 2의 외부 경로 C에서 유한요소해석 결과 값을 이용하는 대신에 가정하여 구한 응력과 변위를 상반일 경로 적분법 프로그램에 적용시켜 해석한다. 각 고유치에 대한 가정한 고유벡터 계수가 RWCIM법으로 찾아낸 결과와 잘 일치함을 Table 2에서 볼 수 있다.

다음으로, 이방성 이중재료 내의 V-노치 균열을 가진 해석모델로부터 고유치를 구하여 상반일 경로 적분법 프로그램에 적용시킴으로서 각 고유치에 대한 고유벡터 계수에 대한 신뢰성을 검토하고자 한다.

Fig. 4의 모델에서 재료 1과 2의 물성치는 Table 1과 같으며, 해석조건은 평면응력상태이며 앞서 검토한 모델과 모두 동일하다. 그러나, 이번에는 외부 경로에서 유한요소해석 결과 값을 직접 이용하여 해석한다.

Table 3에 응력특이성을 나타내는 고유치 λ_1 부터 5개까지의 고유치에 대응하는 무차원화한 고유벡터계수의 RWCIM결과만을 나타내었지만, 실제 해석에서는 고유치 12개를 사용하였다. 그리고 무차원은 다음과 같이 하였다.

$$\text{무차원 실수 고유벡터계수} = \frac{Re[A_{11n}]}{\sigma(\pi \cdot a)^{1-Re(\lambda)}} \quad (46)$$

$$\text{무차원 허수 고유벡터계수} = \frac{Im[A_{11n}]}{\sigma(\pi \cdot a)^{1-Re(\lambda)}} \quad (47)$$

또한, 외부 경로 C_3 인 $r/a=0.5$ 를 따르는 위치에서의 응력과 변위는 유한요소 해석 결과 값은

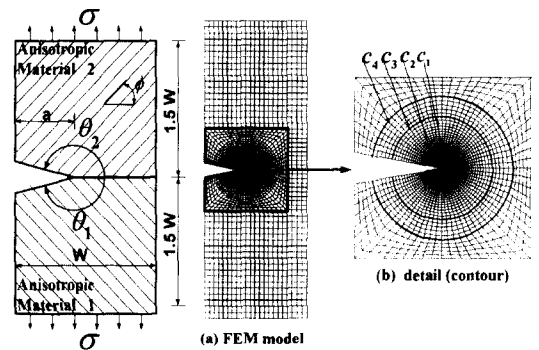


Fig. 4 Plate with V-notched crack in anisotropic dissimilar materials

Table 1 Material properties of configuration

	Material 1	Material 2
E_{11}	6.0 GPa	0.6 GPa
E_{22}	2.5 GPa	0.25 GPa
G_{12}	1.0 GPa	0.1 GPa
ν_{12}	0.29	0.29
θ	-170 °	170 °
ϕ	45 °	30 °

Table 2 Verification of programing detail for RWCIM

Eienvector	Eigenvalue	Associated coefficient	Assumed value	coefficient value by RWCIM
A_{111}	0.5271+ <i>i</i> 0.0955	RA_{111}	2.0	1.9998
A_{111}	0.5271+ <i>i</i> 0.0955	IA_{111}	2.5	2.4994
A_{112}	1.1074	RA_{112}	-1.5	-1.50081

사용하였다. 응력과 변위는 식 (45)과 같이 표현되고, 실수 고유치 중에는 반드시 1이 존재한다. 실수 고유치 1은 강체회전을 표현하는 고유치이므로 고려하지 않아도 된다.⁽⁴⁾ Fig. 5에 무차원화한 반경방향 응력 σ_r/σ 의 유한요소 해석 결과 값과 RWCIM으로 첫 번째 고유치 λ_1 에서 λ_{10} 까지 고유치의 수를 증가시키면서 구한 값을 나타낸 것이다. 첫 번째 복소수 고유치 λ_1 만으로 구한 응력은 외부 경로 C_3 인 $r/a=0.5$ 에서 유한요소해석 결과와 차이가 많이 나는 것을 볼 수 있다. 그러나, 고유치 수가 증가함에 따라 응력분포는 유한요소 해석 결과 값에 접근해 감을 볼 수 있다. 또한, 결과를 나타내지는 않았지만, $r/a=0.1$ 에서는 고유치 3개의 합으로도 유한요소 값에 접근하는 결과를 확인할 수 있었고, r/a 이 커지는 경우는 고유치의 수를 많이 해야 접근하였다.

