

회전 외팔보의 진동 및 응력 특성을 고려한 형상 최적화

윤영훈* · 유홍희*

(2000년 8월 17일 접수, 2001년 2월 2일 심사완료)

Shape Optimization of a Rotating Cantilever Beam Considering Its Modal and Stress Characteristics

Young Hoon Yun and Hong Hee Yoo

Key Words: Cantilever Beam(외팔보), Rotating Angular Speed(회전 각속도), Modal Analysis(진동 해석), Natural Frequency Variation(고유진동수 변화), Stress Distribution(응력 분포), Shape Optimization(형상 최적화)

Abstract

It is well known that natural frequencies increase when a cantilever beam rotates about the axis perpendicular to its longitudinal axis. Such phenomena that are caused by centrifugal inertia forces are often referred to as the stiffening effects. Occasionally it is necessary to control the variation of a natural frequency or the maximum stress of a rotating beam. By changing the thickness of the rotating beam, the modal or the stress characteristics can be changed. The thickness of the rotating beam is assumed to be a cubic spline function in the present work. An optimization method is employed to find the optimal thickness shape of the rotating beam. This method can be utilized for the design of rotating structures such as turbine blades and aircraft rotary wings.

1. 서론

구조물을 설계할 때 그 구조물의 고유진동수를 파악하고 고려해야 한다는 것은 주지의 사실이다. 정적인 구조물의 고유진동수는 구조물의 기하학적 연결상태, 재료의 강성, 질량분포 등에 의해 결정되므로 설계시에 운용환경을 바탕으로 이를 적용하는 것은 어려운 일이 아니다. 게다가 컴퓨터의 발달과 수치해석 기법의 발전으로 복잡하고 다양한 형태의 구조물이라도 이제는 해석이 용이하게 되었다.

그러나 기계구조물은 정적인 경우보다는 운동

을 수반하는 경우가 많고 경우에 따라서는 이러한 운동이 구조물의 고유진동수를 변화시켜 정적 해석을 통해 애써 피한 고유진동수가 운동을 통해 다시 중요하게 부각될 때도 있다. 이의 대표적인 경우가 바로 구조물이 회전하는 경우이다. 회전하는 기계구조물은 헬리콥터의 회전익이나 터빈의 블레이드 등과 같은 곳에서 그 예를 쉽게 찾을 수 있으며 이러한 구조물들은 앞에서 언급한 바와 같이 구조물의 전체적인 운동 즉, 회전 속도에 의존하는 형태의 고유진동수 변화를 겪게 되는데, 이는 회전에 의해 생긴 원심력으로 인해 구조강성이 증가한 결과이다.

최근들어 구조물의 중량 감소 및 에너지 절약을 위해 신소재 사용이 급증하면서 구조물의 유연성이 크게 증대되었으며 그 결과 회전에 의한 강성변화의 영향은 더욱더 현격하게 되었다. 그러므로 설계시에 이러한 고유진동수의 변화를 고려해야 함은 당연하다 하겠다.

1920년대 초 Southwell⁽¹⁾ 등에 의해 시작된 회

* 책임저자, 회원, 한양대학교 대학원

* 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

전 구조물의 진동 특성에 대한 연구는 1950년대와 1970년대를 거치면서 많은 이론적, 수치해석적 발전을 이루었고⁽²⁻⁵⁾ 근래에 이르러서는 선형 운동방정식에 기초한 모델링이 제시됨으로써 더욱더 효율적이며 정확한 해석이 가능하게 되었다.⁽⁶⁻⁸⁾ 본 논문은 근래의 연구에서 제시된 모델링을 이용하여, 회전하는 외팔보의 고유진동수 변화를 원하는 방향으로 조절할 수 있는 보의 형상을 찾기 위한 방법을 개발하는데 그 목적을 둔다. 이를 위해 길이방향에 대한 보의 두께를 3차 다항식으로 가정한다. 가정한 3차 다항식의 계수값들을 설계변수들로 하고, 고유진동수 변화를 제어할 수 있는 목적함수를 정의하여 이를 최소로 하는 계수값을 구함으로써 보의 형상을 결정한다. 연구의 편의성을 위해 보의 폭은 일정하게 유지하였다.

