

# 블럭펄스함수 전개를 이용한 Descriptor 시스템의 대수적 관측기 설계

論 文
50D-6-1

## Algebraic Observer Design for Descriptor Systems via Block-pulse Function Expansions

안 비 오\*  
(Pius Ahn)

**Abstract** - In the last two decades, many researchers proposed various usages of the orthogonal functions such as Walsh, Haar and BPF to solve the system analysis, optimal control, and identification problems from an algebraic form. In this paper, a simple procedure to design an algebraic observer for the descriptor system is presented by using block pulse function expansions. The main characteristic of this technique is that it converts a differential observer equation into an algebraic equation. And furthermore, a simple recursive algorithm is proposed to obtain BPF's coefficients of the observer equation.

**Key Words** : Descriptor system, Block-pulse function, Algebraic observer design

### 1. 서 론

지난 20년 간 직교함수는 다양한 형태로 시스템 제어 분야에서 이용되어왔다. 직교함수는 1973년 M. S. Corrington [1]이 월쉬함수 적분연산 행렬을 이용하여 미분방정식으로 표현된 상태 방정식의 해를 대수적으로 구함으로써 제어 시스템 해석 분야에 유용함을 보였고, 그 후 많은 연구자들에 의해 다양한 형태로 연구발전 해왔다.[2]-[6] 이 중 월쉬(Walsh), 하알(Haar), 블럭펄스(block-pulse)함수 등은 선형/비선형 미분 방정식을 단순한 형태의 대수 방정식으로 변환할 수 있는 장점을 갖고 있어 시스템의 해석, 최적제어, 파라미터 추정 등에 널리 사용되어 왔다. 특히, 블럭펄스함수는 정규직교 함수인 월쉬함수, 하알함수 등과 비교하여 time scaling을 필요로 하지 않고, 전개항수의 제한이 없으며 연산 시간과 정확성에 있어서 우수하여 제어 시스템 해석에 가장 널리 사용되어 왔다. 이에 본 연구에서는 블럭펄스함수 전개를 이용한 descriptor 시스템의 관측기 설계 문제를 대수적 접근으로 다루고자 한다. 최근 들어 descriptor 시스템의 관측기 설계 문제가 많은 주목을 받고 있는데[7]-[10], 이는 descriptor 시스템의 관측기 설계 문제가 시스템의 고장 진단, 미지 입력 관측기 설계, 대규모 시스템의 분산형 관측기 설계 등 여러 분야에 많은 연관성을 갖고 있기 때문이다. Descriptor 시스템의 관측기 설계는 특이치 분해 방법, Drazin inverse 접근, 기하학적 접근, 일반화된 역행렬 접근, 일반화된 Sylvester 방정식 접근, 좌표 변환 방법 등 여러

가지 각도에서 연구되어 왔다. 이중 좌표 변환을 이용한 접근방법은 다른 방법에 비해 관측기 유도과정이 체계적이고 Luenberger 관측기 설계방법을 직접 적용할 수 있는 이점을 가지고 있다. 그러나 관측기 설계과정에서 여러 번의 좌표변환 행렬의 선정과정을 필요로 하고, 이로 인한 많은 행렬연산의 부담과 함께 설계과정의 복잡성을 띄고 있다.

이에 본 연구에서는 한번의 좌표변환 행렬 선정을 통해서 Luenberger 관측기 설계가 가능한 축차된 동적 시스템을 유도하고, 블럭펄스함수 전개를 이용하여 대수적 관측기 설계를 함으로서 제안된 관측기 방정식의 해를 간명하게 구할 수 있는 대수적 반복 알고리즘을 제안하고자 한다. 제안된 블럭펄스함수 전개식은 블럭펄스함수가 가지고 있는 직교성과 배타성에 의해 유도된 블럭펄스함수 미분연산식[6]을 이용함으로써 반복 연산 알고리즘의 유도가 체계적이고 간명하다.

### 2. 블럭펄스함수

블럭펄스함수 집합  $\Phi(t)$  는 식(1)을 만족하는 구간 연속함수의 집합이다.

$$\Phi(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \dots \ \phi_m(t)]^T, \quad (1)$$

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 1 & , \ (i-1)\frac{t_f}{m} \leq t < i\frac{t_f}{m} \\ 0 & , \ \text{그외구간} \end{cases}$$

여기서,  $i=1, 2, \dots, m$

\* 正 會 員 : (주)마이다스코리아 附設研究所長 · 工博  
接受日子 : 2000年 3月 2日  
最終完了 : 2001年 5月 30日

구간  $0 \leq t < t_f$  에서 적분 가능한 임의의 실유계 연속함수 (real bounded continuous function)  $f(t)$  는 블럭펄스함수  $m$ 항 전개로 식(2)와 같이 유한급수 전개되고, 식(2)에서 블럭펄스함수  $i$  번째 계수벡터 값  $F_i$  는 식(3)과 같이 결정된다.