Table 4는 내부 경로 C_ϵ 인 $\epsilon/a=0.025$ 와 외부 경로 C_3 의 $r/a=0.5$ 를 따르는 위치에서 고유치 수를 증가시키면서 해석한 무차원화한 고유벡터계수 결과를 나타낸 것이다. 첫 번째 복소수 고유치에 대한 고유벡터계수는 실수부 계수와 허수부 계수로 얻어진다. 다음으로 고유치 2개를 사용하여 즉, 첫 번째 복소수와 두 번째 실수 고유치에 대한 고유벡터계수를 계산하였다. 이와 같이 고유치 수를 증가시켜 계산한 고유벡터계수들은 고유치의 수에 민감하지 않고 안정된 값을 구할 수 있음을 Table 4에서 볼 수 있다.

Fig. 6은 내부 경로 $C_\epsilon=0.000025$ 로부터 $C_\epsilon=0.25$ 사이에서 고유치의 수에 대한 고유벡터의 민감도를 나타내고 있다. 7개의 고유치에 대한 고유벡터 계수가 내부 경로 $C_\epsilon=0.025$ 로부터 $C_\epsilon=0.25$ 사이에서 안정됨을 보여 주고 있다.

Table 5는 Fig. 4의 모델에서 쐐기각도, $\theta_1 = \theta_2$ 가 130. 에서 180. 로 변화하는 경우에 대한 응력 특이성을 가지는 고유치와 대응하는 고유벡터계수의 해석결과를 나타낸 것이다. 고유벡터계수는 접합계면 균열에서 응력강도계수 혹은 에너지 해방률과 대응한다. 이와 같은 고유치와 고유벡터계수의 해석결과는 접합계면의 강도평가법을 확립하는데 기초자료로 활용될 수 있을 것이다.

Table 3 Coefficients associated with each eigenvector

Eigenvector	Eigenvalue (λ)	Associated coefficient	Normalized Coefficient value
A_{111}	0.5271+i0.0955	RA_{111}	0.6376E-02
A_{111}	0.5271+i0.0955	IA_{111}	-0.2358E-01
A_{112}	1.1074	RA_{112}	-0.8249E-02
A_{113}	1.5818+i0.0749	RA_{113}	0.9477E-01
A_{113}	1.5818+i0.0749	IA_{113}	0.2677E-01
A_{114}	1.9964	RA_{114}	0.5478E-01
A_{115}	2.2204	RA_{115}	-0.11128

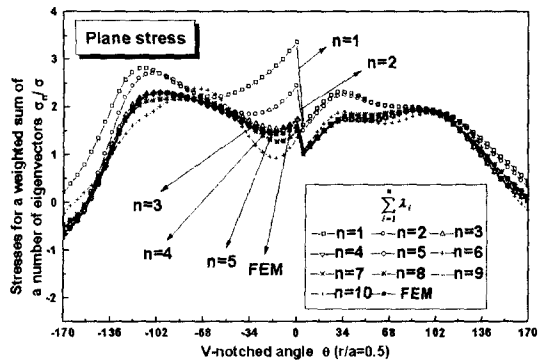


Fig. 5 Comparison of the state of stress for RWCIM and FEM

Table 4 Insensitivity of the eigenvector coefficients on the number of eigenvalues

Number of eigen-values	Normalized eigenvector coefficients on eigenvalues (λ)							
	$\lambda_1=0.5272+i0.0956$		$\lambda_2=1.1075$	$\lambda_3=1.5819+i0.0749$	$\lambda_4=1.9965$	$\lambda_5=2.2204$	$\lambda_6=2.5825$	
	Re[A_{111}]	Im[A_{111}]	Re[A_{112}]	Re[A_{113}]	Im[A_{113}]	Re[A_{114}]	Re[A_{115}]	Re[A_{116}]
1	0.6376×10^{-2}	-0.2359×10^{-1}						
2	0.6376×10^{-2}	-0.2359×10^{-1}	-0.8258×10^{-2}					
3	0.6376×10^{-2}	-0.2359×10^{-1}	-0.8258×10^{-2}	0.9467×10^{-1}	0.2665×10^{-1}			
4	0.6376×10^{-2}	-0.2359×10^{-1}	-0.8258×10^{-2}	0.9467×10^{-1}	0.2665×10^{-1}	0.5531×10^{-1}		
5	0.6376×10^{-2}	-0.2359×10^{-1}	-0.8258×10^{-2}	0.9467×10^{-1}	0.2665×10^{-1}	0.5531×10^{-1}	0.5089×10^{-5}	
6	0.6376×10^{-2}	-0.2359×10^{-1}	-0.8258×10^{-2}	0.9467×10^{-1}	0.2665×10^{-1}	0.5531×10^{-1}	0.5002×10^{-5}	0.3239×10^{-1}