본 논문에서는 회전 외팔보의 운동방정식을 유도하기 위해 Kane⁽⁹⁾의 동역학 이론을 이용하였고 동시에 근사화를 위하여 가상 모드법을 사용하였다. 또한 최적 설계를 위한 최적화 방법으로는 MFD(Method of Feasible Direction)를 사용하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 2장에서는 3차 다항식 형태로 변화하는 두께를 갖는 회전 외팔보의 운동방정식과 이를 토대로 한 진동방정식의 유도과정을 보이고, 3장에서는 2장에서 얻어진 진동방정식을 이용하여 최적화 문제를 정식화 한 후 수치해석을 실시하였으며, 여기서 얻어진 결과를 토의하였다. 마지막장인 결론 부분에서는 논문 전체 내용을 요약하여 정리하였다.

2. 진동방정식 유도

2.1 운동방정식의 유도

이 절에서는 복합 변형변수를 이용한 선형 동적 모델링에 의한 운동방정식 유도과정을 간략히 소개하기로 한다. 이에 관한 상세한 내용은 참고 문헌 (7)을 참조할 수 있다.

본 연구에서는 회전 외팔보의 단면 형상변화에 의한 진동 특성 변화에 초점을 맞추기 위해 다음의 가정을 하였다. 첫째, 외팔보의 단면은 폭은 일정하고 두께만 변화하며 그 재질은 일정하고

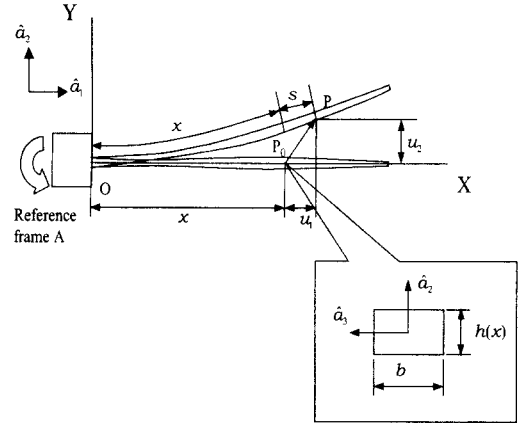


Fig. 1 Configuration of a cantilever beam

등방성이다. 둘째, 전단 효과와 회전 관성 효과(rotary inertia effect)는 고려하지 않았다. 이 효과들을 포함하는 것은 식을 복잡하게는 하나 아무런 문제도 없다. 셋째, 해석은 회전 평면내의 굽힘 방향으로만 실시하였다.

Fig. 1은 해석 대상이 되는 회전 외팔보의 2차원 평면상의 모습을 나타내고 있다. \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 는 기준틀 A에 부착된 단위 벡터들이며 \vec{u} 는 외팔보의 임의의 점 P_0 의 탄성변위벡터를, u_1 과 u_2 는 그 성분들, 그리고 s 는 인장변위를 각각 나타낸다. 기준틀 A의 각속도와 O점의 속도를 각각 $\vec{\omega}^A$ 와 \vec{v}^O 로 표시하고 이들을 기준틀 A의 단위벡터를 이용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\vec{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3 \quad \vec{v}^O = v_1 \hat{a}_1 + v_2 \hat{a}_2 \quad (1)$$

또한 이를 이용하여 P점의 속도를 구하면

$$\vec{v}^P = [v_1 + \dot{u}_1 - \Omega u_2] \hat{a}_1 + [v_2 + \dot{u}_2 + \Omega(x + u_1)] \hat{a}_2 \quad (2)$$

여기서 인장변수 s 를 u_2 와 함께 다음과 같이 근사화 한다.

$$s(x, t) = \sum_{j=1}^{M_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \quad (3)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{j=1}^{M_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t)$$

여기서 ϕ_{1j} , ϕ_{2j} 및 q_{1j} , q_{2j} 는 각각 s 와 u_2 를 근사화하기 위한 가상모드와 일반좌표들이며 μ_1 및 μ_2 는 각 모드함수들의 개수이다. u_1 대신 s 를 근사화하므로 식 (2)에 나타난 u_1 및 \dot{u}_1 은 모두 s 와 u_2 로 표시되어야 하므로 다음의 기하학적 관계식을 사용한다.

