

## 과도 선형 동탄성 문제의 시간영역 유한요소해석

심우진\* · 이성희\*

(2000년 3월 11일 접수, 2001년 1월 31일 심사완료)

### A Time-Domain Finite Element Formulation for Transient Dynamic Linear Elasticity

Woo-Jin Sim and Sung-Hee Lee

**Key Words:** Transient(과도), Dynamic Elasticity(동탄성), Finite Element Method(유한요소법), Elastic Wave(탄성파)

#### Abstract

Transient linear elastodynamic problems are numerically analyzed in a time-domain by the Finite Element Method, for which the variational formulation based upon the equations of motion in convolution integral is newly derived. This formulation is implicit and does not include the time derivative terms so that the computation procedure is simple and less assumptions are required comparing to the conventional time-domain dynamic numerical algorithms, being able to get the improved numerical accuracy and stability. That formulation is expanded using the semi-discrete approximation to obtain the finite element equations. In the temporal approximation, the time axis is divided equally and constant and linear time variations are assumed in those intervals. It is found that unconditionally stable numerical results are obtained in case of the constant time variation. Some numerical examples are given to show the versatility of the presented formulation.

#### 1. 서론

과도 선형 동적인 탄성 문제들의 해석을 위한 공학적인 수치해석법에는 그 도구로써 유한요소법이나 경계요소법이 주로 사용되고 있으며, 해석 영역에 따라 시간영역, Laplace영역, Fourier영역 해법 등<sup>(1-7)</sup>으로 나뉜다. 본 논문에서는 유한요소법을 도구로 하여 시간영역에서의 과도적인 동탄성 문제의 해법을 연구한다.

시간영역에서의 유한요소법<sup>(1-3)</sup>에 의한 기존의 수치해석은, 주어진 지배방정식에 가중함수를 가하고 부분적분을 한 후에, 시간함수와 공간함수의 곱의 시리즈로 가정한 종속함수를 대입하여 얻어진 반-분리된(semi-discrete) 유한요소방정식을 푸는데 그 목적을 둔다. 이를 위해서 시간축을 여러 구간으로 나누고, 각 시간구간 내에서 시간절점의 속도나 가속도를 Newmark 시간적분법과 같은 적절한 유한차분적인 방법을 통해서, 전 단계의 절점값을 바탕으로 다음 단계의 값을 반복적으로 계산해 나간다.

한편, 시간에 대하여 미분식으로 표현된 지배방정식은 Laplace 변환을 통해서 시간에 관한 합성적분(convolution) 식으로 변환시킬 수가 있는데, 이때 가속도나 속도에 대한 변수를 포함하지 않게 된다. 유도방식은 다르나 이와 유사한 이론

\* 책임저자, 회원, 금오공과대학교  
E-mail : wjsim@knut.kumoh.ac.kr  
TEL : (054)467-4224/4221 FAX : (054)467-4221  
\* 회원, 금오공과대학교 대학원

에는 Gurtin의 변분원리<sup>(8)</sup>가 있다. 본 논문에서는 수치해석을 목적으로 합성적분식으로 표현된 지배방정식에 변분을 곱하고 적분한 식을 영으로 하는 변분식을 기초로 유한요소방정식을 만든다. 시간에 대한 미분항을 포함하지 않으므로 속도나 가속도에 대한 유한차분적인 가정이 필요가 없으며, 단지 시간구간 상에서 종속함수에 대한 근사만이 필요하게 된다. 본 논문에서는 종속함수가 일정한 경우와 선형적으로 변하는 경우를 조사한다. 시스템 해석을 위해서 최종적으로 얻은 유한요소방정식은 탄성 문제의 방정식과 형태에 있어서 유사하였으나 현재의 변형 계산에 과거의 동적 변위 결과가 매시간 영향을 끼치는 점이 다르다. 따라서 수치해석 절차는 정적인 유한요소방정식에 약간의 수정만으로 가능하게 되며, 동적 거동의 해석에서 크게 문제가 되는 실제해로의 수렴에 대한 안정성과 정확성을 향상시킬 수가 있다.

제시된 유한요소정식화의 타당성을 보이기 위하여 두 가지 예를 택하였으며, 변위와 응력을 해석하여 얻어진 수치결과를 이론해나 다른 해법에 의한 수치결과와 비교 검토를 한다.