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^m F_i \phi_i(t) = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\phi}(t) \quad (2)$$

여기서,  $\mathbf{F}^T = [ F_1 \ F_2 \cdots F_m ]$

$$F_i = \frac{m}{t_f} \int_0^{t_f} f(t) \phi_i(t) dt = \frac{m}{t_f} \int_{(i-1)\frac{t_f}{m}}^{i\frac{t_f}{m}} f(t) dt \quad (3)$$

$$\approx \frac{1}{2} \left[ f \left( i \frac{t_f}{m} \right) + f \left( (i-1) \frac{t_f}{m} \right) \right]$$

여기서,  $i = 1, 2, \dots, m$

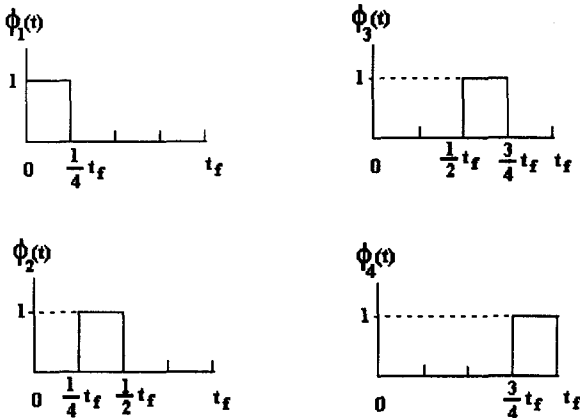


그림 1 블럭펄스함수 (4항 전개)  
Fig. 1 Block-pulse functions(expansion number  $m=4$ )

또한, 함수  $f(t)$ 의 1계 미분  $\frac{d}{dt} f(t)$ 이 실유계 연속 함수 라면,  $\frac{d}{dt} f(t)$ 의 블럭펄스함수 전개식 역시 식(4)와 같이 표현 가능하다.[6]

$$\frac{d}{dt} f(t) \approx \sum_{i=1}^m \bar{F}_i \phi_i(t) = \bar{\mathbf{F}}^T \boldsymbol{\phi}(t) \quad (4)$$

여기서,  $\bar{\mathbf{F}}^T = [ \bar{F}_1 \ \bar{F}_2 \cdots \bar{F}_m ]$

이때, 블럭펄스함수 계수벡터  $\bar{F}_i$  는 변분법적 접근[11]이 아닌, 블럭펄스함수의 직교성(orthogonal property)과 배타성(disjoint property)을 이용하여 유도함으로써, 식(5)와 같이  $f(t)$ 의 블럭펄스함수 계수벡터  $F_i$  와 초기 값  $f(0)$ 로 표현된 반복적 연산으로 구할 수 있다. (후면 부록참조)

$$\bar{F}_1 = \frac{2m}{t_f} [ F_1 - f(0) ] \quad (5.a)$$

$$\bar{F}_{i+1} = \frac{2m}{t_f} [ F_{i+1} - F_i ] - \bar{F}_i \quad (5.b)$$

여기서,  $i = 1, 2, \dots, m-1$

### 3. 좌표변환을 이용한 축차된 동적 시스템의 유도

식(6)으로 표현된 Descriptor 시스템을 고려하자.

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$$

여기서,  $\mathbf{E} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $\rho(\mathbf{E}) = r < n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^p$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^m$  이고,  $\rho(\mathbf{C}) = m$ 이다.