$$x+s = \int_0^x \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma}\right)^2 \right]^{1/2} d\sigma \quad (4)$$

Kane의 방법에 따른 운동방정식의 형태는

$$\int_0^L \rho b h \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_i} \right) \cdot \frac{d\vec{v}^P}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (5)$$

($i=1, 2, \dots, \mu$)

여기서 ρ , b , L 은 각각 보의 밀도, 폭, 그리고 길이를 나타내는 상수값이며 q_i 는 q_{1i} 와 q_{2i} 로 이루어지고 μ 는 일반좌표의 총 개수로 μ_1 과 μ_2 의 합이다.

h 는 보의 두께로 길이방향에 대한 3차의 다항식 형태로 다음과 같이 변화할 수 있다고 가정한다.

$$h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (6)$$

또한 U 는 보의 탄성에너지로 다음과 같이 표시된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E b h \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E \frac{b h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (7)$$

여기서 E 는 영의 계수이다.

이상의 과정을 종합하여 회전 외팔보의 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} \left[\left(\int_0^L \rho b h \phi_{1i} \phi_{1j} dx \right) \ddot{q}_{1j} - \Omega^2 \left(\int_0^L \rho b h \phi_{1i} \phi_{1j} dx \right) q_{1j} \right]$$

$$\begin{aligned} & + \left(\int_0^L E b h \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \right) q_{1j} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[2\Omega \left(\int_0^L \rho b h \phi_{1i} \phi_{2j} dx \right) \dot{q}_{2j} + \dot{\Omega} \left(\int_0^L \rho b h \phi_{1i} \phi_{2j} dx \right) q_{2j} \right] \\ & = \Omega^2 \int_0^L \rho b h x \phi_{1i} dx \\ & - (\dot{v}_1 - \Omega v_2) \int_0^L \rho b h \phi_{1i} dx \quad (8) \\ & \quad (i=1, 2, \dots, \mu_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int_0^L \rho b h \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) \ddot{q}_{2j} - \Omega^2 \left(\int_0^L \rho b h \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) q_{2j} \right. \\ & \left. + \left(\int_0^L E \frac{b h^3}{12} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) q_{2j} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left\langle \Omega^2 \int_0^L \rho b h x \left(\int_0^x \phi_{2i,\sigma} \phi_{2j,\sigma} d\sigma \right) dx - (\dot{v}_1 - \Omega v_2) \int_0^L \rho b h \left(\int_0^x \phi_{2i,\sigma} \phi_{2j,\sigma} d\sigma \right) dx \right\rangle q_{2j} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[2\Omega \left(\int_0^L \rho b h \phi_{2i} \phi_{1j} dx \right) \dot{q}_{1j} + \dot{\Omega} \left(\int_0^L \rho b h \phi_{2i} \phi_{1j} dx \right) q_{1j} \right] \\ & = - \dot{\Omega} \int_0^L \rho b h x \phi_{2i} dx \\ & - (\dot{v}_2 + \Omega v_1) \int_0^L \rho b h \phi_{2i} dx \quad (9) \\ & \quad (i=1, 2, \dots, \mu_2) \end{aligned}$$

위의 식 (8)은 인장 방향 운동방정식이며 식 (9)는 굽힘 방향 운동방정식이다. 여기서 $\phi_{1i,x}$ 와 $\phi_{2i,xx}$ 는 각각 ϕ_{1i} 와 ϕ_{2i} 의 x 에 대한 미분을 나타내며, $\phi_{2i,xx}$ 는 x 에 관해 두 번 미분한 경우를 나타낸다.

2.2 진동방정식

본 연구에서는 회전하는 외팔보의 단면 형상에 따른 진동 특성 변화에 초점을 맞추기 위해 인장 방향 운동에 의한 간섭효과를 무시하고, O 점이 회전중심이라 가정한다. 이상과 같은 가정 하에서 회전 각속도가 일정한 정상상태에 관해 다음과 같은 간략화 된 굽힘 방향 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int_0^L \rho b h \phi_{2j} \phi_{2j} dx \right) \ddot{q}_{2j} \right. \\
 & - \Omega^2 \left(\int_0^L \rho b h \phi_{2j} \phi_{2j} dx \right) q_{2j} \\
 & + \left(\int_0^L E \frac{bh^3}{12} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) q_{2j} \\
 & \left. + \sum_{\sigma=1}^{\mu_2} \left[\left(\Omega^2 \int_0^L \rho b h x \left(\int_0^x \phi_{2i,\sigma} \phi_{2j,\sigma} d\sigma \right) dx \right) q_{2j} \right] \right] \\
 & = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu_2) \quad (10)
 \end{aligned}$$