## 2. 변분식

등방성, 선형, 동탄성 문제를 해석하기 위한 지배방정식은 다음과 같다:

i) 운동방정식

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) + \rho f_i(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

여기서,  $\sigma_{ij}$ 는 응력 텐서,  $\rho$ 는 질량 밀도,  $f_i$ 는 체적력,  $u_i$ 는 변위 텐서,  $\mathbf{x}$ 는 위치 벡터,  $t$ 는 시간,  $\sigma_{ij} \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ 는 공간 변수에 관한 편미분, 그리고  $\ddot{u}_i \equiv \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ 는 가속도이다.

ii) 변형률-변위 관계식

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \{ u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t) \} \quad (2)$$

여기서,  $\epsilon_{ij}$ 는 미소변위 가정에 따른 변형률 텐서이다.

iii) 응력-변형률 관계식

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) \quad (3a)$$

$$= 2\mu \epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) + \lambda \epsilon_{mm}(\mathbf{x}, t) \delta_{ij} \quad (3b)$$

여기서,  $D_{ijkl}$ 은 등방성 탄성 재료의 물성계수이며,  $\mu, \lambda$ 는 Lamé 탄성계수이다. 또한,  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker's delta, 그리고  $\epsilon_{mm} = u_{m,m}$ 는 체적변형을 이다.

그리고, 위와 같은 지배방정식들을 풀기 위한 경계조건 및 초기조건은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma_u \\ t_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{t}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma_t \\ u_i(\mathbf{x}, t) &= d_0(\mathbf{x}) \quad \text{at } t=0 \\ \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) &= v_0(\mathbf{x}) \quad \text{at } t=0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,  $t_i$ 는 표면력으로서 물체 표면에서  $t_i \equiv \sigma_{ij} n_j$ 의 관계를 가지며,  $\hat{u}_i$ 와  $\hat{t}_i$ 는 물체표면 ( $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$ )의  $\Gamma_u$ 와  $\Gamma_t$ 에서 변위와 표면력에 관한 경계값이다. 그리고  $d_0(\mathbf{x})$ 와  $v_0(\mathbf{x})$ 는 변위와 속도에 관한 초기값이다.

식 (1)의 좌우에 Laplace 변환을 적용시키면,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, s) + \rho \bar{f}_i(\mathbf{x}, s) \\ = \rho \{ -\dot{u}_i(0) - s u_i(0) + s^2 \bar{u}_i \} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, Laplace 변환의 정의는 다음과 같다.

$$L(u) = \bar{u}(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty u(\mathbf{x}, t) e^{-st} dt \quad (6)$$

여기서,  $t \leq 0$  구간에서  $u(\mathbf{x}, t) = 0$ 으로 가정한다. 식 (5)의 양변을  $s^2$ 으로 나누어 주면,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, s) + \frac{1}{s^2} \rho \bar{f}_i(\mathbf{x}, s) \\ = \rho \left\{ -\frac{1}{s^2} \dot{u}_i(0) - \frac{1}{s} u_i(0) + \bar{u}_i \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)를 시간영역으로 역변환시키면,

$$t * \sigma_{ij} + t * \rho f_i = \rho \{ -t \dot{u}_i(0) - H(t) u_i(0) + u_i \} \quad (8)$$

혹은,

$$g * \sigma_{ij} + g * \rho f_i - \rho \{ -t \dot{u}_i(0) - u_i(0) + u_i \} = 0 \quad (9)$$

여기서  $g = g(t) = t$ 이며, Laplace 변환된 함수들의 곱의 역변환시에 두 함수의 합성적분(convolution, \* 기호로 표시)으로 바뀌는 다음의 관계식이 적용되었다.

$$L(u)L(v) = L(u * v) \quad (10)$$

여기서,  $u \equiv u(\mathbf{x}, t)$ ,  $v \equiv v(\mathbf{x}, t)$  이다.

참고로, 시간에 관한 적분 형태의 운동방정식 식 (9)는 Gurtin<sup>(8)</sup>에 의해서도 유도되었는데, 그는 시간 미분형 운동방정식 식 (1)의 양변에  $g(t)$  함수와의 합성적분을 통해서 구했다. 또한 그는 식 (9)에 해당하는 범함수를 이론적으로 정의하고, 그 변분식이 영이 됨을 보임으로써 유도된 범함수가 옳음을 보였다.

