

회전하는 링의 비선형 진동해석

김선경* · 정진태† · 이수일**

(2000년 12월 28일 접수, 2001년 4월 18일 심사완료)

Nonlinear Vibration Analysis of a Rotating Ring

Seonkyong Kim, Jintai Chung and Sooil Lee

Key Words : Rotating Ring(회전 링), Natural Frequency(고유 진동수), Perturbation Method(섭동법)

Abstract

Nonlinear Vibration of a flexible circular ring is studied in this paper. Based upon the von Karman strain theory, the nonlinear governing equations are derived, in which the in-plane bending and extension displacements as well as the out-of-plane bending displacement are fully coupled. After discretizing the governing equations by the Galerkin approximation method, we obtain the linearized equation by using the perturbation method. The results from the linearized equations show that the in-plane displacement has effects on the natural frequencies of the out-of-plane displacement

1. 서론

링(Ring)은 축대칭 구조물의 가장 간단한 모델이며 쉘, 디스크, 플라이휠 등 훨씬 복잡한 구조물의 기본적인 특성을 잘 표현해 줄 수 있기 때문에 과거로부터 많은 연구가 진행되어왔다. 또한 축대칭 구조물은 기계요소의 관점으로 볼 때 회전체로서의 역할을 하는 경우가 많으며 회전시 나타나게 되는 동적 특성을 파악하는 것이 기초설계에 매우 중요하다.

정지상태의 얇은 링이 Hoppe⁽¹⁾에 의해 처음으로 연구되었으며 Rao⁽²⁾와 Kirkhope⁽³⁾는 회전관성, 전단 변형 등을 고려하여 고유진동수 및 고유형상을 구해내었고 Evensen⁽⁴⁾은 면내 굽힘의 비선형성을 고려한 연구를 수행하였다. Carrier⁽⁵⁾와 Huang⁽⁶⁾ 등은 회전하는 링에 관해 여러가지 경계조건을 고려한 연구를 수행하였고, Natsiavas⁽⁷⁾는 회전하는 링의 면내 굽힘에 관한 비선형을 고려하여 안정성을 분석하였다. 지금까지의 연구들은 대부분 링의 운동

을 면내에 국한시켜 생각하였고 면외변위와 비틀림이 연성된 정지상태의 두꺼운 링에 관해 Kirkhope⁽⁸⁾가 연구를 수행하였을 뿐이다. 면내변위와 면외변위가 연성된 링의 비선형 문제에 관해 Maganty⁽⁹⁾의 연구가 있었지만 회전이 없는 정지상태의 링에 관한 연구였다.

본 논문에서는 회전하는 얇은 링에 대하여 von Karman 변형률이론으로부터 면내 및 면외변위가 기하학적 비선형으로 연성된 지배방정식을 구하였다. Galerkin 방법으로 지배방정식을 이산화하고 섭동법을 이용하여 선형화된 방정식으로부터 진동해석을 수행하여 비선형성이 미치는 효과에 대해 알아보았다.

2. 지배방정식

기하학적 비선형성(geometric nonlinearity)을 고려한 회전하는 링에 관한 지배방정식을 얻기 위해 von Karman 변형률 이론을 바탕으로 하여 Hamilton 원리를 이용하였다. 본 연구에서의 링은 면내방향(in-plane)변위와 면외방향(out-of-plane)변위가 기하학적 비선형을 통해 연성되어있어 면내 방향의 변위가 면외방향의 변위에 주는 영향을 고찰할 수 있다.