동적 시스템 식(6)의 행렬  $\mathbf{E}$  는 특이치 분해방법을 이용하여  $\tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{E} \mathbf{P} = \text{diag}(\Sigma_r, 0)$ 를 만족하는 직교행렬  $\mathbf{P}$ 와  $\tilde{\mathbf{Q}}$ 를 구할 수 있고, 식(7)의 유사변환을 갖는다.

$$\mathbf{E}^* \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}^* \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^*(t)$$

여기서,

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^* \\ \mathbf{B}_2^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} \mathbf{P} = [ \mathbf{C}_1^* \ \mathbf{C}_2^* ],$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \mathbf{x}^*(t), \quad \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \mathbf{x}_2^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\Sigma_r^{-1}, \mathbf{I}_{n-r}) \tilde{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{x}_1^* \in \mathcal{R}^r, \quad \mathbf{x}_2^* \in \mathcal{R}^{(n-r)}$$

식(7)로 재 표현된 동적 방정식으로부터 식(8)의 행렬군(matrix pencil)을 유도하자.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \vdots & \mathbf{B}_2^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1^* & \mathbf{C}_2^* & \vdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^*(t) \\ \mathbf{y}^*(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\text{여기서, } \mathbf{y}^*(t) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$$

이때, 식(8)의 좌변 행렬군(matrix pencil)이 전열계수(full row rank)를 갖는다면, 다음의 식(9)를 만족하는 정칙 좌표 변환 행렬  $\mathbf{T} \in \mathcal{R}^{(n+m-r) \times (n+m-r)}$  을 구할 수 있다.

$$\mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \vdots & \mathbf{B}_2^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1^* & \mathbf{C}_2^* & \vdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{R} \\ \mathbf{N} & \mathbf{I}_{(n-r)} & \vdots & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (9)$$

식(9)의 좌표변환 방법을 이용하여 식(8)은 식(10), (11)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_1^*(t) + \mathbf{R} \mathbf{y}^*(t) = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\mathbf{N} \dot{\mathbf{x}}_2^*(t) + \mathbf{x}_2^*(t) + \mathbf{S}_1 \mathbf{u}(t) + \mathbf{S}_2 \mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \quad (11)$$

여기서,  $\mathbf{S} = [ \mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2 ]$

◆ 정리 1

동적 시스템 식(6)이  $\rho \left( \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) = n+m$  을 만족하면,  $\rho \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \vdots & \mathbf{B}_2^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1^* & \mathbf{C}_2^* & \vdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \right) = n+m-r$  이고, 식(9)를 만족하는 좌표변환행렬  $\mathbf{T}$ 가 존재한다.

정리1의 증명

$$\rho \left( \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) = \rho \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1^* & \mathbf{C}_2^* \end{bmatrix} \right) = r + \rho \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \\ \mathbf{C}_1^* & \mathbf{C}_2^* \end{bmatrix} \right)$$

따라서,  $\rho \left( \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) = n+m$  이면,

$$\rho \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \\ \mathbf{C}_1^* & \mathbf{C}_2^* \end{bmatrix} \right) = n+m-r$$

로 갖고,  $\rho \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \vdots & \mathbf{B}_2^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1^* & \mathbf{C}_2^* & \vdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \right) = n+m-r$  을 만족한다. ■

따라서, 식(11)을  $\dot{\mathbf{x}}_2^*(t)$ 에 대해 정리하여 식(7)에 대입하고, 식(10)에서  $\tilde{\mathbf{y}}(t) \triangleq -\mathbf{R} \mathbf{y}^*(t)$  이라고 하면, 식(12)과 같이 상태  $\dot{\mathbf{x}}_1^*(t)$  만으로 이루어진  $r$ 차 동적 방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1^*(t) &= (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N}) \mathbf{x}_1^*(t) + (\mathbf{B}_1^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_1) \mathbf{u}(t) \\ &\quad - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_2 \mathbf{y}(t) \quad (12) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{M} \mathbf{x}_1^*(t) \end{aligned}$$

◆ 정리 2

식(6)의 동적 시스템이 가관측하면, 식(9)의 좌표변환행렬을 이용하여 구해진  $r$ 차의 동적 시스템 식(12)는 가관측하다. 즉,  $\rho \left( \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{E} + \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) = n$  이면,

$$\rho \left( \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{I}_r + (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N}) \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \right) = r \text{ 이다.}$$

여기서,  $\forall \lambda \in C, \text{Re}(\lambda) \geq 0$

정리2의 증명

$$\begin{aligned} \rho \left( \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{E} + \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) &= \rho \left( \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{I}_r + \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \\ \mathbf{C}_1^* & \mathbf{C}_2^* \end{bmatrix} \right) \\ &= \rho \left( \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{I}_r + \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N} & \mathbf{I}_{(n-r)} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

3열에  $-\mathbf{A}_{12}^*$ 을 곱하여 1열에 더하면,

$$\begin{aligned} &= \rho \left( \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{I}_r + (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N} & \mathbf{I}_{(n-r)} \end{bmatrix} \right) \\ &= (n-r) + \rho \left( \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{I}_r + (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N}) \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