본 논문에서는 유한요소애 의한 수치해석을 목적으로 식 (9)에 변분을 곱하고 그 영역적분을 영으로 하여 변분식을 구한다. 그러나, Gurtin의 범함수는 함수들 사이의 곱이 모두 합성적분으로 표현되어 있다는 점에서, 우선적으로 본 논문의 결과와 차이가 있음을 알 수가 있다. 즉,

$$\int_{\Omega} [g^* \sigma_{ij} + \rho(g^* f_i + (tv_0 + d_0)) - \rho u_i] \delta u_i d\Omega = 0 \quad (11)$$

이를 전개하면 다음의 결과식을 얻을 수가 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g^* \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \rho (tv_0 + d_0) \delta u_i d\Omega = \\ & \int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} g^* \rho f_i \delta u_i d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

참고로, 식 (1)을 바탕으로 얻어진 변분식<sup>(9)</sup>은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f_i \delta u_i d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)은 동탄성 문제 해석시에 일반적으로 사용되는 변분식으로 식 (12)와 비교해 보면, 식 (13)은 시간에 관한 미분항(가속도)을 포함하고 있으며, 식 (12)는 시간에 관한 적분항을 포함하고 있음을 알 수가 있다. 식 (13)에서는 수치해석시에 가속도나 속도 변수에 대한 이웃 시간절점간에 유한차분적인 근사가 필요하게 되나, 식 (12)의 경우에는 종속 변수에 대한 근사만을 포함하게 되어 계산 질차가 아주 단순해진다. 게다가 식 (12)는 시간에 대한 함축적인 식(implicit formulation)이므로, 종속변수와 유한요소애 대한 가정이 크게 무리가 없는 한, 동적문제 해석시에 크게 염려되는 불안정 문제를 줄일 수가 있다.

### 3. 유한요소방정식

절차를 간소화하기 위하여, 식 (12)에서 체적력 항을 무시하기로 한다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g^* \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (tv_0 + d_0) \delta u_i d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)의 첫항을 계산하기 위해서, 시간축을 등간격으로 나누고, 응력분포가 각 시간구간에서 일정하다(constant)고 가정한다. 변위와 변형률에 대해서도 동일한 가정이 성립하나 이러한 가정은 식 (13)의 경우에는 적용될 수가 없다. 그리고 종속함수는 시간함수와 공간함수의 곱의 시리드로 가정한다(the semi-discrete approximation<sup>(1,2)</sup>).

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) \quad (15)$$

여기서,  $\Phi_n(t)$ 는 시간축상의 시간절점에 관한 내삽함수(global time interpolation function)로서, 시간구간에서 다음처럼 정의된다( $n=1, \dots, N$ ).

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= 1, \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n \\ \Phi_n(t) &= 0, \quad \text{그 밖의 다른 구간에서} \end{aligned} \quad (16)$$

$\sigma_{ij}^n(\mathbf{x})$ 는 임의의 시간구간에서 일정한 응력함수이다. 식 (15)를 식 (14)의 등식 좌측의 첫항에 대입하고 초기치가 영이라고 가정하면 다음처럼 된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N (N-n + \frac{1}{2}) \Delta t^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, 시간중분  $\Delta t$ 는 일정하다. 식 (17)에서 등식 우측의 외력 항은 초기에 힘이 가해지고 그 후에 일정하게 유지되는 것으로 가정했을 때, 다음처럼 된다.

$$\int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma = \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Gamma} \hat{t}_i(\mathbf{x}) \delta u_i d\Gamma \quad (18)$$

여기서,  $t_i(\mathbf{x}, t) = \hat{t}_i(\mathbf{x}) H(t)$ 이며,  $H(t)$ 는 단위계단함수이다. 식 (18)을 식 (17)에 대입하고 행렬식으로 표현하면 동탄성 문제를 해석하기 위한 유한요소방정식이 다음처럼 유도된다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta t^2 \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^N \\ & + \int_{\Omega} \rho [M]^T [N] d\Omega \{u_i\}^N \end{aligned}$$

$$= \frac{t^2}{2} \int_r [M]^T \hat{t}_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \Delta t^2 \sum_{n=1}^{N-1} (N-n + \frac{1}{2}) \int_{\Omega} [B]^T [D][B] d\Omega \{u_i\}^n \quad (19)$$

