

## 새로운 부등매개변수 면외변형 곡선보 요소

유재형\* · 유승원\*\* · 민옥기†

(2000년 3월 24일 접수, 2001년 2월 21일 심사완료)

### A New Anisoparametric Out-of-Plane Deformable Curved Beam Element

Yoo Jae-hyeong, Yoo Seungwon and Min Oakkey

**Key Words:** Anisoparametric Element(부등매개변수 요소), Unmatched Coefficient(불일치 계수), Stiffness Locking Phenomenon(강성과잉현상), Undulate Stress Patterns(응력 기복현상), Curved Beam(곡선보), Spurious Constraint(가성구속), Spurious Mode(가성모드)

#### Abstract

It is known that the reduced integration, modified shape function, anisoparametric and non-conforming element can reduce the error induced by stiffness locking phenomenon in the finite element analysis. In this study, we propose new anisoparametric curved beam element. The new element based on reduced minimization theory is composed of different shape functions in each displacement field. By the substitution of this modified shape function, the unmatched coefficient that cause stiffness locking in the constraint energy is eliminated. To confirm the availability of this new model, we performed numerical tests for a simple model. As a result of numerical test, the undulate stress patterns are disappeared in static analysis, and displacements and stresses are close to exact solution. Not only in the static analysis but also in the eigen analysis of free vibrated curved beam model, this element shows successful convergent results.

#### 1. 서 론

유한요소법은 컴퓨터의 급속한 발전과 더불어 공학의 여러 분야에 적용되어 다른 수치해석 방법에 비해 응용범위가 넓고 복잡한 문제에까지 적용되고 있다. 최근까지 지속적으로 연구되고 있는 대상 중의 하나는 보, 판, 셸과 같은 2종 이상의 변위가 연계된 다변위장 문제(multi-field problem)에서 발생하는 심각한 오차에 관한 원인

규명과 해결책에 관한 연구<sup>(1~19)</sup>이다. 그 중에서 보(beam) 요소는 간단하면서도 널리 사용되는 요소로써 다른 요소의 개발을 위한 기본이 되기 때문에 중요하게 사용되고 있으며 많은 연구가 진행되어 왔다.

보요소를 이용한 유한요소 해석시 발생하는 대표적인 오차로는 가상구속(Spurious constraint)에 의해 발생하는 강성과잉현상을 들 수 있고, 이를 해결하기 위해 감차적분을 이용할 경우 가상모드에 의한 오차가 발생한다.<sup>(4)</sup> 가상구속에 의한 오차는  $C^0$ -연속 요소를 사용하여 유한요소를 해석할 경우 단면의 두께 대 길이의 비가 작아짐에 따라 실제로는 존재하지 않는 가상구속이 수식화 과정에 도입되어서 요소의 강성이 실제보다 크게 계산되기 때문에, 해석 결과의 손상을 초래하는 강성과잉현상(Stiffness locking phenomenon)에 의

\* 회원, 현대중공업

\*\* 회원, 연세대학교 대학원

† 책임저자, 회원, 연세대학교 기계설계학과

E-mail : minokey@yonsei.ac.kr

TEL : (02)2123-2817 FAX : (02)362-2736

해 발생하게 된다. 이러한 강성과잉현상은 형상 함수를 부적절하게 가정하고 수치적분시 강성행렬에 완전적분을 적용할 경우에 발생하게 된다.<sup>(4,5)</sup> 강성과잉현상의 해결을 위해서 감차적분,<sup>(4~6)</sup> 수정형상함수,<sup>(1,2,4,5)</sup> 부등매개변수,<sup>(10,11,16)</sup> 비적합 변위모드<sup>(15)</sup>를 추가하는 방법 및 감차최소화 이론(Reduced Minimization Theory)<sup>(4,5,7~10)</sup> 등이 연구되어 왔다. 가성모드에 의한 오차는 가성구속에 의한 강성과잉현상을 없애기 위해 감차적분을 적용할 때, 지나친 적분점의 감소가 행렬의 급수부족을 유발하게 되면서 이상변위모드가 발생하여 해석결과의 손상을 초래한다.<sup>(4,12~14)</sup> 면외 변형 곡선보에 있어서, 이러한 가성구속과 가성모드에 의한 오차의 발생을 동시에 배제시킬 수 있는 요소로는 무수정 또는 수정형상함수를 사용하면서 비틀림 모멘트와 관련된 에너지만을 선별적 감차적분하는 요소가 적합하다고 알려져 있다.<sup>(4)</sup> 최근 D. Sengupta 등은 면외변형 곡선보를 대상으로 기하학적 형상과 배법선 변위를 나타낼 때는 4차의 보간함수를 사용하고, 나머지 두 개의 회전변위를 근사할 경우에는 3차의 보간함수를 사용한 연구가 수행되었으나,<sup>(16)</sup> 그 이론적 바탕에 대한 설명은 행하여지지 않았다.