각속도 Ω 를 갖는 회전하는 링을 Fig. 1에 도시

* 회원, 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학과

E-mail : jchung@hanyang.ac.kr

TEL : (031)400-5287 FAX : (031)406-5550

** 회원, 한양대학교 기계공학과 BK21 사업단

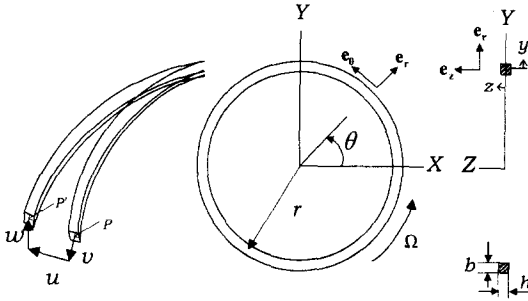


Fig. 1 Geometry of a rotating ring

하였다. 본 연구에서의 회전 링은 반경이 r 이고 두께와 높이가 각각 b, h 를 갖는 사각 단면의 기하학적 형상을 갖고있으며, 재질은 균일한 탄성체로써 영률(Young's modulus) E , 밀도(density) ρ 를 갖는 축대칭 회전체이다. 링의 운동을 효과적으로 표현하기 위하여 원통 좌표계(cylindrical coordinates)를 사용했으며 원점은 링의 도심에 위치한다. e_r, e_θ, e_z 는 링에 고정되어 함께 회전하는 좌표계이고 u, v, w 는 각각 면내굽힘(in-plane bending)방향, 인장(extension)방향, 그리고 면외굽힘(out-of-plane bending)방향 변위를 의미한다. 또한 y 와 z 는 각각 링 내부의 변위를 표시하기 위해 도입된 좌표계이다.

반지름 r 에 비해 링의 두께 및 높이 b, h 가 매우 작다고 가정하면 링의 변위는 θ 와 t 만의 함수로 표현할 수 있으며, 평행한 부분은 변형후에도 평행 하다고 가정하면 링의 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(\theta, t) \\ v(\theta, t) + y\phi_i - z\phi_o \\ w(\theta, t) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서,

$$\phi_i = \frac{v(\theta, t)}{r} - \frac{\partial u(\theta, t)}{r\partial\theta}, \quad \phi_o = \frac{\partial w(\theta, t)}{r\partial\theta} \quad (2)$$

이다. ϕ_i 와 ϕ_o 는 각각 면내방향과 면외방향의 변형 기울기이다.^(2,3)

평면내 변위가 평면외 변위에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 회전 링의 기하학적 비선형성을 고려한 다음과 같은 von Karman 변위-변형률 관계식을 사용하였다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)^2 \\ \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_\theta}{r\partial\theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{r\partial\theta} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{\partial U_r}{r\partial\theta} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \frac{\partial U_z}{r\partial\theta} \right) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

링의 두께와 높이가 반지름에 비해 매우 작으므로 $\epsilon_r, \epsilon_{r\theta}$ 는 무시할 수 있다고 가정하면 결국 θ 방향의 변형률만을 고려하게 된다. 또한 식의 전개를 간단하게 하기 위하여 y, z 가 곱해지는 항과 그렇지 않은 항을 분리해주면 아래의 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_\theta = \bar{\epsilon}_\theta + y\alpha_\theta - z\beta_\theta \quad (4)$$

여기서,

$$\bar{\epsilon}_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r\partial\theta} \right)^2 \quad (5)$$

$$\alpha_\theta = \frac{\partial v}{r^2\partial\theta} - \frac{\partial^2 u}{r^2\partial\theta^2}, \quad \beta_\theta = \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} \quad (6)$$

식 (4)의 우변의 두번째 항과 세번째 항은 지배방정식에서 각각 면내방향과 면외방향의 굽힘모멘트에 대한 항으로 표시되어 나타나게 된다.

변형에너지는 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (7)$$

θ 방향의 변형률만을 고려한 위의 가정과 Hook의 법칙을 적용하면 링의 변형에너지는 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$U = E \int_V \epsilon_\theta^2 dV \quad (8)$$

여기서 V 는 링의 체적이다.

운동에너지를 계산하기 위해 변형후 링내 각 질점의 위치벡터를 결정하고 이를 시간에 대해 물질미분을 취한다. Fig. 1에서 링이 변형된 후 임의의 점 P' 의 위치벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r} = (r + U_r) \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta + U_z \mathbf{e}_z \quad (9)$$

여기서 \mathbf{r} 은 점 P' 까지의 위치벡터이며 U_r, U_θ, U_z 는 각각 r, θ, z 방향의 변위를 표시한다.