여기서,  $[M]$ 은 형상함수 행렬,  $[B]$ 는 변형률-변위 행렬,  $[D]$ 는 탄성계수 행렬이다. 식 (19)를 더 간략히 적으면,

$$\begin{aligned} & [\frac{1}{2} \Delta t^2 [K] + [M]] \{u_i\}^N \\ &= \frac{t^2}{2} (F) - \frac{1}{2} \Delta t^2 [K] \sum_{n=1}^{N-1} (2N-2n+1) \{u_i\}^n \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [K] &= \int_{\Omega} [B]^T [D][B] d\Omega, \\ [M] &= \int_{\Omega} \rho [M]^T [M] d\Omega, \\ \{F\} &= \int_r [M]^T \hat{t}_i(\mathbf{x}) d\Gamma \end{aligned} \quad (21)$$

식 (20)을 좀 더 간단히 표현하면,

$$\begin{aligned} & [\hat{K} + M] \{u_i\}^N \\ &= \{\hat{F}\} - [\hat{K}] \sum_{n=1}^{N-1} (2N-2n+1) \{u_i\}^n \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,  $[\hat{K}] = \frac{1}{2} \Delta t^2 [K] = \text{일정}$ ,  $\{\hat{F}(t)\} = \frac{t^2}{2} \{F\}$ 이다. 식 (22)에서  $[\hat{K} + M]$  행렬은 일정하므로, 매시간의 계산 작업은  $t = N\Delta t$ 로 하여,  $\{\hat{F}(t)\}$  계산과 과거의 동적변위결과(past dynamic history)를 보상해 주는 일이다.

그리고 각 절점에서의 응력 계산은 탄성의 경우와 동일하며, 식 (3) 혹은 다음의 행렬식처럼 계산한다.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\} \quad (23)$$

여기서,  $\{\delta\}$ 는 절점변위이다.

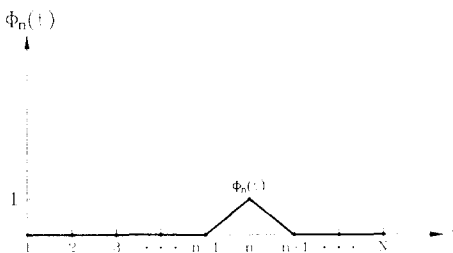


Fig. 1 Global linear time interpolation function

한편, 응력분포가 각 시간구간에서 선형적으로 변할 때도 진과 마찬가지로 유도할 수가 있는데, 간략히 서술하면 다음과 같다.

시간축을 등간격으로 나누고, 시간축의 시간절점상에서의 내삽함수를 Fig. 1에서처럼 선형적인(linear) 함수로 가정한다. 그러면, 응력에 대한 근사함수를 다음처럼 정의할 수가 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{n=1}^N \phi_n(t) \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \{ \phi_1(t) \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) + \phi_2(t) \sigma_{ij}^{n+1}(\mathbf{x}) \} \cdot \\ &\quad (H(t-t_n) - H(t-t_{n+1})) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,  $\sigma_{ij}^n(\mathbf{x})$ 는 임의의 시간절점  $t=t_n = (n-1)\Delta t$ 에서의 응력함수이며,  $n$ 은 임의의 시간절점,  $N$ 은 현재의 시간절점, 그리고  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$ 는 국부적 내삽함수로서 임의의 시간구간에서 다음처럼 정의된다.

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{t_{n+1}-t}{\Delta t}, \quad \phi_2(t) = \frac{t-t_n}{\Delta t} \quad t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ \phi_1(t) &= 0, \quad \phi_2(t) = 0 \quad \text{그 밖의 구간에서} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (24)를 식 (14)의 등식 좌측의 첫항에 대입하고, 식 (18)의 결과를 이용하여 정리하면 최종적으로 다음의 결과식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & [\frac{1}{6} \Delta t^2 [K] + [M]] \{u_i\}^N \\ &= \frac{t^2}{2} (F) - \Delta t^2 [K] \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \{u_i\}^n \end{aligned} \quad (26)$$

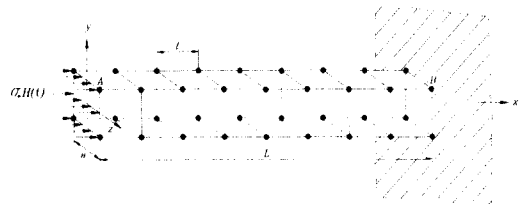


Fig. 2 A bar under suddenly applied step load(L/a=8)