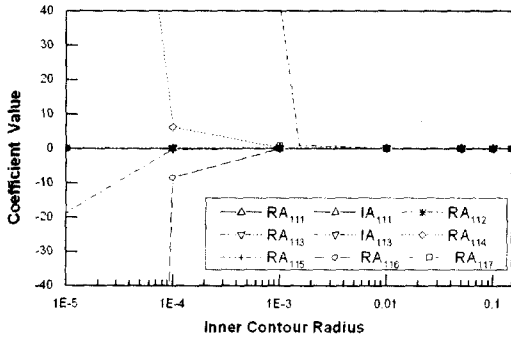


Fig. 6 Effect of inner contour radius on eigenvector coefficients

Table 5 Singular eigenvector coefficients for various wedge angles(θ)

Wedge angle (θ)	Eigenvalue (λ)	Associated coefficient	Normalized coefficient value
180	0.5+i0.0927	Re[A ₁₁₁]	0.4171
		Im[A ₁₁₁]	0.6864
175	0.5133+i0.0947	Re[A ₁₁₁]	0.6326 × 10 ⁻¹
		Im[A ₁₁₁]	-0.4192 × 10 ⁻¹
170	0.5272+i0.0956	Re[A ₁₁₁]	0.6376 × 10 ⁻²
		Im[A ₁₁₁]	-0.2359 × 10 ⁻¹
165	0.5418+i0.0953	Re[A ₁₁₁]	-0.5932 × 10 ⁻¹
		Im[A ₁₁₁]	-0.1352 × 10 ⁻¹
160	0.5577+i0.0936	Re[A ₁₁₁]	-0.1374
		Im[A ₁₁₁]	-0.1351 × 10 ⁻¹
155	0.5750+i0.0900	Re[A ₁₁₁]	-0.2345
		Im[A ₁₁₁]	-0.2693 × 10 ⁻¹
150	0.5944+i0.0838	Re[A ₁₁₁]	-0.3642
		Im[A ₁₁₁]	-0.6033 × 10 ⁻¹
145	0.6164+i0.0734	Re[A ₁₁₁]	-0.5616
		Im[A ₁₁₁]	-0.1292
140	0.6415+i0.0555	Re[A ₁₁₁]	-0.9689
		Im[A ₁₁₁]	-0.2919
135	0.6629	Re[A ₁₁₁]	-3.8980
	0.6779	Re[A ₁₁₂]	4.4447
130	0.6388	Re[A ₁₁₁]	-1.5148
	0.7689	Re[A ₁₁₂]	7.3038

5. 결론

상반일 경로 적분법을 이용하여 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 실수 및 복소수 고유치에 대한 고유벡터 해석의 유용성을 검토하였다.

(1) 상반일 경로 적분법은 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열의 고유벡터계수 해석에서도 유용

함을 확인할 수 있었다.

(2) 상반일 경로 적분법은 응력특이성을 가지는 고유치에 대응하는 고유벡터계수를 얻기 위하여 특정 유한요소를 사용할 필요가 없으며, 고유치의 수에 민감하지 않고 안정되게 구할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Bogy, D. B., 1970, "On the Problem of Edge-bonded Elastic Quarter-planes Loaded at the Boundary," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 6, pp. 1287~1313.
- (2) Bogy, D. B., 1971, "Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction," *J. Appl. Mech.*, Vol. 38, pp. 377~386.
- (3) Hein, D. B. and Erdogan, F., 1971, "Stress Singularities in a Two-material Wedge," *Int. J. Fract. Mechanics*, Vol. 7, pp. 317~330.
- (4) Carpenter, W. C. and Byers, C., 1987, "A Path Independent Integral for Computing Stress Intensities for V-notched Cracks in a Bi-material," *Int. J. Fract.*, Vol. 35, pp. 245~268.
- (5) Ting, T. C. T. and Chou, S. C., 1981, "Edge Singularities in Anisotropic Composites," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 17, No. 11, pp. 1057~1068.
- (6) Zwierni, R. I., Ting, T. C. T. and Spiker, R. L., 1982, "On the Logarithmic Singularity of Free-Edge Stress in Laminated Composites under Uniform Extension," *J. Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 561~569.
- (7) Ting, T. C. T., 1986, "Explicit Solution and Invariance of the Singularities at an Interface Crack in Anisotropic Composites," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 22, No. 9, pp. 965~983.
- (8) 조상봉, 양장홍, 1998, "이방성 이종재료 내의 V-노치균열에 대한 응력특이성에 관한 연구," 대한기계학회논문집 A권, 제22권 제7호, pp. 1307~1315.
- (9) 조상봉, 김진광, 1999, "유사등방성과이방성이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관한 연구," 한국정밀학회, 제16권 제10호, pp. 152~163.
- (10) Labossiere, P. E. W. and Dunn, M. L., 1999, "Stress Intensity at Interface Corners in Anisotropic Bimaterials," *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 62, pp. 555~575.