본 논문에서는 감차최소화 이론을 이용하여, 면외변형 곡선보 요소를 사용하여 해석을 수행할 때 오차를 유발하는 구속에너지에 불일치계수(unmatched coefficient)<sup>(5)</sup>가 나타나지 않도록 각각의 변위마다 형상함수의 차수를 달리하는 부등매개변수 요소를 도입하였다. 도입한 요소의 유용성을 살피기 위하여 정적 문제에 관하여, 변위와

응력의 분포가 이론해와 잘 일치하는지 살펴보고, 완전적분을 사용하는 방법, D. Sengupta가 제안한 가운데 절점의 회전변위를 정의하지 않는 13자유도의 5절점 부등매개변수 요소<sup>(16)</sup> 등과 비교하였다. 또한, 새로운 부등매개변수를 이용한 곡선보 요소의 고유치 해석 결과도 제시하며, 이 결과를 완전적분과 감차적분을 사용한 등매개변수 요소, 상용유한요소 프로그램의 결과, 그리고, D. Sengupta가 제시 방법과 비교하여, 새로 제안한 요소의 타당성을 보이고자 한다.

## 2. 면외변형 곡선보의 변형을 정의

면외변형 곡선보의 변위장은 Fig. 1과 같다. 이때, Timoshenko보 이론을 적용하여 변형률은 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{dw}{ds} + \theta_n \\ \chi_t &= \frac{d\theta_t}{ds} - \kappa \theta_n \\ \chi_n &= \frac{d\theta_n}{ds} + \kappa \theta_t \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $\gamma_n$  은 배법선 방향 전단변형률,  $\chi_t$  및  $\chi_n$  은 각각  $t$ 와  $n$ 방향의 회전변형률,  $w$  는 배법선 방향 전단변위,  $\theta_t$  및  $\theta_n$  은 각각  $t$ 와  $n$ 방향의 회전변위를 나타낸다. 또한,  $\kappa$  는 굽힘곡률,  $s$  는 곡선보의 중립축을 따라 정의되는 곡선좌표계이며, 세 단위 벡터는 각각 단위 접선 벡터(unit tangent vector,  $t$ ), 단위 주법선 벡터(unit principal vector,  $n$ ) 및 단위 배법선 벡터(unit binormal vector,  $b$ )이다. 그리고,  $T_b$ 는 배법선 방향의 전단력,  $M_t$ 는 접선방향 비틀림 모멘트,  $M_n$ 은 법선 방향의 회전 모멘트이다.

## 3. 부등매개변수 곡선보 요소

### 3.1 불일치계수의 고찰

식 (1)의 변형률 정의에 기초한 곡선보의 변위들을 곡선 좌표계에서 2차 내삽함수를 사용하여 근사화 시키면

$$\begin{aligned} w &= a_0 + a_1s + a_2s^2 \\ \theta_t &= b_0 + b_1s + b_2s^2 \\ \theta_n &= c_0 + c_1s + c_2s^2 \end{aligned} \quad (2)$$

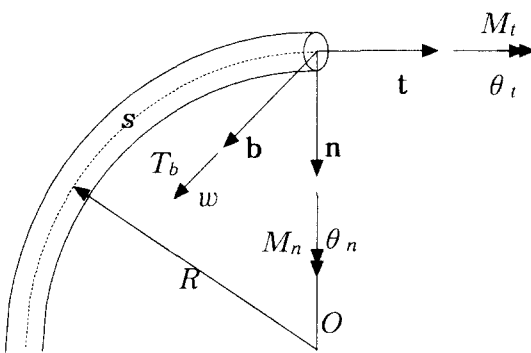


Fig. 1 Generalized displacements and unit vectors of an out-of-plane deformable curved beam

이고,  $s$ 는 곡선보의 중립축과 일치하는 곡선 좌표계이다. 식 (2)의 변위함수들을 식 (1)의 변형률식에 대입하면

$$\gamma_n = \frac{dw}{ds} + \theta_n \tag{3}$$

$$= (a_1 + c_0) + (2a_2 + c_1)s + c_2s^2$$

$$\chi_t = \frac{d\theta_t}{ds} - \kappa\theta_n \tag{4}$$

$$= (b_1 - \kappa c_0) + (2b_2 - \kappa c_1)s - \kappa c_2s^2$$

$$\chi_n = \frac{d\theta_n}{ds} + \kappa\theta_t \tag{5}$$

$$= (c_1 + \kappa b_0) + (2c_2 + \kappa b_1)s + \kappa b_2s^2$$

과 같이 표현된다. 식 (3)과 식 (4), 식 (5)의 최고차 항과 같이 변형률을 구성하는 변위 중의 일부분의 계수만을 포함하고 있는 계수를 불일치계수(unmatched coefficient)라 한다. 또한, 불일치계수가 존재하고 페널티 파라미터(penalty parameter)와 연계되어 있는 변형률을 구속변형률(constrained strain)이라 하며, 그 변형에너지를 구속에너지(constrained energy)라 부른다. 반면에 그렇지 않은 변형률은 비구속변형률(unconstrained strain)이라 하며, 비구속변형률의 변형에너지를 비구속에너지(unconstrained energy)라 한다.<sup>(5)</sup> 유한요소 해석시에 구속에너지에 완전적분을 적용할 경우에 가성구속을 유발하므로 강성과잉현상에 의한 오차가 발생하여 요소의 수치거동은 이론적으로 예측된 거동에서 벗어나게 된다. 면외변형 곡선보 요소의 경우 전단변형 에너지가 구속에너지에 해당하고, 굽힘변형에너지와 비틀림변형에너지는 비구속에너지에 해당한다.<sup>(7)</sup> 따라서 구속에너지에 속하는 전단변형에너지항을 수정하여 불일치계수를 나타나지 않게 함으로써, 가성구속을 제거할 수 있다.