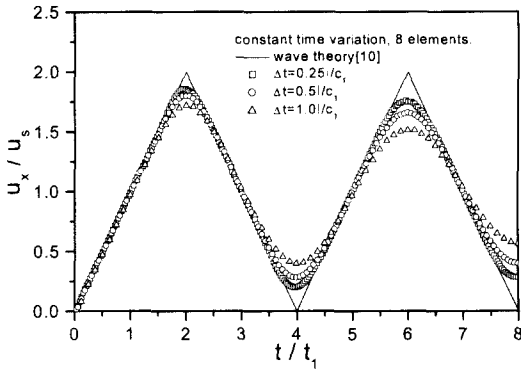


Fig. 3(a) Axial displacements at the free end A

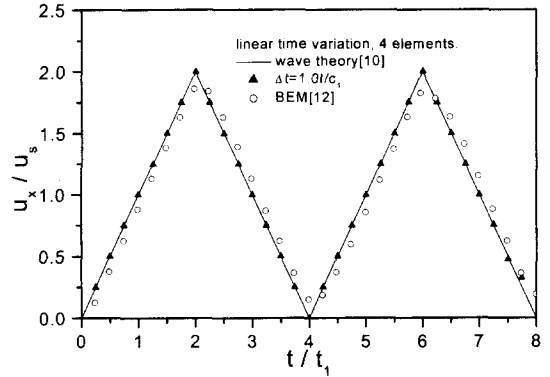


Fig. 4(a) Axial displacements at the free end A

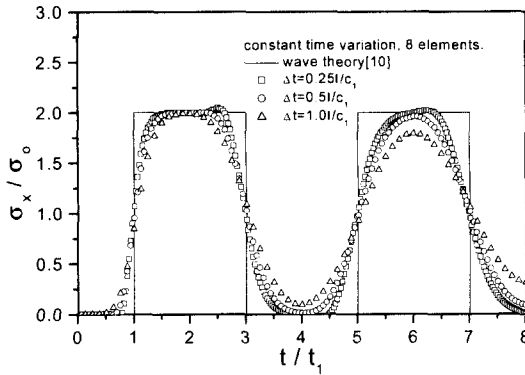


Fig. 3(b) Longitudinal stresses at the fixed end B of a bar

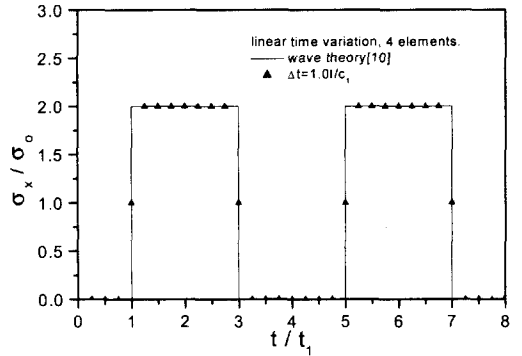


Fig. 4(b) Longitudinal stresses at the fixed end B of a bar

#### 4. 수치해석 예

##### 4.1 평면파(Plane Wave)

Fig. 2에서처럼 한쪽 끝이 고정되고 다른 끝이 자유단인 정사각형 단면의 외팔보가 있다. 처음에 정지 상태에 있던 자유단에 균일한 압축력  $\sigma_0 H(t)$  가 갑자기 작용할 때, 막대 속에 존재하는 변위와 응력을 계산하였다. 이때, 사용된 변수들의 정의는 다음과 같다.

탄성계수  $E$ , 밀도  $\rho$ , 압축하중  $\sigma_0$ , 막대길이  $L$ , 단면치수  $a$ , 막대의 종파속도  $c_1 = \sqrt{E/\rho}$ , 기준 시간  $t_1 = L/c_1$ .

유한요소메쉬 형상은 Fig. 2에서처럼 3차원 선형 요소로서 구성되었으며, 전 체적을 2, 4, 8개의 요소로 균등하게 나누고 각 경우에 대하여 수치결과를 조사하였다. 그리고, 시간축에 따른 적분과정에 있어서 시간축을 등간격( $\Delta t$ )으로 나누고, 각 시간구간에서 종속함수가 일정하다는 가정과 선형적이라는 가정하에, 여러 시간증분들( $c_1 \Delta t/l = 0.25, 0.5, 1.0$ ;  $l$ 은 요소의 길이)이 수치결과에 미치는 영향을 조사하였다.