위의 식 (10)에 두께 형상을 나타내는 식 (6)을 대입하고 부분 적분법을 이용해 단일 적분 형태로 나타내면 이 식을 다음과 같은 행렬 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & [M^{22}] \{ \ddot{q}_2 \} + \{ [K^B] \\
 & - \Omega^2 [M^{22}] + \Omega^2 [K^{GB}] \} \{ q_2 \} = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

여기서 $[M^{22}]$, $[K^B]$ 그리고 $[K^{GB}]$ 의 요소들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 M_{ij}^{22} & \equiv \rho b \int_0^L h \phi_{2i} \phi_{2j} dx \\
 K_{ij}^B & \equiv \frac{Eb}{12} \int_0^L h^3 \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \\
 K_{ij}^{GB} & \equiv \rho b \int_0^L x h \left(\int_0^x \phi_{2i,\sigma} \phi_{2j,\sigma} d\sigma \right) dx \quad (12) \\
 & = \rho b \int_0^L \left\{ \frac{a_0}{2} (L^2 - x^2) + \frac{a_1}{3} (L^3 - x^3) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{a_2}{4} (L^4 - x^4) + \frac{a_3}{5} (L^5 - x^5) \right\} \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx
 \end{aligned}$$

3. 문제 설정 및 최적화

3.1 문제 설정

앞에서 세운 진동방정식을 살펴보면 시스템의 고유진동수들 ω_k 는 다음과 같이 회전각속도 및 다항식 계수들의 내재적인 함수로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \omega_k & = \omega_k(\Omega, a_0, a_1, a_2, a_3) \\
 & = \omega_k(\Omega, \mathbf{X}) \quad (13) \\
 & \quad (k\text{-th natural frequency})
 \end{aligned}$$

Table 1 Data for numerical simulation

Young's modulus(E)	69.0×10^9 Pa
Density(ρ)	2.71×10^4 Kg/m ³
Width(b)	35.0×10^{-3} m
Length(L)	0.4 m

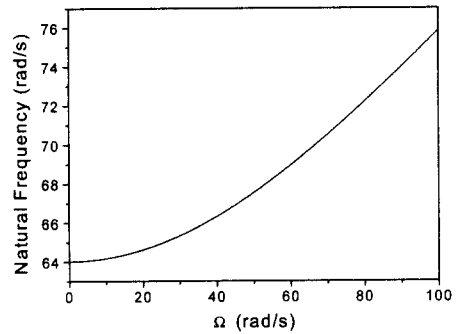


Fig. 2 Variation of the first natural frequency

이로부터 우리는 4개의 계수값들을 설계 변수 (\mathbf{X})로 하고, 회전 각속도에 의한 k 번째 고유진동수의 변화량을 제어할 수 있는 목적함수를 정의할 수 있으며, 마찬가지로 구속조건을 부여할 수 있다.

또한 각 최적화 과정에서의 설계변수의 하한계치 및 상한계치는 다음과 같이 설정하였다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_L & = [h_{\min} \quad -100 \quad -100 \quad -100]^T \\
 \mathbf{X}_U & = [100 \quad 100 \quad 100 \quad 100]^T \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서 h_{\min} 은 보의 최소 두께를 구속하기 위한 상수값이다.

최적화에 앞서 두께 h 가 일정한 경우, 즉 계수들 중 a_0 만 값을 가지는 경우의 첫 번째 고유진동수 변화량을 살펴보도록 하자. 해석을 위해 사용된 모드함수의 개수는 5개이며, 재료의 물성치는 일반적인 알루미늄이 가지는 물성치로 Table 1에 나타나 있다.