3.2 새로운 형상함수의 도입

구속에너지에 완전적분을 적용할 경우, 가성구속을 유발하여 강성과잉현상에 의한 오차가 발생하므로, 이러한 오차를 없애기 위해 변위장에 따라 형상함수의 차수를 달리하는 부등매개변수 5절점 곡선보 요소를 도입한다.

식 (1)에서 전단변형률( $\gamma_n$ )은 인장변위와 법선방향의 회전변위의 연계로 이루어진다. 이때, 전단변위는 미분항에 포함되어 있으며, 그 영향으로 같은 차수로 가정한 변위함수가 사용될 경

우 즉, 등매개변수 요소를 사용할 경우 항상 최고차 항에 불일치계수가 나타날 수밖에 없고, 이는 다시 강성과잉현상에 의한 오차의 유발을 일으키게 되는 것이다. 반면, 불일치계수가 나타나지 않도록 하기 위해 미분되지 않는 법선방향 회전변위( $\theta_n$ )의 변위함수 차수를 한 차수 낮추면 전단변형률 식에는 불일치계수가 나타나지 않을 것이다. 즉,  $x$ - $y$  평면 내에 놓인 면외변형곡선보의 변위함수를 다음과 같이 근사한다.

먼저, 곡선보의 배법선변위( $w$ )는 다음과 같은 형상함수  $N_{wi}$ 를 사용하여 근사시키면 다음과 같이 표현되고,

$$w = \sum_{i=1}^5 N_{wi} w_i \tag{6}$$

여기서,

$$N_{w1} = \xi(\xi - 1)(4\xi^2 - 1)/6$$

$$N_{w2} = -4\xi(2\xi - 1)(\xi^2 - 1)/3$$

$$N_{w3} = (\xi^2 - 1)(4\xi^2 - 1)$$

$$N_{w4} = -4\xi(2\xi + 1)(\xi^2 - 1)/3$$

$$N_{w5} = \xi(\xi + 1)(4\xi^2 - 1)/6$$

이며,  $i$ 는 절점번호를 의미한다.

곡선보의 비틀림변위( $\theta_t$ )도 위의 배법선 변위와 같이

$$\theta_t = \sum_{i=1}^5 N_{ti} \theta_{t_i} \tag{7}$$

로 근사하며,

$$N_{ti} = N_{wi}, \text{ for } i = 1, 2, \dots, 5$$

를 적용한다.

보의 법선방향 회전변위( $\theta_n$ )는 곡선보의 가운데 절점을 정의하지 않는 다음과 같은 형상함수  $N_{ni}$ 를 사용하여 근사시킨다.

$$\theta_n = \sum_{i=1,3,5}^5 N_{ni} \theta_{n_i} \tag{8}$$

여기서,

$$N_{n1} = -(4\xi^2 - 1)(\xi - 1)/6$$

$$N_{n2} = 2(\xi^2 - 1)(2\xi - 1)/3$$

$$N_{n3} = -2(\xi^2 - 1)(2\xi + 1)/3$$

$$N_{n5} = (4\xi^2 - 1)(\xi + 1)/6$$

즉, 배법선 변위를 근사한 형상함수보다 한 차수

낮아지게 하였다. 이러한 부등매개변수 요소를 Table 1과 같은 방법으로 간단히 나타낼 수 있다. 여기서, 빈칸은 정의하지 않음을 의미한다. Sengupta는 면의변형 곡선보의 기하학적 형상과 배법선 변위를 근사할 때는 4차의 보간함수를 사용했고, 나머지 두 개의 회전변위( $\theta_t, \theta_n$ )를 근사할 경우에는 3차의 보간함수를 사용하였으나, 본 논문에서는 가성구속을 유발하는 에너지 항에 존재하는 불일치 계수를 제거하기 위해  $\theta_n$ 의 변위함수만을 한 차수 낮추어 사용하였다. 이제 앞서 제시한 보간함수를 이용하여 부등매개변수 면의변형 곡선보 요소의 불일치계수 발생여부를 알아보겠다. 각각의 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} w &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 \\ \theta_t &= b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 + b_4 \xi^4 \\ \theta_n &= c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 \end{aligned} \quad (9)$$