Fig. 3(a), (b)에는 막대를 8개의 유한요소로 나누고, 각 시간구간에서 종속함수가 일정하다고 가정할 때, 자유단의 축방향 변위와 고정단 단면에서의 수직응력의 계산 결과를 정적해( $u_s = FL/AE$ )로 무차원화시켜서 이론해<sup>(10)</sup>와 비

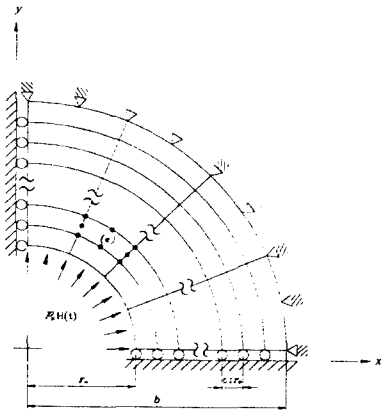


Fig. 5 Finite element model for a circular cylinder within an infinite sheet subject to sudden internal pressure ( $b/r_0=11$ , 200 elements)

교해서 그렸다. 결과로서, 시간구간에서 종속함수가 일정할 경우에는 유한요소와 시간증분이 세밀할수록 정확도가 높게 나타났다. 그리고 공간분할이 세밀할 경우, 즉, 요소의 크기가 작을 경우에는 시간증분( $c_1 \Delta t/l$ )이 1보다 클 때에도 실제 해에 안정적으로 잘 수렴함을 알 수가 있었다.

Fig. 4(a), (b)에는 각 시간구간에서의 종속함수가 선형적일 경우에 대하여, 4개의 선형적 유한요소를 사용하고, 시간증분  $c_1 \Delta t/l=1.0$ 에 대한 수치결과를 도시하였다. 요소분할이 2개, 8개인 경우에도 Fig. 3과 같은 정확도의 해를 얻을 수가 있었다. 그러나, 분할이 많을수록 정확도는 향상된 반면에, 시간증분의 크기 변화에 따라 발산하는 경우도 생겼는데 그 경향이 다소 임의적이었다.

막대의 동적 해석에 대한 수치해석은 여러 사람들<sup>(11,12)</sup>에 의해서 시도되었는데, Fig. 4(a)에는 경계요소법을 사용해서 얻어진 Israil and Banerjee<sup>(12)</sup>의 결과와 본 논문의 수치결과를 비교하였다. 수치결과는 메쉬 형상, 요소 차수, 시간증분 등에 따라서 다소 변하는데, 경계요소법으로 해석된 [12]의 수치결과는  $l/a=2$ , 12개의 2차 경계요소,  $c_1 \Delta t/l=1.0$  데이터에 대한 해석 결과이며, 시간증분을 더 작게 하여, 즉,  $c_1 \Delta t/l=0.5$ 인 경우에 더 향상된 결과를 보여주

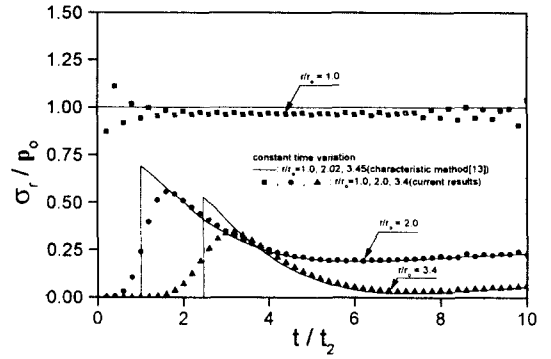


Fig. 6(a) Radial stresses under sudden internal pressure

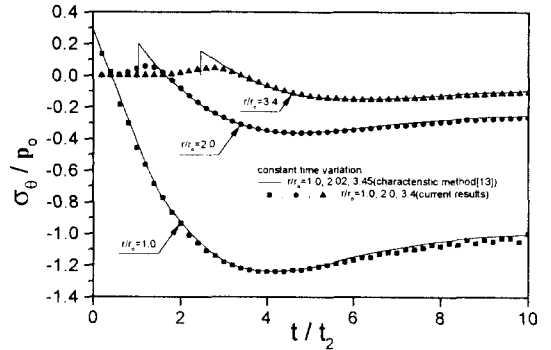


Fig. 6(b) Tangential stresses under sudden internal pressure

고 있으나, 본 논문에서는 비교를 목적으로 전자의 데이터를 택하였다.