Fig. 2에서 보듯이 균일한 두께를 가지는 보의 경우 회전하지 않을 때 64.02 rad/s의 고유진동

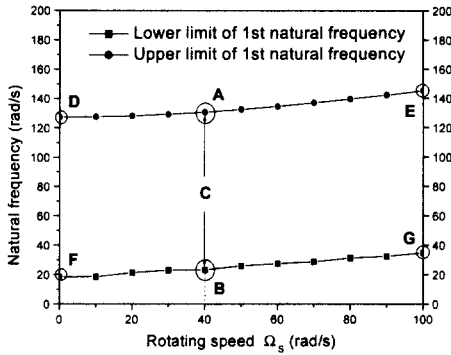


Fig. 3 Band of 1st natural frequency according to rotating speed

수를 가진다. 그러나 보가 회전할 경우 각속도의 증가와 함께 고유진동수가 증가해서 회전 각속도가 $\Omega = 100$ rad/s에 도달했을 때는 75.86 rad/s의 고유진동수를 갖게됨을 알 수 있다. 최적화 수행 시 이 결과를 기준값으로 비교 및 검토를 하도록 한다.

3.2 첫 번째 고유진동수의 영역 결정

일반적으로 회전체를 설계할 때는 회전체의 정상상태 각속도를 기준으로 설계를 하게 된다. 이처럼 특정한 회전 각속도가 주어진 경우엔 고유진동수는 형상을 정하는 다항식의 계수만으로 구성된 함수가 되며, 이로부터 형상의 변경을 통해 얻을 수 있는 고유진동수의 범위를 결정할 수 있다. 이를 위해 설정된 목적함수와 구속조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min / Max} \quad & F(\mathbf{X}) = \omega_1(\Omega_S, \mathbf{X}) \\ \text{subject to} \quad & h(\mathbf{X}, x) \geq h_{\min} \\ & \int_0^L h(\mathbf{X}, x) dx = Lh_0 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,

Ω_S 는 정상상태 각속도

h_{\min} 은 보의 최소 두께

h_0 는 초기의 보의 두께

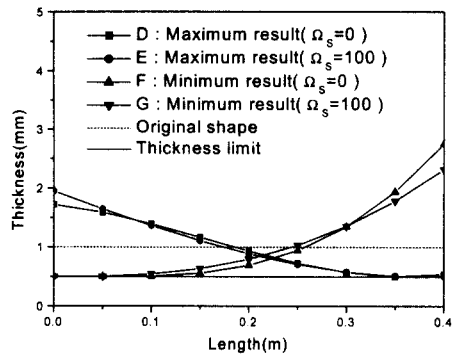


Fig. 4 Beam shapes which minimize or maximizes 1st natural frequency

Fig. 3은 보의 정상상태 회전각속도 Ω_S 를 0 rad/s로부터 100 rad/s까지 차례대로 변화시켜가면서 최적화를 수행한 후에 거기서 얻어진 각각의 최소 첫 번째 고유진동수(목적함수의 최소값)와 최대 첫 번째 고유진동수(목적함수의 최대값)를 나타낸 그림이다. 이로부터 특정 각속도에서 보의 형상 변경을 통해 조절 가능한 첫 번째 고유진동수의 영역을 결정할 수 있다. 예를 들면 Ω_S 가 40 rad/s인 경우 형상의 변경을 통해 얻을 수 있는 최대 첫 번째 고유진동수(최대값)는 A점에 해당하는 131 rad/s이며 최소 첫 번째 고유진동수(최소값)는 B점으로 23.1 rad/s가 되는 것이다. 그러므로 $\Omega_S = 40$ rad/s일 때 고유진동수 영역은 A와 B 사이에 해당하는 영역 C임을 알 수 있다.

Fig. 4는 보의 형상을 나타낸 그림으로서 Fig. 3에서 D, E, F, G점에 해당하는 고유진동수를 갖는 형상들이다. 실제 고유진동수가 높다라는 말은 그 고유진동수에 해당되는 모드에 대한 강성이 크고, 질량이 작다란 말과 동일하므로 위에서 얻은 보의 대략적인 형상은 해석 전 충분히 예측이 가능하다. 또한 일정 각속도 회전시 고유진동수를 최대로 하거나 혹은 최소로 하는 형상은 회전각속도에 크게 영향을 받지 않는다는 사실도 확인할 수 있다.