이 변위를 앞서 나타낸 변형률 정의에 대입하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{dw}{ds} + \theta_n = J \frac{dw}{d\xi} + \theta_n \\ &= (Ja_1 + c_0) + (2Ja_2 + c_1)\xi \\ &\quad + (3Ja_3 + c_2)\xi^2 + (4Ja_4 + c_3)\xi^3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \chi_t &= \frac{d\theta_t}{ds} - \kappa \theta_n = J \frac{d\theta_t}{d\xi} - \kappa \theta_n \\ &= (Jb_1 - \kappa c_0) + (2Jb_2 - \kappa c_1)\xi \\ &\quad + (3Jb_3 - \kappa c_2)\xi^2 + (4Jb_4 - \kappa c_3)\xi^3 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \chi_n &= \frac{d\theta_n}{ds} + \kappa \theta_t = J \frac{d\theta_n}{d\xi} + \kappa \theta_t \\ &= (Jc_1 + \kappa b_0) + (2Jc_2 + \kappa b_1)\xi \\ &\quad + (3Jc_3 + \kappa b_2)\xi^2 \\ &\quad + \kappa b_3 \xi^3 + \kappa b_4 \xi^4 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $J$ 는 자코비안(Jacobian)을 의미하며 상수이다.

Table 1 Anisoparametric element

Number of node (i)	1	2	3	4	5
Geometric shape	○	○	○	○	○
Shear (w)	○	○	○	○	○
Twist ( $\theta_t$ )	○	○	○	○	○
Rotation ( $\theta_n$ )	○	○		○	○

위의 결과를 살펴보면 비구속변형률인 굽힘변형률( $\chi_n$ )에는 불일치계수가 나타나지만, 구속변형률인 식 (10)의 전단변형률( $\gamma_n$ )에는 불일치계수가 나타나지 않음을 알 수 있다. 따라서, 수치실험의 결과는 강성과잉현상이 나타나지 않을 것으로 예상된다.

위에서 제시한 부등매개변수 곡선보 요소의 가우스 적분점 수에 대해서 고찰해 보면 다음과 같다. 일반적으로  $n$ -절점 요소를 사용하는 등매개변수 요소의 경우, 적분점의 수가  $n$ 개이면 완전적분,  $n$ 보다 적으면 감차적분이 된다. 하지만, 부등매개변수 요소의 경우, 각각의 변형률을 구성하는 형상함수의 차수가 다르게 된다. 즉, 한 개의 변형률에 대해서 절점 수가 다른 요소를 사용하기 때문에 완전적분, 감차적분 등의 정의를 내리기가 어렵게 된다. 따라서, 각각의 근사변형률을 구성하는 최고의 차수가  $m$ 일 경우 ( $m+1$ )개의 적분점을 사용한다. 예를 들면, 앞에서 식(10)의 전단변형률( $\gamma_n$ )의 경우, 배법선 변위( $w$ )의 4차 보간함수와 ( $\theta_n$ )의 3차 보간함수가 변형률을 구성하게 되며, 이러한 요소의 연계로 전단변형률을 구성할 때 근사변형률의 최고차 항의 차수( $m$ )는 3이 된다. 따라서, 가우스 적분점의 수는 4가 되는 것이다. 같은 방법으로 비틀림변형률( $\chi_t$ )의 적분점 수는 4, 회전변형률( $\chi_n$ )의 적분점 수는 5가 된다.

### 3.3 유한요소 수식화<sup>(13,14)</sup>

구조물의 동적평형방정식에서 감쇠가 없고, 외력이 작용하지 않는 경우에 자유진동을 나타내는 식은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0 \quad (13)$$

이 식의 일반해를  $\{U\} = \{\phi\}e^{i\omega t}$  로 표시되는 조화진동으로 가정하고, 이를 두 번 미분하면  $\{\ddot{U}\} = -\{\phi\}\omega^2 e^{i\omega t}$  로 되어 위의 식에 대입하면 다음과 같은 고유치문제를 얻는다.

$$(-\omega^2[M] + [K])\{U\} = 0 \quad (14)$$

여기서  $\omega$ 는 고유치이고,  $\{\phi\}$ 는 고유벡터이다. 벡터  $\{\phi\}$ 가 0이 아닌 해를 갖기 위해서는 행렬식이 0이 되어야 한다. 이러한 고유치문제를 해석하는 방법으로는 Vector Iteration, Subspace Iteration (Rayleigh-Ritz method), Determinant Search

Method 등의 여러 가지가 있다.

위의 식에서 면외변형 곡선보에 대한 강성행렬과 질량행렬은 다음과 같다. 요소의 강성행렬은

$$K = \sum_{i,j=1}^n K_{ij} \quad (15)$$

이고, 요소 강성행렬의 원소  $K_{ij}$  는

$$K_{ij} = \int B_i^T D B_j ds \quad (16)$$

이다. 여기서, 탄성행렬  $D$  는

$$D = \begin{bmatrix} kGA & 0 & 0 \\ 0 & GI_t & 0 \\ 0 & 0 & EI_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

가 된다. 여기서,  $k$  는 전단보정계수(shear correction factor),  $G$  는 횡탄성계수(shear modulus),  $A$  는 보의 단면적,  $E$  는 종탄성계수(Young's modulus),  $I_t, I_n$  은 단면 2차 모멘트이다. 변형률 행렬  $B_i$  는

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{ds} & 0 & N_i \\ 0 & \frac{dN_i}{ds} & -\kappa N_i \\ 0 & \kappa N_i & \frac{dN_i}{ds} \end{bmatrix} \quad (18)$$