#### 4.2 원통파(Cylindrical Wave)

무한 평판 속에 반경이  $r_0$ 인 홀 내에서 순간적인 압력  $p_0 H(t)$ 의 작용에 의한 원통파의 전파에 따른 변위와 응력(plane stress)의 시간에 따른 변화를 계산하였다. 이때 사용된 데이터는  $\nu=0.3$ , 원통파의 속도  $c_2 = \left[ \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right]^{1/2}$ , 기준 시간  $t_2 = r_0/c_2$ 이다. 무한영역을 근사하기 위하여 Fig. 5에서처럼 1/4원 형태의 모델을 반경 방향으로 균등하게 분할하고, 등매개변수 2차 유한요소를 사용했다. 기하학적 데이터들은  $b/r_0 =$

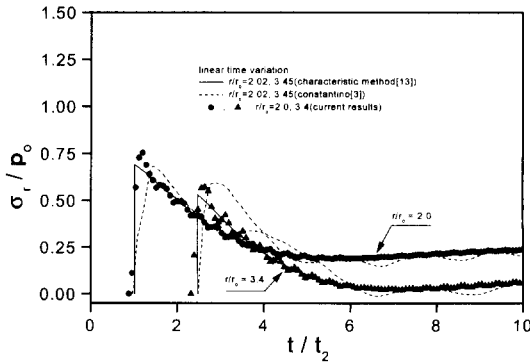


Fig. 7(a) Radial stresses under sudden internal pressure

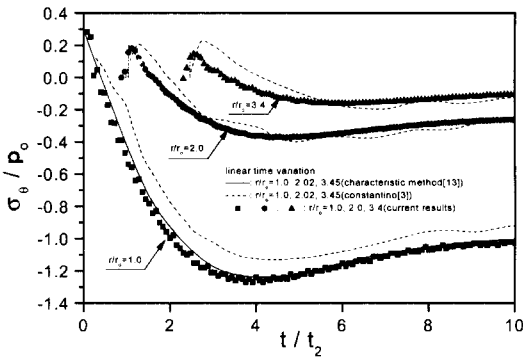


Fig. 7(b) Tangential stresses under sudden internal pressure

11, 총 요소수는 200개 이며, 경계조건은 그림과 같다. Fig. 6(a), (b)에는 종속함수가 시간구간에서 일정하게 변하고, 시간증분이  $c_2\Delta t/l_2 = 1.0$  경우 예,  $r/r_0 = 1.0, 2.0, 3.4$ 에서 얻어진 수치결과들,

즉, 반경 방향의 응력과 접선 방향의 응력들이 무차원화 되어져, Characteristic Method<sup>(13)</sup>에 의한 해석적 결과와 비교되고 있다.  $r/r_0 = 1$ 에서, 접선 방향의 응력이 해석적인 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있으며, 반경 방향의 응력은  $t=0$  와 후반부에 가서 데이터들이 진동하는데 그 이유는 초기에 압력이 갑작스럽게 작용함에 그 원인이 있다고 생각된다. 또한  $r/r_0 = 2.0, 3.4$ 에 응력파가 도달했을 때의 정점응력(peak stress)이 해석적 결과보다 낮은데 이것은 시간증분을 작게

함으로써 높일 수가 있으나, 그 경향은 크게 변하지 않았다.

한편, 시간구간에서 종속함수가 선형적으로 변하는 경우의 수치결과는 Fig. 5와 같은 메쉬와 시간증분이  $c_2\Delta t/l_2 = 0.4$ 인 경우에 대하여 Fig. 7(a) (b)에 도시하였다. 그림에서 알 수 있는 것처럼 종속함수가 일정한 경우의 수치결과보다 정점응력들이 정확히 더 잘 계산되었다. 참고로, Fig. 7(a)에 비교된 수치결과는  $Fu^{(5)}$ 에 의한 결과로서 유한요소법에 의하여 해석되었다. 본 논문의 해법에 의해서 수치결과의 정확성이 더 향상됨을 알 수가 있다.

본 예제의 경우, 주어진 메쉬형상(Fig. 5) 아래에서 시간증분에 따른 수렴성 여부를 조사하였는데, 적절한 해를 얻기 위한 시간증분  $c_2\Delta t/l_2$ 의 범위가 0.1~0.45 사이 이었다. 그리고 안정적인 최적해를 구하기 위한 유한요소의 크기와 시간증분 사이에는 어떤 관계가 존재하리라고 예측되는 데, 그것에 대한 해석은 앞으로 더 전문적인 연구가 필요하다고 사료된다.