따라서,  $\rho \left( \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{E} + \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) = n$  이면,

$\rho \left( \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{I}_r + (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N}) \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \right) = r$  이고, 축차된  $r$ 차의 동적 시스템 식(12)는 가관측하다. ■

4. 블럭펄스함수 전개를 이용한 대수적 관측기 설계

이제, 2절에서 소개한 블럭펄스함수를 이용하여 관측기를 대수적으로 설계해보자. 먼저, 좌표변환에 의해 축차된  $r$ 차의 동적 시스템 식(12)를 블럭펄스함수 유한급수 전개식을 이용하여 표현하면 다음의 식(13)과 같다.

$$\sum_{i=1}^m \bar{\mathbf{X}}_{1i} \phi_i(t) = (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N}) \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{1i} \phi_i(t) \quad (13.a)$$

$$+ (\mathbf{B}_1^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_1) \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_2 \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i \phi_i(t)$$

$$\sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{Y}}_i \phi_i(t) = \mathbf{M} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{1i} \phi_i(t) \quad (13.b)$$

식(13)에서 각각의 블럭펄스함수 유한급수 전개식은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}}_1^*(t) \approx \sum_{i=1}^m \bar{\mathbf{X}}_{1i} \phi_i(t) \quad (14.a)$$

$$\mathbf{x}_1^*(t) \approx \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{1i} \phi_i(t) \quad (14.b)$$

$$\mathbf{u}(t) \approx \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) \quad (14.c)$$

$$\mathbf{y}(t) \approx \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i \phi_i(t) \quad (14.d)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) \approx \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{Y}}_i \phi_i(t) \quad (14.e)$$

축차된 동적 시스템 식(12)에 대한 대수적 관측기 방정식을 식(15)와 같이 표현하고,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \bar{\mathbf{W}}_i \phi_i(t) &= (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N}) \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) \\ &+ (\mathbf{B}_1^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_1) \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_2 \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i \phi_i(t) \\ &+ \mathbf{L} \left( \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{Y}}_i \phi_i(t) - \mathbf{M} \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

오차함수를 식(16)과 같이 정의하자.

$$\mathbf{e}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) - \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{1i} \phi_i(t) \quad (16)$$

식(16)에서 다음의 식(17)을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \sum_{i=1}^m \dot{\bar{\mathbf{W}}}_i \phi_i(t) - \sum_{i=1}^m \dot{\bar{\mathbf{X}}}_{1i} \phi_i(t) \\ &= (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N}) \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) \\ &+ (\mathbf{B}_1^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_1) \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) \\ &- \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_2 \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i \phi_i(t) \\ &+ \mathbf{L} \left( \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{Y}}_i \phi_i(t) - \mathbf{M} \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) \right) \\ &- (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N}) \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{1i} \phi_i(t) \\ &- (\mathbf{B}_1^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_1) \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) \\ &+ \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_2 \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i \phi_i(t) \\ &= (\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N} - \mathbf{L} \mathbf{M}) \mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

따라서, 식(15)로 표현된 관측기 방정식은 식(17)로부터 행렬  $(\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N} - \mathbf{L} \mathbf{M})$ 의 고유값 실수부가 음의 값을 갖도록 관측기 이득행렬  $\mathbf{L}$ 을 선택하면,  $t \rightarrow \infty$ 에 따라  $\sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) \rightarrow \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{1i} \phi_i(t)$ 가 됨을 알 수 있다. 결국, 식(15)로 표현된 관측기는 식(8)의 관계에서 다음의 식(18)을 이용하여,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{Y}}_i \phi_i(t) &= -\mathbf{R} \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i^* \phi_i(t) \\ &= -[\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i \phi_i(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{여기서, } \mathbf{y}^*(t) \approx \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i^* \phi_i(t)$$

식(19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{i=1}^m \bar{\mathbf{W}}_i \phi_i(t) = \mathbf{F} \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t)$$

$$+ \mathbf{G} \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) + \mathbf{H} \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i \phi_i(t) \quad (19)$$

여기서,  $\mathbf{F} = \mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N} - \mathbf{L} \mathbf{M}$ ,

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}_1^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_1 - \mathbf{L} \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{H} = -\mathbf{A}_{12}^* \mathbf{S}_2 - \mathbf{L} \mathbf{R}_2$$