이다. 그리고, 요소의 질량행렬  $M$  은

$$M = \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \quad (19)$$

이고, 요소 질량행렬의 원소  $M_{ij}$  는

$$M_{ij} = \int N_i^T P N_j ds \quad (20)$$

이다. 여기서, 관성행렬  $P$  는

$$P = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho I_t & 0 \\ 0 & 0 & \rho I_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

이다. 식 (21)에서  $\rho$  는 보의 밀도이다. 그리고, 변위행렬  $N_i$  는 다음과 같다.

$$N_i = \begin{bmatrix} N_{wi} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ti} & 0 \\ 0 & 0 & N_{ni} \end{bmatrix} \quad (22)$$

### 3.4 요소의 가성모드

수치적분하는 과정에서 감차적분을 적용하면, 수학적으로 강성행렬의 랭크 부족현상을 일으키거나, 강성행렬 자체가 ill-conditioning 되어 수치

해에 오차를 유발시키게 된다. 따라서 가성모드에 의한 오차유발현상도 가성구속에 의한 오차처럼 수치적분과 밀접한 관계를 갖게 된다. 본절에서는 가성모드 발생을 이론적으로 살펴보기 위해 오차-모멘트식<sup>(4,7)</sup>을 이용하였다.

등매개변수 요소의 경우, 각각의 변위가  $(n-1)$ 차 다항식에 의해 근사화 될 때, 인장변형률 에너지 모드의 오차-모멘트식은 다음과 같다.

$$\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^k d\xi = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (23)$$

본 연구에서 제시한 부등매개변수 요소의 경우 위 식 (23)은 다음과 같이 된다.

$$\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^k d\xi = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (24)$$

여기서,  $m$ 은 근사변형률의 최고차항의 차수가 된다. 따라서, 위 식 (24)을 바탕으로 각 에너지모드의 오차-모멘트 식을 구해 구해본다.

먼저, 전단변형에너지( $\gamma_n$ )에 대해서

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_n d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_n \xi d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_n \xi^2 d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_n \xi^3 d\xi = 0$$

비틀림에너지( $\chi_t$ )에 대해서

$$\int_{-1}^{+1} \chi_t d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \chi_t \xi d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \chi_t \xi^2 d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \chi_t \xi^3 d\xi = 0$$

그리고, 굽힘에너지( $\chi_n$ )에 대해서

$$\int_{-1}^{+1} \chi_n d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \chi_n \xi d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \chi_n \xi^2 d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} x_n \xi^3 d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} x_n \xi^4 d\xi = 0$$

과 같이 13개의 식으로 표현된다. 총 13개의 오차-모멘트 식에 의해 다음의 결과를 얻는다.

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad (25)$$

위의 결과를 식 (9)의 변위함수에 대입하면 단일 요소에 대해서 다음의 근사변위장을 얻는다.

$$w = a_0, \theta_t = 0, \theta_n = 0 \quad (26)$$

또한 위의 근사변위장으로부터 다음의 근사변형률장을 얻는다.

$$\gamma_n = 0, x_n = 0, x_t = 0 \quad (27)$$

이 결과는 면외변형 곡선보 요소에 부등매개변수를 사용하게 되면 근사변형률장이 모두 영이 되고 근사변위장은 강제운동모드<sup>(17~19)</sup>를 나타내게 되어 가성모드가 없음을 보여준다. 반면, 등매개변수 면외변형 곡선보 요소를 감차적분할 경우에는 근사변형률장이 영이 아니기 때문에 가성모드를 지닐 수 있다.<sup>(4)</sup>

#### 4. 수치해석 및 결과

##### 4.1 모델의 개요

면외변형 곡선보 모델은 Fig. 2 에서와 같이 면외변형하중  $P_z$  를 보의 끝단에서 배법선 방향으로 100(N)을 가했다. 열림각은  $\pi/2$  이고, 반경 ( $R$ )은 5 m, 원형 단면의 지름( $d$ )은 0.1 m 이다. 경계조건은  $\theta = 0$  인 지점에서 모든 자유도가 고정되어 있다. 한편, 모델의 재료상수는 Table 2 와 같다.

위의 면외변형 곡선보 모델에 대한 이론해는 Castigliano의 원리를 이용하여 변위와 응력의 분포를 구할 수 있다. 먼저 변위는 다음과 같다.

$$w = P_z R \left[ \frac{\phi}{kGA} - \frac{R^2}{GK} (-1 + \phi + \cos \phi - \sin \phi + 0.5 \phi \sin \phi) + \frac{0.5 \phi R^2 \sin \phi}{EJ_n} \right] \quad (28)$$

$$\theta_x = \frac{P_z R^2}{4} \left[ \frac{1}{GK} (-4 + 2\phi + 4 \cos \phi - \sin 2\phi) + \frac{1}{EJ_n} (2\phi + \sin 2\phi) \right] \quad (29)$$