식 (9)를 시간 t 에 관해 물질미분을 취하면 링 밖의 고정 좌표계에서 관찰한 점 P' 의 속도벡터를 구할 수 있다. 즉,

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \quad (10)$$

구해진 속도벡터는 다음과 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + y\Phi - z\Psi \quad (11)$$

여기서

$$\bar{\mathbf{v}} = (\dot{u} + \Omega u' - \Omega v)\mathbf{e}_r + (\dot{v} + \Omega v' + \Omega u + \Omega r)\mathbf{e}_\theta + (\dot{w} + \Omega w')\mathbf{e}_z \quad (12)$$

$$\Phi = \frac{\Omega}{r}(u' - v)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}(\dot{v} - \dot{u}' + \Omega(v' - u''))\mathbf{e}_\theta \quad (13)$$

$$\Psi = -\left(\frac{\Omega}{r}w'\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}(\dot{w}' + \Omega w'')\mathbf{e}_\theta \quad (14)$$

식 (11)의 우변의 두번째 항과 세번째 항은 각각 회전관성에 대한 것들인데, 링의 두께와 높이가 매우 얇다는 가정과 Euler 빔 이론을 바탕으로 하여 회전관성을 생략하면 회전하는 링의 운동에너지는 다음과 같이 근사화 되어 간단히 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \rho b h \int_0^{2\pi} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} r d\theta \quad (15)$$

회전하는 링의 비선형 지배방정식을 유도하기 위하여 운동에너지와 변형에너지에 각각 변분을 취하여 Hamilton 원리에 적용하였다. Hamilton 원리는 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = 0 \quad (16)$$

위의 Hamilton 원리에 앞에서 구한 변형에너지와 운동에너지를 적용하면 면내변위와 면외변위가 연성된 비선형 지배방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\rho A(\ddot{u} - \Omega^2 r - \Omega^2 u - 2\Omega \dot{v} - 2\Omega^2 v' + 2\Omega \dot{u}' + \Omega^2 u'') + EA\left(\frac{u+v'}{r^2} + \frac{w'^2}{2r^3}\right) + EI_B\left(\frac{u''-v''}{r^4}\right) = 0 \quad (17)$$

$$\rho A(\ddot{v} - \Omega^2 v + 2\Omega \dot{u} + 2\Omega^2 u' + 2\Omega \dot{v}' + \Omega^2 v'') - EA\left(\frac{u'+v''}{r^2} + \frac{w'w''}{r^3}\right) + EI_B\left(\frac{u''-v''}{r^4}\right) = 0 \quad (18)$$

$$\rho A(\ddot{w} + 2\Omega \dot{w}' + \Omega^2 w'') - EA\left(\frac{u'w' + w'v'' + uw'' + v'w''}{r^3} + \frac{3w'^2 w''}{2r^4}\right) + EI_N \frac{w''}{r^4} = 0 \quad (19)$$

여기서, I_B, I_N 는 각각 면내 및 면외방향 관성모멘트를 나타낸다.

3. 지배방정식의 이산화

면내 및 면외 변위가 연성된 회전하는 링의 진동해석을 수행하기 위하여 앞 절에서 유도한 운동방정식에 Galerkin 근사해법을 적용하여 이산화를 수행하였다. 회전링의 주기적인 특성을 고려하여 본 연구에서는 sine 과 cosine 의 급수로 이루어진 근사함수를 아래와 같이 가정하였다.

$$u = \sum_{l=0}^N [C_l^u(t) \cos l\theta + S_l^u(t) \sin l\theta] \quad (20)$$

$$v = \sum_{m=1}^N [C_m^v(t) \cos m\theta + S_m^v(t) \sin m\theta] \quad (21)$$

$$w = \sum_{n=1}^N [C_n^w(t) \cos n\theta + S_n^w(t) \sin n\theta] \quad (22)$$

위 식에서 $C_l^u, S_l^u, C_m^v, S_m^v, C_n^w, S_n^w$ 는 시간 t 의 함수로 표현되는 일반좌표이며, N 은 변위 u, v, w 를 근사하는 근사함수의 총 개수이다. u 방향변위에서 l 이 0부터 시작하도록 가정한 이유는 링이 팽창하게 되는 경우를 표현하기 위해서 이다.