식(19)는 동적 시스템 식(6)의 입, 출력 값만으로 설계된  $r$  차 축소차수 관측기이고, 추정된 상태는 식(11)과 식(7)의 관계로부터 식(20)으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t) &= \\ \mathbf{P} \cdot &\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) \\ -\mathbf{N} \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) - \mathbf{S}_1 \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) - \mathbf{S}_2 \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i \phi_i(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

따라서, 식(13)에 대한 대수적 관측기 설계문제는 블럭펄스함수 전개식을 이용하여 표현된 관측기 방정식 식(19)에 포함된  $i$  번째 블럭펄스함수 계수벡터  $\mathbf{W}_i$ 를 반복연산에 의해 구하는 문제로 귀결된다. 반복연산 알고리즘은 다음과 같이 유도할 수 있다.

step 1▶ 식(19)의 블럭펄스함수 첫 번째 전개식을 구한다.

$$\bar{\mathbf{W}}_1 = \mathbf{F} \mathbf{W}_1 + \mathbf{G} \mathbf{U}_1 + \mathbf{H} \mathbf{Y}_1$$

step 2▶ 식(5.a)으로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{W}}_1 = \frac{2m}{t_f} [ \mathbf{W}_1 - \omega(0) ]$$

여기서,  $\omega(0)$ 은 관측기 초기 값

step 3▶ step 1, 2의 관계로부터 첫 번째 블럭펄스함수 계수 벡터 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= \left( \mathbf{I} - \frac{t_f}{2m} \mathbf{F} \right)^{-1} \\ &\cdot \left[ \omega(0) + \frac{t_f}{2m} \mathbf{G} \mathbf{U}_1 + \frac{t_f}{2m} \mathbf{H} \mathbf{Y}_1 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

step 4▶ 식(19)의 블럭펄스함수  $i$  번째와  $i+1$  번째 전개식의 합을 구한다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}_{i+1} + \bar{\mathbf{W}}_i &= \\ &\mathbf{F} \cdot (\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_i) + \mathbf{G} (\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i) \\ &+ \mathbf{H} (\mathbf{Y}_{i+1} + \mathbf{Y}_i) \end{aligned}$$

step 5▶ 식(5.b)로부터 다음을 구한다.

$$\bar{\mathbf{W}}_{i+1} + \bar{\mathbf{W}}_i = \frac{2m}{t_f} [ \mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i ]$$

step 6▶ step 4, 5의 관계로부터  $i+1$ 번째 블럭펄스함수 계수 벡터 값에 대해서 정리한다.

$$\mathbf{W}_{i+1} = \left( \mathbf{I} - \frac{t_f}{2m} \mathbf{F} \right)^{-1} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \left( \mathbf{I} + \frac{t_f}{2m} \mathbf{F} \right) \mathbf{W}_i \right. \\ & \left. + \frac{t_f}{2m} \mathbf{G}(\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i) + \frac{t_f}{2m} \mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1} + \mathbf{Y}_i) \right] \end{aligned}$$

여기서,  $i=1, 2, \dots, m-1$ 이다.

결국, 식(21), (22)로 표현된 블럭펄스함수 전개식은 동적 시스템 식(6)의  $r$ 차 축소차수 관측기 방정식 식(19)에 대한 대수적 반복연산 알고리즘이다. 여기서, 식(21), (22)에 포함된 행렬  $\left( \mathbf{I} - \frac{t_f}{2m} \mathbf{F} \right)^{-1}$ 의 존재성은 최종시간  $t_f$ 와 블럭펄스함수 전개항수  $m$ 의 적절한 선택으로 항상 보장받을 수 있다.

### 5. 적용 예제

다음과 같은 시스템 행렬을 갖는 Descriptor 시스템을 대상으로 제안된 대수적 관측기 설계방법을 적용하여보자.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{이고, } \mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \text{이다.}$$

주어진 예제 시스템은 <정리 1>을 만족하므로 본 논문에서 제시한 좌표변환 방법을 이용하여 축차된 동적 시스템의 유도가 가능하다. 관측기 이득행렬을  $\mathbf{L} = [5 \ 6]^T$ 로 선택하면, 행렬  $(\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{12}^* \mathbf{N} - \mathbf{L} \mathbf{M})$ 의 고유값은 -3과 -4로 안정하게 결정할 수 있다. 블럭펄스함수 전개항수를  $m=50$ , 최종시간을  $t_f=10$ 초로 하여 제안된 대수적 관측기를 설계하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \bar{\mathbf{W}}_i \phi_i(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_i \phi_i(t) \end{aligned} \quad (23)$$

식(21), (22)로부터 대수적 관측기 방정식 식(23)의 대수적 반복 연산식은 다음과 같다.