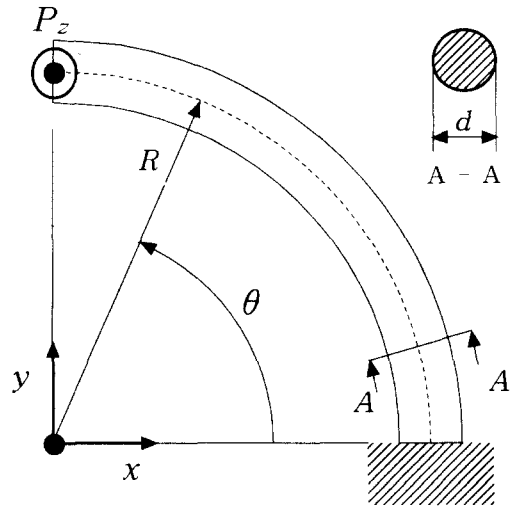


Fig. 2 Geometry of out-of-plane deformable curved beam with a circular geometry

Table 2 Material properties of out-of-plane deformable curved beam model

Young's modulus (E)	210 GPa
Poisson's ratio ( $\nu$ )	0.3
Shear modulus (G)	80.7 GPa
Shear collection factor (k)	0.886364
Density ( $\rho$ )	7833 kg/m <sup>3</sup>

Table 3 The result of natural frequency of out-of-plane deformable curve beam model using ANSYS

Order of natural frequency	Natural frequency (Hz)
1	18.22
2	34.86
3	63.78
4	88.59
5	116.02

$$\theta_y = \frac{P_z R^2}{4} \left[ \frac{1}{GK} (-1 + \cos 2\phi + 4 \sin \phi) + \frac{1}{EJ_n} (1 - \cos 2\phi) \right] \quad (30)$$

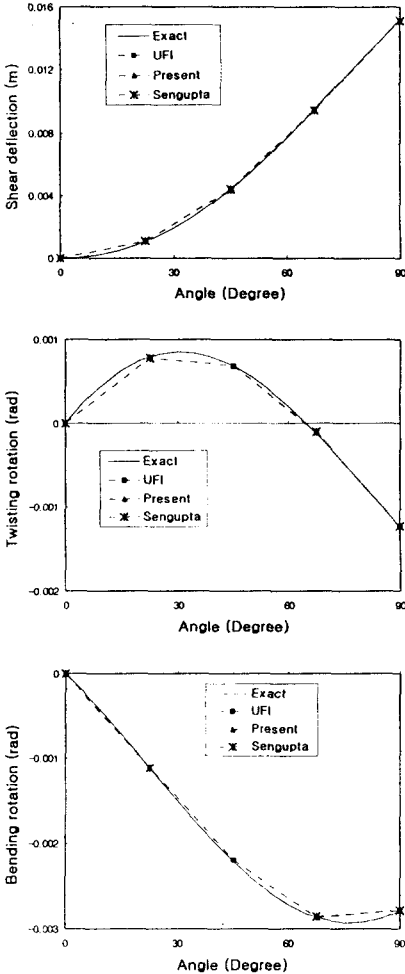


Fig. 3 Distribution of displacements for out-of-plane deformable curved beam element (5-node)

여기서, 비틀림 회전각 ( $\theta_t$ ) 및 굽힘 회전각 ( $\theta_n$ )은 다음의 관계를 갖고

$$\begin{aligned} \theta_t &= -\theta_x \sin \theta + \theta_y \cos \theta \\ \theta_n &= -\theta_x \cos \theta - \theta_y \sin \theta \end{aligned} \quad (31)$$

응력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_b &= -P \\ M_t &= -P_z R(1 - \sin \phi) \\ M_n &= P_z R \cos \phi \end{aligned} \quad (32)$$

그리고, Fig. 2의 모델에서 하중조건 및 경계조

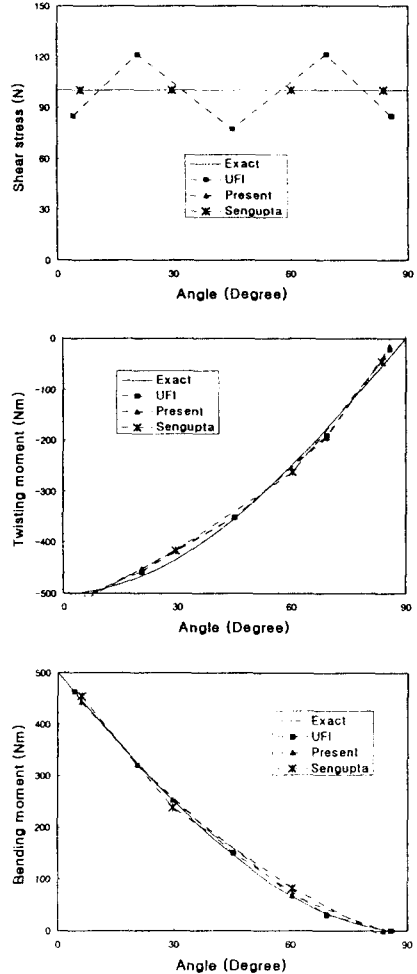


Fig. 4 Distribution of stresses for out-of-plane deformable curved beam element (5-node)

건이 없는 자유진동하는 면외변형 곡선보 모델의 고유해석의 결과는 상용유한요소 프로그램인 ANSYS 5.3을 이용하였다. 사용한 요소는 6자유도를 갖는 3차원 보요소인 "BEAM 4"를 22개 사용했고, 요소당 절점은 2개이며 1차에서 5차까지의 고유진동수를 구하였다. ANSYS에 의한 해석 결과는 Table 3과 같다.