여기서의 결과는 설계자들에게 설계의 가능성 여부를 보여줄 수 있기 때문에 유용하다. 즉, 주

어진 구속조건 하에서 보의 형상을 변경함으로써 우리가 얻을 수 있는 첫 번째 고유진동수는 $\Omega_S=0$ rad/s일 때 18.4 rad/s와 127 rad/s 사이가 되고, $\Omega_S=100$ rad/s 일 때 34.6 rad/s와 145 rad/s 사이가 되므로 각각의 경우 이보다 작거나 혹은 큰 고유진동수가 요구된다면, 두께 형상의 변경을 통해서는 실현이 불가능하다는 사실을 말해준다.

3.3 고유진동수 변화의 조절

3.2절에서는 회전각속도가 고정된 상태에서 최소 혹은 최대 고유진동수를 갖는 형상을 찾는 문제를 다루었다. 그러나 회전 구조물은 언제나 일정 각속도 상태일 수 없다. 예를 들면, 운전을 시작하여 정상상태에 도달하기 위한 가속을 할 때나 정상상태에서 운전을 종료하기 위해 감속을 할 때 회전 각속도가 변하게 되는 것이다. 앞에서 언급했듯이 각속도가 변하면 고유진동수도 변한다. 그러므로 이 때는 각속도 변화에 따른 고유진동수의 변화 양상을 조절해야 한다.

참고문헌 (10)에 따르면 보가 회전을 할 때 외팔보의 각속도 Ω 와 고유진동수가 일치하는 지점에서 면내 방향 굽힘 모드일 경우 공진이 발생하며 이를 임계 각속도(critical angular speed)로서 설명하였다. 만약 각속도 변화에 따른 고유진동수 변화를 조절할 수 있다면 임계 각속도 또한 조절할 수 있다.

여기서는 고유진동수 변화를 조절하기 위한 한

예로 회전하지 않을 때 첫 번째 고유진동수가 균일한 두께를 갖는 보의 그것과 같으면서 회전에 의한 고유진동수의 변화량이 최소 혹은 최대로 하는 형상을 찾는 문제를 다루려 한다. 이를 위한 목적함수와 구속조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min/Max} \quad & F(\mathbf{X}) = \omega_1(100, \mathbf{X}) \\ \text{subject to} \quad & \omega_1(0, \mathbf{X}) - \omega_1(0, \mathbf{X}_0) = 0 \\ & h(\mathbf{X}, x) \geq h_{\min} \\ & \int_0^L h(\mathbf{X}, x) dx = Lh_0 \end{aligned} \tag{16}$$

여기서, \mathbf{X}_0 는 초기 설계변수 값

Fig. 5와 Fig. 6은 이 문제를 수행하여 얻은 보의 형상과 이러한 형상의 보가 갖는 고유진동수 변화 곡선이다.

앞에서 언급한 임계 각속도를 구하기 위해 Fig. 6에 회전각속도와 고유진동수가 일치하는 직선을 첨가시켰다. 그림에서 보는 바와 같이 고유진동수 변화곡선과 직선이 일치하는 점 A와 B는 각각 균일한 단면형상을 가진 보와 앞에서 수행한 최소화 결과 얻을 수 있었던 형상의 보가 공진을 일으키는 지점이다. 이 그림은 최대화의 결과로 얻은 형상의 보는 회전각속도가 0~100 rad/s 사이일 때 임계 각속도가 존재하지 않음을 동시에 보여 주고 있다.