일반적으로 정지상태의 링에서는 sine 또는 cosine 만의 근사함수를 가정할 수 있으나 본 연구에서는 지배방정식의 변수분리가 불가능한 이유 때문에 근사함수로서 sine 과 cosine 이 조합된 형태의 일반적인 함수를 가정하였다. 일반적으로 Galerkin 방법에서는 시도함수와 같은 형태의 가중함수를 사용한다. 위 식 (20)-(22)를 이용하여 지배방정식을 공간이산화하면 다음과 같은 비선형 행렬 벡터 방정식을 얻을 수 있다.

Table 1 Material properties and dimensions of a ring

영률	E	$206 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$
밀도	ρ	$7.85 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}^4$
반지름	r	100 mm
두께	b	2 mm
높이	h	2 mm

$$M\ddot{X}(t) + 2\Omega M_C \dot{X}(t) + (K - \Omega^2 M_k)X(t) + N(X(t)) = F(t). \quad (23)$$

여기서,

$$X = \left\{ (X_u)^T, (X_v)^T, (X_w)^T \right\}^T, \quad (24)$$

$$X_u = \left\{ C_0^u, C_1^u, \dots, C_N^u, S_1^u, S_2^u, \dots, S_N^u \right\}^T, \quad (25)$$

$$X_v = \left\{ C_1^v, C_2^v, \dots, C_N^v, S_1^v, S_2^v, \dots, S_N^v \right\}^T, \quad (26)$$

$$X_w = \left\{ C_1^w, C_2^w, \dots, C_N^w, S_1^w, S_2^w, \dots, S_N^w \right\}^T. \quad (27)$$

또한, $N(X(t))$ 는 비선형 벡터를 나타낸다.

4. 진동 해석

식 (23)에 복소 고유치해석을 통해 진동해석을 수행하였다. 우선 이산화된 방정식의 선형부분만을 고려하여 기존의 연구결과와 비교함으로써 본 연구의 지배방정식을 검증하였으며 비선형방정식을 섭동법(perturbation method)을 사용하여 평형위치 부분에서의 선형화된 방정식으로부터 복소 고유치해석을 수행하여 면내변위가 면외변위에 미치는 영향에 대하여 알아보았다.

일반적으로 Galerkin 방법에서는 비교함수의 개수가 늘어남에 따라서 해가 수렴하는 특성을 보인다. 하지만 본 연구에서는 링의 고유함수인 sine 과 cosine 으로 이루어진 함수를 이산화에 사용하였기 때문에 함수의 수를 증가시키면 함수의 수만큼의 상위 고유치를 얻을 수 있다.

우선 이산화된 방정식의 선형부분만을 고려하여 복소 고유치 해석을 수행하고 기존의 연구자료와 비교 검증을 하였다. 사용된 물성치와 제원을 Table 1 에 나타내었다. 링의 회전속도에 따른 고유진동수 선도를 구하였는데 Fig. 2 에서 굵은 실선은 면외 방향의 고유진동수 선도이며 얇은 실선은 면내 굽힘방향의 고유진동수 선도이다.