#### 4.2 변위 및 응력의 분포

앞에서 제시한 부등대개변수 5절점요소를 사용하여 면외변형 곡선보 요소에 대한 변위(Fig. 3)

**Table 4** Convergence of natural frequency (Hz)

Order of Natural Frequency	Number of Elements	UFI	URI	SRI	Sengupta	Present	ANSYS (22 elements) (BEAM 4)
1	1	26.4	22.21	22.23	26.45	26.45	18.22
	2	18.28	18.2	18.2	18.33	18.25	
	4	18.16	18.15	18.15	18.16	18.15	
	8	18.15	18.15	18.15	18.15	18.15	
	16	18.15	18.15	18.15	18.15	18.15	
2	1	55.79	96.63	96.63	97.7	49.45	34.86
	2	35.59	35.42	35.42	35.87	33.44	
	4	34.78	34.7	34.7	34.79	34.7	
	8	34.7	34.7	34.7	34.7	34.7	
	16	34.7	34.7	34.7	34.7	34.7	
3	1	124.63	228.35	228.3	234.45	234.45	63.78
	2	83.41	71.33	71.35	84.18	57.29	
	4	63.55	63.4	63.4	63.62	63.4	
	8	63.33	63.32	63.31	63.33	63.33	
	16	63.3	63.31	63.31	63.32	63.32	
4	1	234.38	422.73	411.41	509.49	505.15	88.59
	2	100.68	101.05	101.06	103.09	82.25	
	4	88.78	88.21	88.21	88.93	88.21	
	8	87.96	87.94	87.94	87.98	87.98	
	16	87.94	87.94	87.94	87.94	87.94	
5	1	424.39	845.51	844.16	851.81	851.81	116.02
	2	180.04	152.13	152.13	204.04	118.04	
	4	116.98	116.25	116.25	117.2	116.25	
	8	115.88	115.86	115.86	115.89	115.89	
	16	115.86	115.86	115.86	115.86	115.86	

및 응력분포(Fig. 4) 결과를 그래프로 나타내었다. 또한 등매개변수(isoparametric)를 사용하는 완전적분(UFI, Uniformly Full Integration) 요소 및 D. Sengupta가 제시한 요소와도 비교하였다. 그림의 실선은 이론해를 의미하며, 'Present'는 부등매개변수 곡선보 요소를 의미한다.

Fig. 3은 위에서부터 각각 배법선 방향의 전단 변위, 접선방향의 비틀림 회전각, 법선방향의 회전각을 나타냈고, Fig. 4는 위에서부터 각각 배법선 방향의 전단응력, 접선방향의 비틀림 모멘트, 법선방향의 회전모멘트를 나타낸다. 완전적분한 등매개변수 요소는 총 15자유도, D. Sengupta가



제시한 요소는 총 13자유도이며, 본 논문의 부등매개변수 요소는 총 14자유도를 갖는다.

수치해석 결과, 변위와 응력 모두 이론해와 잘 일치하였고, 완전적분한 등매개변수 요소와는 달리 부등매개변수 요소는 응력의 기복현상이 나타나지 않았다.

#### 4.3 고유해석의 결과

자유진동하는 면외변형 곡선보의 고유해석의 결과를 부등매개변수 곡선보 요소를 사용하여 Table 4에 나타냈다. 수치해석 모델은 Fig. 2와 같으나, 하중조건이나 경계조건은 없다.

5절점 요소에 대해서 요소수를 1, 2, 4, 8, 16개로 증가시키면서 해석결과의 수렴을 살펴보고, 앞에서 제시한 ANSYS 해석 결과와 비교하였다. 또한, 등매개변수를 사용하는 완전적분(UFI, Uniformly Full Integration), 일괄적 감차적분(URI, Uniformly Reduced Integration), 선별적 감차적분(SRI, Selective Reduced Integration) 요소 및 D. Sengupta가 제시한 요소와도 결과를 비교하였다. 여기에서, 'Present'는 앞에서 제시한 부등매개변수 면외변형 곡선보요소이며, 고유진동수는 1차부터 5차까지 나타냈다.

수치해석 결과, 다른 요소와 마찬가지로 요소수를 증가시키기에 따라 좋은 수렴결과를 나타냈다. 특히 2차 이상의 고유진동수는 다른 요소보다 수렴속도가 약간 더 빠른 결과를 나타냈다.

### 5. 결 론

본 논문에서는 감차최소화 이론에 근거를 두고, 가성구속을 유발시키는 구속에너지에 포함된 불일치 계수를 제거하기 위해, 근사변형률을 구성하는 각각 변위의 형상함수 차수를 달리하는 부등매개변수 면외변형 곡선보 요소를 제시하였다. Timoshenko보 이론을 적용하여 변형률을 표현하였으며, 전단변위( $w$ )와 비틀림변위( $\theta$ )는 4차의 형상함수를 사용하고, 법선방향의 회전변위( $\theta_n$ )는 3차의 형상함수를 사용하였다. 그리고, 각각 변형률에 대한 가우스 적분점 수는 4개, 4개, 5개를 사용하였다.