### 5. 결 론

등방성 선형 탄성 재료의 과도적인 동적 변형을 시간 영역에서 해석하기 위해서 유한요소방정식을 유도하였다. 이를 위해서, 시간 미분으로 표현된 운동방정식을 Laplace 변환을 통해서 시간 적분식으로 바꾼 등가의 운동방정식을 바탕으로 변분식을 유도한다. 그리고 그 변분식을 반-분리 근사법을 이용하여 전개하는데 가속도 항이 없으므로 기존의 동탄성 변분식의 전개 과정보다 훨씬 수월하고 단순하다. 시간축을 등간격으로 나누고, 각 시간구간에서 종속함수가 일정한 경우와 선형적인 경우로 가정하여, 메쉬의 변화와 시간증분의 크기를 변화시켜 가면서 얻어진 수치결과들을 분석하였다. 그리하여 본 논문의 해법 특성에 대한 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, 각 시간구간에서 종속함수의 변화가 일정하다고 가정했을 때, 수치결과는 적절한 유한요소메쉬 하에서 시간증분의 변화에 큰 영향을 받지 않았으며, 오랜 시간이 흘러도 항상 정적인 해로 수렴됨을 알 수가 있었다(unconditionally stable). 둘째, 시간구간에서 종속함수가 선형적으로 변하는 경우에는 전자의 경우보다 정점 응력, 즉, 응력파가

도달했을 때의 급변하는 응력을 정확히 더 잘 나타내었다. 그러나 수치결과가 메쉬 형상과 시간증분의 변화에 민감하게 반응하였으며, 때에 따라서 발산하는 경우도 생겼다(conditionally stable). 후자의 경우에는 실제해로의 안정적 수렴에 대한 시간증분과 유한요소 사이에 최적의 조건이 존재하리라고 생각되며, 그것은 앞으로 더 연구해야 할 과제이다. 끝으로, 시간구간에서 종속함수의 변화가 일정할 경우에 수치결과는 안정적이지만은 본 예제의 경우에 적절한 해를 구하기 위한 시간증분의 크기는 (대표요소의 길이) / (탄성파의 속도) 의 비로써 0.25-1.0 정도로 판명되었다.

### 후 기

위 논문은 1998년도 금오공과대학교 학술연구비 지원을 받아 연구하였음.

### 참고문헌

(1) Reddy, J.N., 1993, *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, Chap. 10.  
 (2) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., 1991, *The Finite Element Method*(4th edn), Vol. 2, Dynamics and Nonlinearity, McGraw-Hill, London, Chap. 9-10.  
 (3) Fu, C.C., 1970, "A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising From a Finite-Element Analysis," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* pp. 599~605.  
 (4) Ahmad, S., 1986, *Linear and Nonlinear Dynamic Analysis by Boundary Element Method*,

Ph.D. Thesis, SUNY at Buffalo, Chap. VIII.  
 (5) Lee, T.W. and Sim, W.J., 1992, "Efficient Time-Domain Finite Element Analysis for Dynamic Coupled Thermoelasticity," *Computers and Structures*, Vol. 45, No. 4, pp. 785~793.  
 (6) 김진석, 1998, "라플라스 변환을 이용한 단순 지지보의 동적 변형률 해석," 대한기계학회논문집, 제22권, 제10호, pp. 1858~1865.  
 (7) Bedford, A. and Drumheller, D.S., 1994, *Introduction to Elastic Wave Propagation*, John Wiley, Chichester, Chap. 4.  
 (8) Gurtin M.E., 1964, "Variational Principles for Linear Elastodynamics," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, pp. 234~250.  
 (9) Achenbach J.D., 1975, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam, Chap. 2.  
 (10) Timoshenko S.P. and Goodier J.N., 1970, *Theory of Elasticity*, 3rd Edn., McGraw-Hill, New York.  
 (11) Mansur W.J., 1983, *A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*, Ph.D. Dissertation, University of Southampton, U.K.  
 (12) Israil A.S.M. and Banerjee P.K., 1990, "Advanced Development of Time-Domain BEM for Two-Dimensional Scalar Wave Propagation," *Int. J. Num. Eng.*, Vol. 29, pp. 1003~1020.  
 (13) Chou P.E. and Koenig H.A., 1966, "A Unified Approach to Cylindrical and Spherical Elastic Waves by Method of Characteristics," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, pp. 159~167.