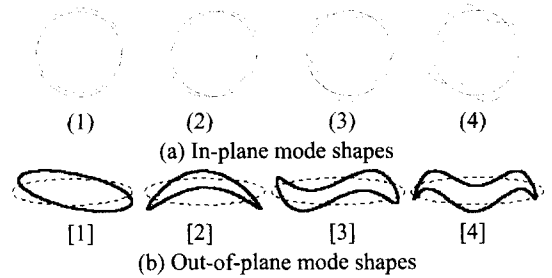
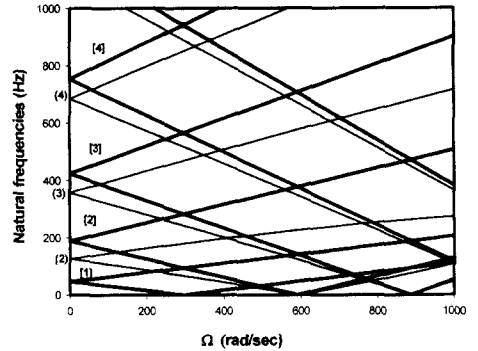


Fig. 2 Variation of the natural frequencies of a in-plane and out-of-plane bending for the spinning speed Ω , and mode shapes

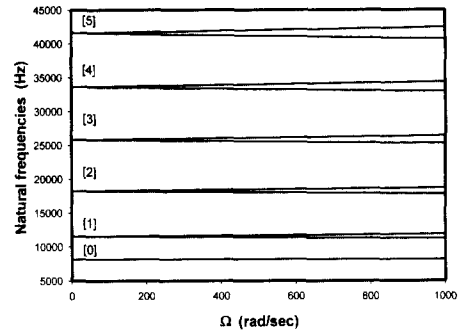


Fig. 3 Variation of the natural frequencies of extension for the spinning speed Ω

그리고 선형이론을 적용하였기 때문에 고유진동수와 회전속도 선도가 직선으로 나타남을 알 수 있다. 또한 Fig. 2 에서 면내(a) 및 면외방향(b)에 관한 고유형상도 함께 도시하였다. 면내방향의 1 차 모드는 고유진동수가 0 으로서 강제운동을 나타내며 2 차 모드부터 진동모드를 갖게 된다.

Fig. 3 은 회전속도에 대한 인장방향의 고유진동수의 변화를 나타내고 있는데, 면내 및 면외 방향 진동에 대한 고유진동수 보다 매우 큰 값을 갖고 있음을 확인할 수 있다. 따라서 인장방향의 진동은 현실적으로 면내 및 면외 방향의 진동에 비해

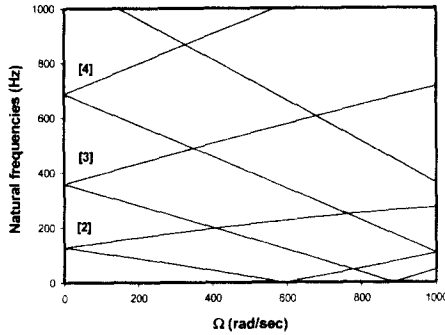


Fig. 4 Variation of the natural frequencies for the spinning speed Ω (Soedel⁽¹⁰⁾)

덜 중요하다고 말할 수 있다. 여기서 [0]차 모드는 링의 팽창을 나타낸다. Fig. 4는 인장효과를 고려하지 않고 링에 고정된 좌표계를 사용하여 구한 Soedel⁽¹⁰⁾의 연구결과를 관성좌표계로 변환하여 도시하였는데 이는 Fig. 2에서의 면내 굽힘 고유진동수 선도와 잘 일치하고 있다. 이로서 이산화된 식을 신뢰할 수 있다는 것과 인장방향의 변위는 면내 굽힘방향에 거의 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있다.