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 0.0879 \\ 0.0055 \end{bmatrix} \mathbf{U}_1 + \begin{bmatrix} 0.2417 \\ 0.3901 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{i+1} &= \begin{bmatrix} 0.7582 & -0.6593 \\ 0.1099 & 0.2088 \end{bmatrix} \mathbf{W}_i \\ &+ \begin{bmatrix} 0.0879 \\ 0.0055 \end{bmatrix} (\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i) + \begin{bmatrix} 0.2417 \\ 0.3901 \end{bmatrix} (\mathbf{Y}_{i+1} + \mathbf{Y}_i) \end{aligned}$$

여기서,  $i=1, 2, \dots, m-1$

따라서, 추정된 상태는 식(20)의 관계로부터 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{x}}(t) \approx \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \phi_i(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i \phi_i(t) \end{bmatrix} \quad (25)$$

<그림 2~4>는 각각의 상태  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ 와  $x_3(t)$ 을 제안된 방법으로 블럭펄스함수 20항과 50항 전개하여 추정한 그림이다. 20항 전개의 경우 샘플링 시간이 0.5초이고, 50항 전개의 경우 0.2 초이다. 그림에서 알 수 있듯이 제안된 대수적 관측기가 관측기 초기 값의 오차를 극복하고 시스템 상태를 잘 추정함을 알 수 있다.