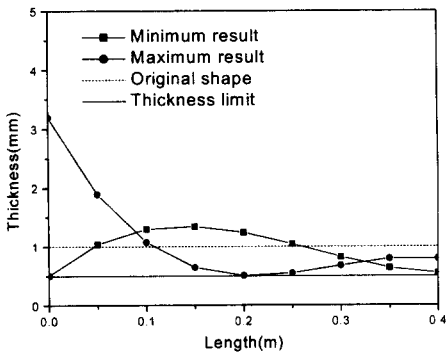


Fig. 5 Beam shapes which minimizes or maximizes 1st natural frequency variation

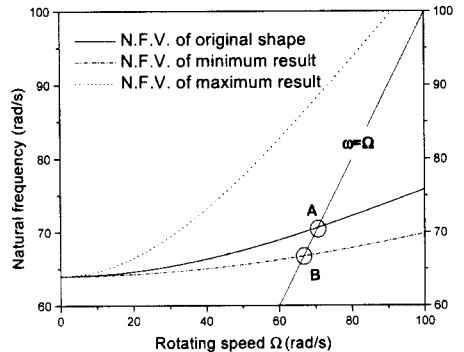


Fig. 6 Natural frequency variation of each beam shape

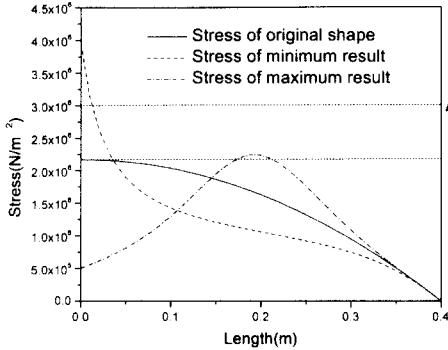


Fig. 7 Stress distribution of each beam shape

3.4 응력을 고려한 보의 형상

앞에서 언급한 내용의 증점은 보의 회전과 관련된 고유진동수의 변화였기 때문에 응력에 대한 내용은 없었다. 하지만 설계자의 입장에서 응력에 대한 내용은 매우 중요하다.

과도상태에서 보에 작용하는 응력에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (11)을 참조할 수 있다. 여기서는 문제의 간략화를 위해 정상상태를 가정하여 최대 회전각속도를 100 rad/s로 설정한 다음 인장방향 응력을 계산한 후 최대가 되는 응력값을 찾아 이 값을 일정값 이하로 구속하였다.

다음의 Fig. 7은 균일 단면 보와 앞의 3.3절 Fig. 5에서 얻은 형상에 대한 응력 분포를 나타내었다. 이 그림은 고유진동수 변화를 최대화하는 형상에서의 최대 응력은 균일 단면 형상의 최대 응력과 거의 유사함을 보여주고 있다. 이로부터 최대화하는 형상에서는 응력이 크게 문제가 되지 않음을 알 수 있다. 그러나 고유진동수 변화를 최소화하는 경우를 보면 고정단 쪽에 응력이 지나치게 집중되는 것을 확인할 수 있으므로, 여기서는 응력 구속조건을 부여하는 것을 고유진동수 변화량을 최소화하는 경우에 한하기로 한다.

응력 구속에 의한 영향을 관찰하기 위해 경우를 둘로 나누어 한번은 Fig. 7에서 임의로 취한 A 값($\sigma_{allow} = 3.0 \text{ MPa}$)을 허용 응력으로 하고 또 한번은 균일한 단면을 가지는 보에서의 최대 응력에 해당하는 B 값($\sigma_{allow} = 2.168 \text{ MPa}$)을 허용 응력으로 하여 각각 최적화를 수행한다. 이를

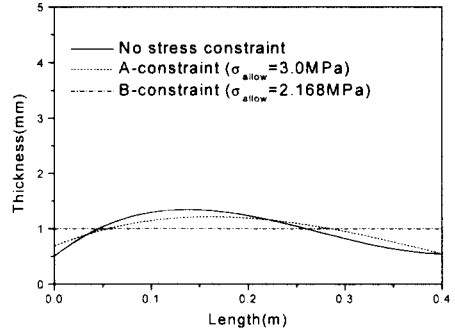


Fig. 8 Beam shapes which minimize 1st natural frequency variation

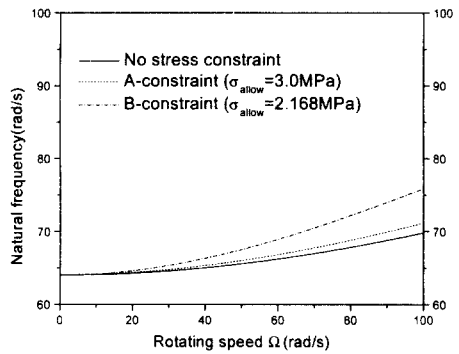


Fig. 9 Natural frequency variation of each beam shape

위한 목적함수 및 구속조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} && F(\mathbf{X}) = \omega_1(100, \mathbf{X}) \\
 & \text{subject to} && \max[\sigma(\mathbf{X}, x)] \leq \sigma_{allow} \\
 & && \omega_1(0, \mathbf{X}) - \omega_1(0, \mathbf{X}_0) = 0 \\
 & && h(\mathbf{X}, x) \geq h_{min} \\
 & && \int_0^L h(\mathbf{X}, x) dx = Lh_0
 \end{aligned} \tag{17}$$