면외 방향과 이산화된 방정식에서 비선형성을 고려하지 않을 경우 면내변위와 면외변위가 서로 연성되어 있지 않아 면내변위가 면외변위에 영향을 줄 수 없다. 따라서 비선형항을 포함한 이산화 방정식으로부터 면내변위가 면외변위에 미치는 영향에 대해 알아보았다. 이를 위해 섭동법을 사용하여 평형위치와 평형방정식을 도출하고 평형위치에서의 고유진동수를 구하였다. 평형위치는 다음과 같은 식으로부터 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}_k) \mathbf{X}^* + \mathbf{N}(\mathbf{X}^*) = \mathbf{F}(t) \quad (28)$$

구해진 평형위치 근방에서 선형화된 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\Omega \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}_k + \mathbf{K}_T) \mathbf{X}(t) = 0 \quad (29)$$

여기서 \mathbf{K}_T 는 $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ 에서 비선형항 $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ 의 접선행렬이다.

본 논문에서의 링은 정속회전을 하고있는 링이므로 회전에 의해 발생하는 원심력에 의한 영향을 받는 면내 굽힘방향의 응력변화가 면외방향에 영향을 주어 고유진동수를 변화시키게 되지만 원심력의 영향을 받지 않는 면외방향의 변위는 면내방향의 변위에 영향을 주지 못한다. 따라서 면외방

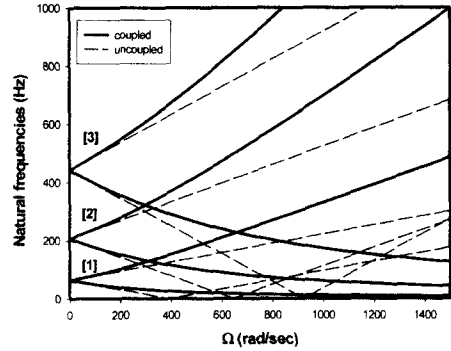


Fig. 5 Variation of the natural frequencies of the out-of-plane bending for the spinning speed Ω , when $b=2$ and $h=2$

향에 관한 비선형항을 포함하고있는 면내방향의 고유진동수는 선형의 경우와 다르지 않으므로 따로 도시하지 않았다.

식 (29)을 통해 구한 면외 방향 고유진동수 선도를 Fig. 5에 나타내었다. 실선과 점선은 각각 비선형인 경우와 선형인 경우의 고유진동수 선도를 나타낸다. 이 결과를 앞서 구한 선형의 경우와 비교해 볼 때 면내방향 변위의 영향을 받아 면외방향의 고유진동수가 선형의 경우와 많은 차이를 보인다는 것을 알 수 있다. 각속도 Ω 가 증가함에 따라 순방향과의 고유진동수는 큰 폭으로 상승하며, 역방향과의 고유진동수는 계속해서 완만하게 낮아지는 특성을 보인다. 또한 역방향 고유진동수가 0이 되는 위험속도점이 선형의 경우에 비해 매우 높은 회전속도에서 나타나게 된다. 각속도 Ω 가 증가하게 되면 $m r \Omega^2$ 만큼의 원심력이 더 작용하게 되므로 각속도가 증가하면 할수록 면내응력이 상승하여 면외방향의 고유진동수에 영향을 준다고 할 수 있다.

Fig. 5의 결과는 링 단면의 두께와 높이가 같은 경우의 결과이다. Fig. 6과 Fig. 7에서는 단면의 비율이 서로 다를 경우에 대한 면외방향 진동 해석을 보였다. Fig. 6은 두께가 높이에 비해 큰 경우 ($b/h=4$)이며 Fig. 7은 높이가 두께에 비해 큰 경우 ($b/h=1/4$)이다. 두께가 높이에 비해 큰 경우 면외방향 고유진동수는 낮아지며 반대의 경우에는 면외방향 고유진동수가 높아짐을 알 수 있다. 또한 회전 속도가 증가함에 따라 두께가 더 큰 경우에서 면내방향 변위의 영향이 면외방향 변위에 더 큰 영향을 미친다. 따라서 높이에 비해 두께가 두꺼운 링일수록 비선형성의 효과가 커지며 이를 고려해야 한다는 것을 알 수 있다.