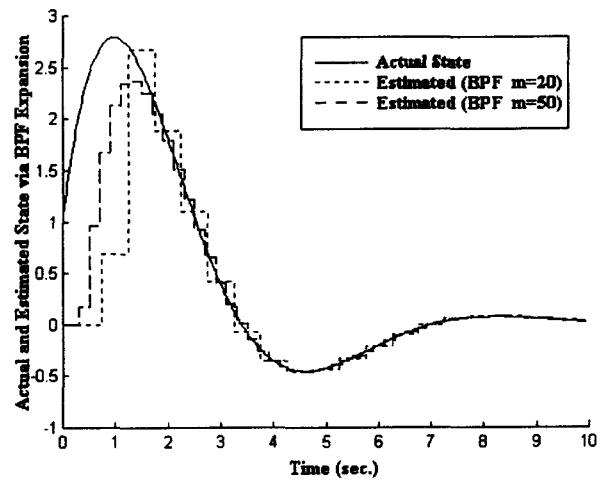


그림 2 상태  $x_1(t)$ 의 실제상태와 추정상태  
Fig. 2 Actual and estimated state of  $x_1(t)$

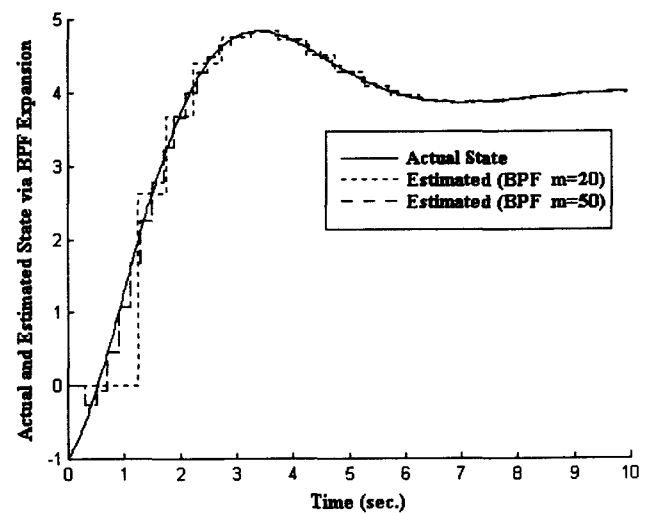


그림 3 상태  $x_2(t)$ 의 실제상태와 추정상태  
Fig. 3 Actual and estimated state of  $x_2(t)$

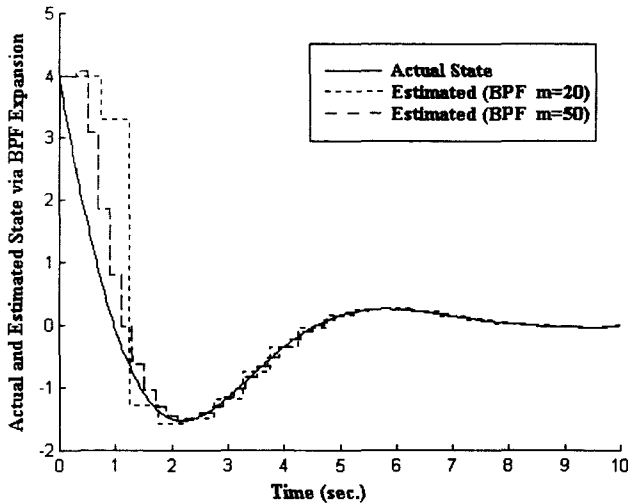


그림 4 상태  $x_3(t)$ 의 실제상태와 추정상태  
Fig. 4 Actual and estimated state of  $x_3(t)$

6. 결 론

본 논문에서는 블럭펄스함수 전개식을 이용한 descriptor 시스템의 대수적 관측기 설계에 대하여 다루었다. 제안된 descriptor 시스템의 대수적 관측기 설계 방법은, 대상 시스템이 <정리 1>을 만족할 때 한번의 좌표변환 행렬선택을 통하여 축차된 동적 시스템을 유도하고, 이 축차된 동적 시스템에 대해서 블럭펄스함수 전개식을 이용하여 대수적 관측기 설계를 하였다. 제안된 대수적 관측기는 블럭펄스함수의 직교성과 배타성에 근거하여 유도된 미분연산식을 이용하여 관측기 방정식 해의 반복연산 알고리즘을 간편하게 유도하였다. 적용예제에서는 대상 시스템에 블럭펄스함수 전개항수를 각각  $m=20$ (sampling time= 0.4 sec.)과  $m=50$  (sampling time= 0.2 sec.)으로 하여 비교해 보았으며, 제안된 대수적 관측기가 관측기 초기 값의 오차를 극복하고 실제 상태에 잘 수렴함을 보였다. 제안된 반복연산 알고리즘에 포함된 행렬  $(I - \frac{t_f}{2m} F)^{-1}$ 의 존재성은 블럭펄스함수 전개항수  $m$ 과 최종시간  $t_f$ 의 적절한 선택으로 보장받을 수 있으나, 연산 속도(calculation speed), 기억 용량(memory saving)과 해의 정확성(resolution accuracy)등을 고려하여 적절한 선택을 하여야 한다.

참 고 문 헌

[1] M. S. Corrington, "Solution of differential and integral equations with Walsh functions," IEEE Trans. CT-20, pp. 470-476, 1973.  
[2] P. Stavroulakis and S. Tzafestas, "Walsh series approach to observer and filter design in optimal control systems," Int. J. Cont., vol. 26, pp.721-736, 1977.

[3] C. K. Chen and C. Y. Yang, "Linear optimal control systems using reduced-order observers via polynomial series", Int. J. Sys. Sci., Vol.18, No. 7, pp.1355-1362, 1987  
[4] F. L. Lewis, B. G. Mertzios, "Analysis of singular systems using orthogonal functions", IEEE Trans. AC-32, No. 6 pp. 527-530, 1987.  
[5] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, "Block pulse functions and their applications in control systems," Springer-Verlag, 1992.  
[6] P. Ahn, M. H. Kim and D. S. Ahn, "A novel approach to unknown input observer design via block pulse function's differential operation," Proceedings of IFAC World Congress, vol. D, pp. 255-260, 1999.  
[7] P. C. Müller and M. Hou, "On the observer design for descriptor systems," IEEE Trans. AC-38, no. 11, pp. 1666-1671, 1993.  
[8] M. Hou and P. C. Müller, "Design of a class of Luenberger observers for descriptor systems," IEEE Trans. AC-40, no. 1, pp. 133-136, 1995.  
[9] M. Darouch and M. Boutayeb, "Design of observers for descriptor systems," IEEE Trans. AC-40, no. 7, pp. 1323-1327, 1995.  
[10] D. N. Shields, "Observers for descriptor systems," Int. J. Cont., vol. 55, pp. 249-256, 1992.  
[11] F. Kraus and W. Schaufelberger, "Identification with block pulse functions, modulating functions and differential operation," Int. J. Control, vol. 51, pp. 931-942, 1990.

◆ 부 록 : 블럭펄스함수 미분연산식의 유도 [6]

블럭펄스함수는 식(a.1)과 식(a.2)의 직교성과 배타성을 갖는다.