이 부등매개변수 면외변형 곡선보에서 각각의 변위에 대해 근사한 형상함수를 변형률 식에 대입했을 때 비구속에너지항에는 불일치계수가 나

타났으나, 구속에너지항에는 불일치계수가 나타나지 않았으며, 이를 통해서 강성과잉현상에 의한 오차가 나타나지 않을 것으로 예상할 수 있었다.

수치해석 결과, 완전적분한 등매개변수요소가 응력의 기복현상에 의한 오차가 나타난 것과는 달리 감차적분을 사용하지 않은 부등매개변수 요소는 변위와 응력 모두 이론해와 거의 일치하였다.

오차-모멘트 식을 이용하여 부등매개변수 요소의 근사변형률을 구했을 때 모든 변위장에서 0(zero)의 결과를 나타내었다. 이 결과로부터 근사 변위장은 강제운동모드를 나타내고 있음을 알 수 있었다.

자유진동하는 곡선보를 부등매개변수를 사용하여 고유해석을 한 결과는 다른 완전적분이나 감차적분을 사용한 등매개변수 요소, D. Sengupta가 제시한 요소, 그리고, 상용유한요소 프로그램의 결과와 비교했을 때 거의 일치하는 수렴결과를 나타냈으며, 특히, 2차 이상의 고유진동수는 더욱 빠른 수렴결과를 나타냈다.

따라서, 본 논문에서 제시한 부등매개변수 면외변형 곡선보 요소가 정적인 해석 뿐 아니라, 고유해석에서도 좋은 해석 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다

### 후 기

본 논문은 두뇌한국 21 사업의 지원으로 이루어진 것이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참고문헌

- (1) Prathap, G., 1985, "The Curved Beam/Deep Arch/Finite Ring Element Revisited," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, pp. 389~407.
- (2) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 1973~1984.
- (3) Day, R. A. and Potts, D. M., 1990, "Curved Mindlin Beam and Axi-Symmetric Shell Elements - A New Approach," *Int. J. Num. Meth. Engng.*,

- Vol. 30, pp. 1263~1274.
- (4) 김용우, 1991, "유한요소의 가성구속과 가성모드에 의한 오차유발에 관한 통합이론," 연세대학교 대학원, 박사학위 논문.
- (5) 문원주, 1997, "면외변형 곡선보 요소의 강제변위장에 관한 연구," 연세대학교 대학원, 박사학위 논문.
- (6) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R. L., 1989, *The Finite Element Method*, 4th edition, McGraw-Hill.
- (7) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1994, "Reduced Minimization Theory in Beam Elements," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 2125~2145.
- (8) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1994, "Numerical Reduced Minimization Theory for Beam Elements Under Non-Uniform Isoparametric Mapping," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 39, pp. 1357~1382.
- (9) 문원주, 김용우, 민옥기, 이강원, 1996, "공간 곡선보 요소에서의 감차최소화 이론," 대한기계학회 논문집, 제20권, 제12호, pp. 3792~3803.
- (10) Kim Moon-joon, Min Oak-key, Kim Yong-woo and Moon Won-joo, 2000 "New Anisoparametric 3-Node Elements for Out-of-Plane Deformable Curved Beam," *KSME International Journal*, Vol. 14, No. 3, pp. 131~141.
- (11) Tessler, A. and Spiridigliozzi, L., 1986, "Curved Beam Elements with Penalty Relaxation," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 2245~2262.
- (12) 권영두, 임범수, 박윤호, 1999, "가우스 적분 가중치 수정에 의한 디제너레이트 쉘요소의 굽힘 특성 개선," 대한기계학회논문집, 제23권, 제8호, pp. 1328~1337.
- (13) 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보의 강성과잉현상과 고유치에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제14권, 제2호, pp. 445~454.
- (14) 문원주, 김용우, 민옥기, 1993, "면외변형 링요소를 이용한 고유해석," 대한기계학회논문집, 제17권, 제7호, pp. 1719~1730.
- (15) 최창근, 1989, "유한요소해석," 집문당
- (16) Dasgupta, S. and Sengupta, D., 1997, "Static and Dynamic Application of a Five Noded Horizontally Curved Beam Element with Shear Deformation," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 40, pp. 1801~1819.
- (17) 김용우, 문원주, 권해성, 민옥기, 1993, "면외변형이 가능한 평면 곡선보의 선형 유한요소," 대한기계학회논문집, 제16권, 제3호, pp. 419~429.
- (18) Moon Won-joo, Kim Yong-woo, Min Oak-key, 1998, "Rigid Body Displacement Fields of an In-plane-deformable Curved Beam Based on Conventional Strain Definition," *KSME Int.J.*, vol.12, No.3, pp. 461~472.
- (19) 유승원, 문원주, 민옥기, 1999, "면외변형 곡선보 요소의 강제변위 특성," 대한기계학회논문집, 제23권, 제8호, pp. 1388~1398.