Fig. 8과 Fig. 9는 응력 구속조건이 없을 때와 최대 허용 응력을 각각 A, B로 해서 얻은 보의 형상과 이러한 형상을 갖는 보의 고유진동수 변

화 곡선이다. Fig. 8은 고유진동수변화를 최소화하는 경우에 있어서, 허용 응력이 균일 단면 보가 가지는 최대 응력(Fig. 7에서의 B)에 가까워질수록 보의 형상자체가 원래의 형상에 수렴한다는 것을 보여준다. 또한 Fig. 9는 허용응력이 낮아질수록 고유진동수 변화곡선이 차츰차츰 균일 단면 보의 그것에 수렴하는 것을 보여준다.

4. 결 론

본 논문은 회전에 의해 진동 특성이 변화하는 외팔보 형태의 구조물을 설계하기 위한 하나의 방법을 제시하였다. 이를 위해서 보의 단면 형상을 나타내는 두께 h 를 길이 방향에 대한 3차의 다항식 형태로 가정한 후 진동방정식을 유도하였으며, 이를 이용하여 최적화 문제를 정식화하였다. 그리고 그 적용 예로 첫째, 특정 각속도에서 고유진동수의 최대값 및 최소값을 구함으로써 형상에 의해 조절 가능한 고유진동수의 영역을 결정하였고, 둘째, 회전에 의한 고유진동수의 변화를 최소 혹은 최대화하기 위한 보의 형상을 찾기 위해 회전하지 않는 경우에서의 고유진동수 구속 조건을 부여하여 최적화를 수행하였다. 그리고 마지막으로 회전하는 보에 작용하는 응력을 고려하여 고유진동수변화를 최소화하는 보의 형상을 찾아보았다. 이를 통해 고유진동수를 최소로 하거나 최대로 하는 형상은 회전속도에 크게 영향을 받지 않고 거의 유사한 형상을 나타냄을 확인할 수 있었으며, 또한 고유진동수 변화를 최소로 하는 형상은 대략적으로 보의 전체길이의 1/3정도 부근에 질량이 집중된 형상임을 알 수 있었다. 그리고 응력 특성을 고려한 경우 고유진동수 변화를 최소화하는 형상이 균일한 보의 그것에 수렴함을 알 수 있었다.

일반적으로 고유진동수를 고려한 설계를 하기 위해서는 대상이 되는 시스템의 운영 환경을 충분히 고려해야한다. 따라서 고유진동수가 목적함수가 된 본 논문의 경우엔 어느 특정한 하나의 형상이 최고의 형상일 수는 없다. 만약 정상상태에서의 진동특성만이 문제가 된다면 앞의 3.2절에서의 결과가, 그렇지 않고 회전에 의해 연속적으로 변화하는 진동특성이 문제가 된다면 3.3절과 3.4절에서의 결과가 도움이 될 것으로 사료된

다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, Vol. 25, pp. 28~30.
- (3) Carnegie, W., 1959, "Vibrations of Rotating Cantilever Blading: Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods," *J. Mechanical Engineering Sci.*, Vol. 1, pp. 235~240.
- (4) Yntema, R., 1955, "Simplified Procedures and Charts for the Rapid Estimation of Bending Frequencies of Rotating Beams," NACA 3459.
- (5) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
- (6) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, pp. 139~151.
- (7) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995 "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.
- (8) Yoo, H. and Shin, S., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*. Vol. 212, No. 5, pp. 807~828.
- (9) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics: Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.
- (10) 유홍희, 1992, "회전 외팔보의 굽힘 진동해

- 석,” 대한기계학회, 제16권, 제5호, pp. 891~898
- (11) 최창민, 유홍희, 양현익, 2000, “회전 외팔보의 과도상태 진동시 발생하는 응력 분포 연구,” 한국 소음진동공학회지, 제10권, 제2호, pp. 306~311.
- (12) Vanderplaats G. N., 1985, ADS Manual, Engineering Design Optimization Inc., Santa Barbara.