▶ 직교성(orthogonal property) :

$$\int_0^{t_f} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} \frac{t_f}{m}, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (a.1)$$

▶ 배타성(disjoint property) :

$$\phi_i(t) \phi_j(t) = \begin{cases} \phi_i(t), & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (a.2)$$

실유계 연속함수  $f(t)$ 의 1계 미분 함수  $\dot{f}(t)$ 에 대해서 적분을 취하자.

$$\int_0^t \dot{f}(\tau) d\tau = f(t) - f(0) \quad (a.3)$$

양변을 블럭펄스함수  $m$ 항 전개하여 표현하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^m \bar{F}_i \int_0^t \phi_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^m F_i \phi_i(t) - \sum_{i=1}^m f(0) \phi_i(t) \quad (a.4)$$

여기서,  $f(t) \approx \sum_{i=1}^m \bar{F}_i \phi_i(t)$ ,  $f(t) \approx \sum_{i=1}^m F_i \phi_i(t)$

$$\sum_{i=1}^m \bar{F}_i \left[ \frac{t_f}{2m} \phi_i(t) + \frac{t_f}{m} \sum_{j=i+1}^m \phi_j(t) \right] \quad (a.5)$$

$$= \sum_{i=1}^m F_i \phi_i(t) - \sum_{i=1}^m f(0) \phi_i(t)$$

여기서,  $\int_0^t \phi_i(\tau) d\tau = \frac{t_f}{2m} \phi_i(t) + \frac{t_f}{m} \sum_{j=i+1}^m \phi_j(t)$

식(a.5)의 양변을 전개하고,

$$\begin{aligned} & \frac{t_f}{m} \times \left\{ \bar{F}_1 \left( \frac{1}{2} \phi_1(t) + \phi_2(t) + \phi_3(t) + \dots + \phi_m(t) \right) \right. \\ & + \bar{F}_2 \left( \frac{1}{2} \phi_2(t) + \phi_3(t) + \phi_4(t) + \dots + \phi_m(t) \right) \\ & \quad \vdots \\ & + \bar{F}_i \left( \frac{1}{2} \phi_i(t) + \phi_{i+1}(t) + \phi_{i+2}(t) + \dots + \phi_m(t) \right) \\ & + \bar{F}_{i+1} \left( \frac{1}{2} \phi_{i+1}(t) + \phi_{i+2}(t) + \phi_{i+3}(t) + \dots + \phi_m(t) \right) \\ & \quad \vdots \\ & \left. + \bar{F}_m \left( \frac{1}{2} \phi_m(t) \right) \right\} \\ & = \{ F_1 \phi_1(t) + F_2 \phi_2(t) + F_3 \phi_3(t) + \dots + F_m \phi_m(t) \} \\ & - f(0) \{ \phi_1(t) + \phi_2(t) + \phi_3(t) + \dots + \phi_m(t) \} \end{aligned} \quad (a.6)$$

식(a.6)의 양변에  $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t)$ 을 차례로 곱해서 블럭펄스함수의 배타성을 이용하여 정리하면, 식(a.7)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{t_f}{2m} \bar{F}_1 = F_1 - f(0) \quad (a.7) \\ & \frac{t_f}{m} \left( \bar{F}_1 + \frac{1}{2} \bar{F}_2 \right) = F_2 - f(0) \\ & \quad \vdots \\ & \frac{t_f}{m} \left( \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_{i-1} + \frac{1}{2} \bar{F}_i \right) = F_i - f(0) \\ & \frac{t_f}{m} \left( \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_i + \frac{1}{2} \bar{F}_{i+1} \right) = F_{i+1} - f(0) \\ & \quad \vdots \\ & \frac{t_f}{m} \left( \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_{m-1} + \frac{1}{2} \bar{F}_m \right) = F_m - f(0) \end{aligned}$$

식(a.7)을  $\bar{F}_i$ 에 대하여 정리하면, 식(a.8)과 같이  $\bar{F}_i$ 에 대한 반복연산 알고리즘을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \bar{F}_1 = \frac{2m}{t_f} [ F_1 - f(0) ] \quad (a.8) \\ & \bar{F}_{i+1} = \frac{2m}{t_f} [ F_{i+1} - F_i ] - \bar{F}_i \\ & \quad \text{여기서, } i=1, 2, \dots, m-1 \end{aligned}$$

## 저 자 소 개



안 비 오 (안 비 오)

1968년 2월 24일 생. 1992년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1994년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 1998년~1999년 한국원자력연구소 Post doc. 2000년~ 현재

재 (주)마이다스코리아 기업부설연구소장.

Tel : 02-529-0950, Fax : 02-576-6444

E-mail : piusahn@email25.com