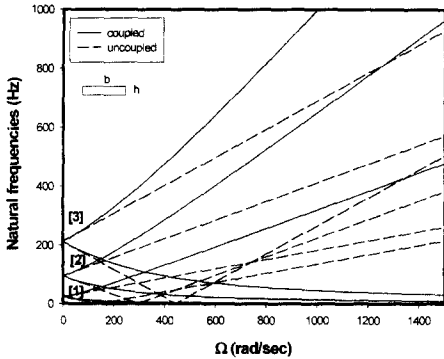


Fig. 6 Variation of the natural frequencies of the out-of-plane bending for the spinning speed Ω , when $(b/h=4)$

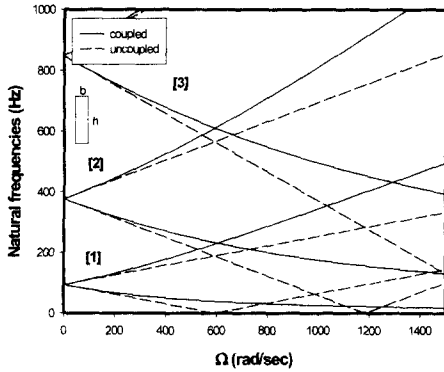


Fig. 7 Variation of the natural frequencies of the out-of-plane bending for the spinning speed Ω , when $(b/h=1/4)$

5. 결론

본 연구에서는 면내방향 및 면외방향 이 기하학적 비선형으로 연성된 각속도를 갖는 회전하는 링에 대한 진동해석을 수행하였다. von Karman 변위-변형을 관계식을 사용하여 면내와 면외변위가 비선형으로 연성된 지배방정식을 구하였고, Galerkin 방법을 적용하여 구해진 지배방정식에 대해 이산화된 방정식을 얻어내었다. 섭동법을 사용하여 비선형 방정식을 평형위치에서 선형화하고 복소고유치해석을 통하여 선형화된 방정식으로부터 각속도에 따른 고유진동수 선도를 구하였다.

면내와 면외 변위가 비선형으로 연성된 경우 회전속도가 증가함에 따라 면외방향의 변위가 면내 굽힘방향의 변위에 큰 영향을 받아 순방향 고유진동수는 큰폭으로 증가하게 되며 역방향 고유진동수는 완만하게 낮아지고 따라서 위험속도점이 매우 높아진다는 것을 보였다. 또한 원심력을 받지 않는 면외방향 변위는 면내방향변위에 영향을 미치지 않는다는 것을 보였다

참고문헌

- (1) Hoppe, R., 1871, "The Bending Vibration of a Circular Ring," *Crelle Journal of Mathematics*, Vol. 73, p. 158.
- (2) Rao, S. S., 1969, "In-Plane Flexural Vibration of Circular Rings," *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 91, pp. 620~625.
- (3) Kirkhope, J., 1976, "Simple Frequency Expression for the In-plane Vibration of Thick Circular Rings," *The Journal of the Acoustical Society*, Vol. 59, No. 1, pp. 86~89.
- (4) Evensen, D. A., 1966, "Nonlinear Flexural Vibrations of Thin Circular Rings," *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 553~560.
- (5) Carrier, G. F., 1945, "On the Vibration of the Rotating Ring," *Quart. Appl. Math.*, Vol. 3, No. 3, pp. 235~245.
- (6) Huang, S. C. and Soedel, W., 1987, "Effects of Coriolis Acceleration on the Free and Forced Inplane Vibration of Rotating Rings on Elastic Foundations," *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 115, No. 2, pp. 253~274.
- (7) Natsiavas, S., 1994, "Dynamics and Stability of Non-Linear Free Vibration of Thin Rotating Rings" *Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 29, No. 1, pp. 31~48.
- (8) Kirkhope, J., 1976, "Out-of-Plane Vibration of Thick Circular Ring," *Proc. of ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 102, No. EM2, pp. 239~247.
- (9) Maganty, S. P. and Bickford, W. B., 1987, "Large Amplitude Oscillations of Thin Circular Rings," *Trans. of ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 315~322.
- (10) Soedel, W., 1993, *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker.