

# 섬유 배열각의 이산성과 물성치의 불확실성을 고려한 복합재료 적층 평판의 최적 설계

김 태 욱\* · 신 호 철†

(2000년 1월 13일 접수, 2001년 1월 29일 심사완료)

## Optimal Design of Composite Laminated Plates with the Discreteness in Ply Angles and Uncertainty in Material Properties Considered

Tae-Uk Kim and Hyo-Chol Sin

**Key Words:** Stacking Sequence Optimization(적층 순서 최적화), Thickness Optimization(두께 최적화), Branch and Bound Method(분기법), Convex Modeling(컨벡스 모델링)

### Abstract

Although extensive efforts have been devoted to the optimal design of composite laminated plates in recent years, some practical issues still need further research. Two of them are: the handling of the ply angle as either continuous or discrete; and that of the uncertainties in material properties, which were treated as continuous and ignored respectively in most researches in the past. In this paper, an algorithm for stacking sequence optimization which deals with discrete ply angles and that for thickness optimization which considers uncertainties in material properties are used for a two step optimization of composite laminated plates. In the stacking sequence optimization, the branch and bound method is modified to handle discrete variables; and in the thickness optimization, the convex modeling is used in calculating the failure criterion, given as constraint, to consider the uncertain material properties. Numerical results show that the optimal stacking sequence is found with fewer evaluations of objective function than expected with the size of feasible region taken into consideration; and the optimal thickness increases when the uncertainties of elastic moduli considered, which shows such uncertainties should not be ignored for safe and reliable designs.

### 1. 서 론

섬유강화 복합재료 적층 평판은 기존의 등방성 재료에 비해 강성/무게, 강도/무게비가 뛰어나고, 사용 목적에 따라 여러 인자를 조정할 수 있는 설계의 유연성이 우수하데 항공기, 잠수함, 자동차 등의 경량화가 요구되는 부품 재료로 널리 사

용되고 있다. 따라서 복합재료 적층 평판의 최적 설계에 대해서는 많은 연구가 이루어졌으며, 주로 층(layer)의 두께와 섬유 배열각(ply angle)을 설계 변수로 하여 강성, 강도, 좌굴 하중, 무게 등의 다양한 목적 함수와 구속 조건을 이용하였다. 먼저 강도나 강성의 최적화에 관한 연구로는 Park<sup>(1)</sup>의 방법을 들 수 있다. 이는 고전 적층 이론을 이용해 미리 가정한 몇 개의 적층 순서에 대해 최초 파괴 조건(first ply Failure criterion)을 최소화하는 섬유 배열각을 계산하여 강도를 최대화한 방법이다. 또, Kim 등<sup>(2)</sup>은 Tsai-Wu 파괴 조건을 목적 함수로 하여 이를 최대화하는 적층 순서를 계산하였다. 그러나 모두 제한된 형태의 간단한 적층 순서에 대해, 섬유 배열각을 연속 변

\* 회원, 한국항공우주연구원

† 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : hyochol@gong.snu.ac.kr

TEL : (02)880-7140 FAX : (02)883-1513

수로 취급하였다. 한편, 강성을 최대화하는 방법으로는 목적 함수로 적층판의 변형 에너지를 최소화하는 방법이 널리 쓰였다. Tauchert와 Adibhalta<sup>(3)</sup>는 섬유 배열각을 연속 변수로 두고 고전 적층 이론을 이용하여 강성을 최대화하였고, Kam과 Chang<sup>(4)</sup>은 전단 변형을 고려하기 위해 1차 전단 이론을 이용하였는데 역시 섬유 배열각을 연속 변수로 취급하였다.

섬유 배열각과 층의 두께를 설계 변수로 두는 다단계 최적화(multilevel optimization)기법에 대한 연구도 있었는데, 이는 각 변수를 독립적으로 결정하는 두 개의 최적화 단계를 반복 계산하여 목적 함수를 최소화하는 방법이다. Kam과 Lai<sup>(5)</sup>는 섬유 배열각을 설계 변수로 강성을 최적화하고, 두께를 변수로 전체 무게를 최소화하였는데 섬유 배열각을 연속 변수로 취급하였다. Franco 등<sup>(6)</sup>은 고차 전단 이론을 사용하여 고유 진동수와 무게를 목적 함수로 두었고, Mota 등<sup>(7)</sup>은 좌굴 하중, 강성, 무게 등의 최적화를 하였는데 이상의 연구는 모두 섬유 배열각을 연속 변수로 취급하였다.

섬유 배열각을 이산 변수로 다룬 연구도 있었는데, Haftka와 Walsh<sup>(8)</sup>는 0 또는 1을 갖는 변수를 도입하여 고전 이론에 기초한 좌굴 하중을 최소화하였고, Adali 등<sup>(9)</sup>도 좌굴 하중과 관련된 다목적함수 최적화에 이러한 방법을 이용하였다. 한편 이와 같은 0-1 변수를 도입할 경우 설계 변수의 개수는 (층 층의 수) × (사용 가능한 섬유 배열각의 수)가 되어 층의 수가 늘어날 경우 설계 변수의 수가 상당히 증가하게 된다. 최근에는 유전 알고리즘을 이용한 연구가 이루어졌는데, Riche와 Haftka,<sup>(10)</sup> Sivakumar 등<sup>(11)</sup>의 연구를 들 수 있다.

이상의 연구들에서는 실제 사용에서 접할 수 있는 문제들이 제대로 고려되지 못한 점도 발견되는데 본 논문에서는 다음의 두 가지에 주목하였다.

첫째, 설계 변수의 측면에서 보면 대다수의 연구가 섬유 배열각을 연속 변수로 취급하였다. 그러나 실제의 경우 섬유 배열각은 연속 변수라기보다 0°, ±45°, 90° 등과 같이 사용할 수 있는 값이 제한되어 있다. 따라서 섬유 배열각을 설계 변수로 할 경우 이들의 조합에 의한 적층 순서(stacking sequence) 최적화가 이루어져야 하며, 층의 수와 사용 가능한 섬유 배열각의 수가 커지더라도 이를 효율적으로 다룰 수 있는 이산 변수

최적화 방법이 필요하게 된다.

둘째, 대부분의 연구가 물성치가 고정된 값을 가진다는 가정하에 이루어졌다. 그러나 복합재료 적층 평판의 물성치는 항상 어느 정도의 불확실성 또는 편차를 보이기 마련인데, 이는 강화 섬유의 부적절한 배열, 섬유와 매트릭스의 불완전한 접합 등 생산 공정상의 몇 가지 요인에서 비롯된다고 할 수 있으며 강성이나 강도에 반드시 영향을 미치게 된다. 따라서 설계의 안전성과 신뢰성을 확보하기 위해서는 이러한 물성치의 불확실성을 반드시 고려해야 할 것이다.

본 논문에서는 2단계 최적화 알고리즘을 적층 평판의 최적 설계에 적용하게 된다. 이 방법에서는 섬유 배열각과 층의 두께를 각각의 목적 함수에 대해 독립적으로 최적화하게 되며, 이러한 두 개의 최적화 단계를 모든 설계 변수가 수렴할 때까지 반복 계산하여 최적해를 얻게 된다.

이를 위해 앞서 언급한 섬유 배열각의 이산성과 물성치의 불확실성을 고려할 수 있는 적층 순서와 두께 최적화 모듈을 사용하게 된다. 즉, 적층 순서 최적화를 위해서는 정수 계획법에 많이 쓰이는 분기법(branch and bound method)<sup>(12,13)</sup>에 기초한 최적화 알고리즘을 이용하게 되고, 두께 최적화 과정에서는 파괴 조건의 계산에 컨벡스 모델링(convex modeling)<sup>(14~18)</sup>을 적용하여 물성치의 불확실성을 설계 단계에서 고려할 수 있는 방법을 제시하게 된다.

## 2. 최적화 이론

### 2.1 2단계 최적화 알고리즘

일반적인 복합재료 적층 평판의 최적화 문제는 식 (1)과 같이 기술할 수 있다.

Minimize  $F(X)$

subject to  $X_i^l \leq X_i \leq X_i^u \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$

$g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$

여기서  $N$ 은 설계 변수의 개수이고,  $m$ 은 구속 조건의 수이다. 또한 목적 함수,  $F(X)$ 로는 강성, 좌굴 하중, 강도, 고유 진동수 등이 널리 쓰인다. 본 논문에서는 복합재료 적층 평판의 최적 설계를 위해 식 (1)의 최적화 문제를 2단계로 나누어

풀게 된다. 즉, 1단계 최적화로 적층 평판의 강성이나 좌굴 하중을 최대화하는 적층 순서를 구하고, 2단계 최적화로는 1단계에서 구한 적층 순서에 대해 각 층의 두께를 설계 변수로 하여 파괴조건을 위배하지 않는 최소의 두께를 구하게 된다. 이러한 2단계 과정을 모든 설계 변수가 수렴할 때까지 반복 계산하면 전체적으로는 주어진 하중에 대해 파괴가 발생하지 않는 최소의 두께를 구하면서, 동시에 강성 또는 좌굴 하중을 최대화하는 적층 순서를 얻게 된다. 따라서 이러한 2단계 최적화 알고리즘의 구현을 위해서는 섬유 배열각과 층의 두께를 설계 변수로 하는 독립적인 최적화 모듈이 필요하게 된다. Fig. 1은 2단계 최적화 알고리즘의 흐름도를 나타낸 것이다.

2.2 적층 순서 최적화

본 논문에서는 적층 평판의 강성 또는 좌굴 하중을 최대화하는 적층 순서를 구하게 된다. 한편 강성의 최대화에는 목적 함수로 변형 에너지를 최소화하여, 적층 평판의 평균적인 강성을 최대화하는 방법을 사용하게 된다.

이러한 적층 순서 최적화에는 앞서 언급하였듯이 이산 변수 최적화가 요구되는데, 이를 위해

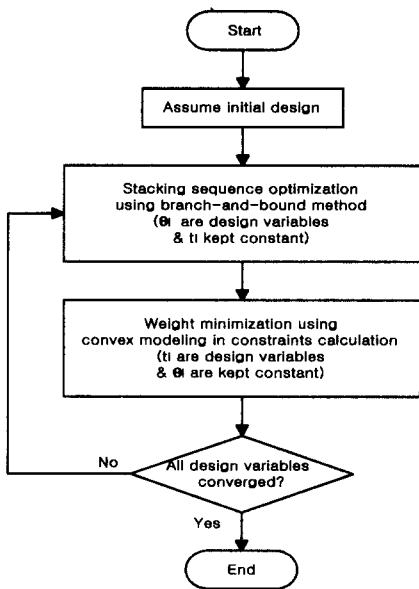


Fig. 1 Two step optimization of laminated plates

기존의 분기법에 기초한 수정된 알고리즘을 이용하게 된다. 분기법은 정수 변수 최적화 문제에 사용되는 가장 일반적이고 강력한 방법의 하나인데, 기본 원리는 최적해의 후보가 되는 정수 영역내의 모든 점들을 어떻게 효율적으로 하나하나 검사하느냐에 있다고 할 수 있다. 다음에서 기존의 분기법이 적층 순서 최적화에 적용되는 과정을 간략히 설명하기로 한다.

먼저 임의의 섬유 배열각,  $\theta_i$ 를 갖는 층의 강성 행렬 성분은 Tsai와 Pagano의 불변량,<sup>(19)</sup>  $U_i$  등을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (2)$$

$$Q_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (3)$$

$$Q_{66} = U_5 - U_3 \cos 4\theta \quad (4)$$

$$Q_{44} = \overline{Q_{44}} \cos^2 \theta + \overline{Q_{55}} \sin^2 \theta \quad (5)$$

$$Q_{55} = \overline{Q_{55}} \cos^2 \theta + \overline{Q_{44}} \sin^2 \theta \quad (6)$$

여기서  $\overline{Q_{ii}}$ 는  $\theta = 0$ 일 때의 강성이며,  $U_i$ 는 이들의 함수이다. 이 때 식 (2)부터 (6)까지의 대각 요소가 최대값을 가지는 경우는 다음과 같다.

$$(Q_{11})_{\max} = U_1 + U_2 + U_3 = \overline{Q_{11}} \quad (7) \quad (at \theta = 0)$$

$$(Q_{22})_{\max} = U_1 + U_2 + U_3 = \overline{Q_{11}} \quad (8) \quad (at \theta = \frac{\pi}{2})$$

$$(Q_{66})_{\max} = U_5 + U_3 = \frac{\overline{Q_{11}} + \overline{Q_{22}} - 2\overline{Q_{12}}}{4} \quad (9) \quad (at \theta = \frac{\pi}{4})$$

$$(Q_{44})_{\max} = \overline{Q_{55}} \quad (at \theta = \frac{\pi}{2}) \quad (10)$$

$$(Q_{55})_{\max} = \overline{Q_{55}} \quad (at \theta = 0) \quad (11)$$

식 (7)부터 (11)까지의  $(Q_{ii})_{\max}$ 를 동시에 강성 행렬의 대각 요소로 가진다는 것은 실제 일어날 수 없는 경우이다. 즉, 각 성분 모두 최대의 강성을 가지게 되는데, 이를 강성으로 가지는 층을 이상층(ideal layer)이라고 정의한다.

만약 임의의 적층 순서에 대해 실제 층의 강성을 모두 이상층의 강성으로 대체한 뒤 적층 평판의 변형 에너지를 구할 경우, 그 값은 원래의 값보다 항상 작거나 적어도 같게 된다. 즉,

$$W = \frac{1}{2} \{u_i\}^T [K_i] \{u_i\} \leq \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} \quad (12)$$

가 성립한다. 여기서  $\{u\}$ 는 변위 벡터,  $[K]$ 는 적층 평판의 강성 행렬을 나타내며 하첨자  $i$ 는 이상층으로 대체한 뒤 구한 값을 의미한다. 이러한 원리는 좌굴 해석에도 똑같이 이용될 수 있다. 즉, 좌굴 하중은 다음 식에 의해 결정된다.

$$([K] + \lambda[K_G])\{u\} = \{0\} \quad (13)$$

여기서  $[K_G]$ 는 기하학적 강성 행렬(geometric stiffness matrix)로 물성치와는 무관하다. 좌굴 하중은 위 식의 1차 고유치를 구하면 되는데, Rayleigh 계수와 다음의 관계를 가진다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min \rho(u) \\ &= \min \left( \frac{\{u\}^T [K] \{u\}}{\{u\}^T [K_G] \{u\}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

실제 층을 이상층으로 대체할 경우  $[K]$ 의 대각 요소만이 커지고  $[K_G]$ 는 변하지 않으므로, Rayleigh 계수의 최소값은 더 커지게 되고 따라서 좌굴 하중으로 더 큰 값을 얻게 될 것이다.

즉 목적 함수,  $F$ 가 변형 에너지나 좌굴 하중(압축 하중이므로 음의 부호이다.)일 경우, 다음 식이 성립한다. 식에서  $i$ 는 이상층을 나타낸다.

$$F([\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_N]) \geq F([i/i/\dots/i]) \quad (15)$$

$$F([\theta_1/i/\dots/i]) \geq F([i/i/\dots/i]) \quad (16)$$

$$F([\theta_1/\theta_2/i/\dots/i]) \geq F([i/i/\dots/i]) \quad (17)$$

$$F([\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_N]) \geq F([\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_{N-1}/i]) \quad (18)$$

식 (15)에서 (18)은 임의의 적층 순서가 주어졌을 때, 실제 층을 이상층으로 바꾸고 목적 함수를 계산하면, 그 값은 반드시 감소하거나 적어도 동일하다는 것을 보여준다. 즉 위 식의 우변은, 이상층이 존재하는 적층 순서에서 이를 임의의 섬유 배열각을 갖는 실제 층으로 바꾸고 계산한 목적 함수들의 하한치가 되는 것이다.

이상의 성질을 이용하여, 다음과 같이 기존의 분기법을 적층 순서 최적화에 적합하게 수정할 수 있다. 최적화의 첫 단계로 초기 적층 순서를 설정하고, 그 때의 목적 함수로  $F^*$ 를 얻는다. 다음 단계로 적층 평판의 모든 층을 이상층으로 대체한 뒤, 이상층을 하나씩 소거해가는 과정을 밟게 된다. 즉, 이상층에 의한 강성을 사용한 섬유 배열각에 의한 실제 강성을 갖는 층으로 바꾸게 되는 것이다. 이러한 과정에서 이상층이 존재하는데도 불구하고,  $F^*$ 보다 큰 값을 얻는 적층 순서에 대해서는 식 (15)~(18)에 따라, 더 이상의 탐색(이상층을 실제 강성층으로 대체하는 과정)이 필요없게 되어 계산상의 효율성을 확보하게 된다.

Fig. 2는 초기 적층 순서로  $s_1 \sim s_n$ 이 주어지고

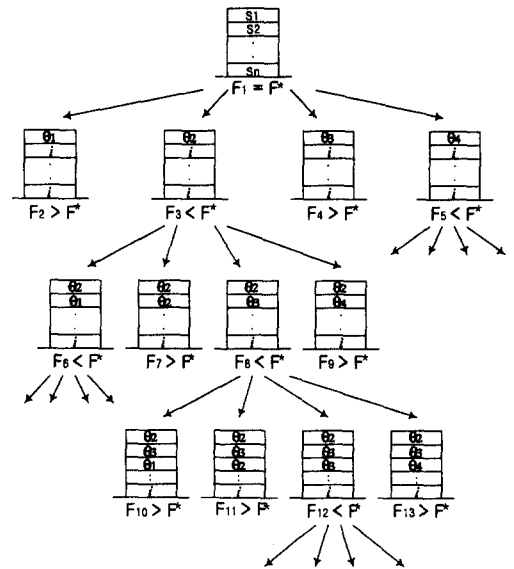


Fig. 2 Search for optimal stacking sequence using branch and bound algorithm

섬유 배열각으로  $\theta_1 \sim \theta_4$ 를 사용할 수 있을 때의 탐색 과정 일부를 도시한 것이다. Fig. 2에 나타난 과정을 모든 이상층이 소거될 때까지 수행하면 최적의 적층 순서를 얻을 수 있고,  $F^*$ 는 최종적으로 최적해일 때의 목적 함수가 됨을 알 수 있다.

### 2.3 두께 최적화

#### 2.3.1 유용 방향법

두께 최적화에서는 각 층의 두께를 설계 변수로 하여 전체 적층 평판의 두께를 최소화하게 된다. 즉 임의의 외부 하중이 작용할 때 주어진 구속 조건을 만족하는 최소의 두께를 구하게 되는데 식 (19)는 이를 정식화한 것이다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{NL} t_i \\ & \text{subject to} \quad G_j(X) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (19) \\ & \quad \quad \quad t_i' \leq t_i \leq t_i'' \quad i = 1, \dots, NL \end{aligned}$$

여기서  $G_j(X)$ 는 구속 조건인 파괴 조건식을 나타내며,  $m$ 은 파괴 조건식이 계산되는 지점의 수이다. 또한  $t_i'$ 과  $t_i''$ 는 층의 두께가 가질 수 있는 상, 하한값을 나타낸다.

파괴 조건은 Hoffman의 식을 사용하며, 모든 요소의 Gauss 적분점의 수직선상에 존재하는 층의 상, 하단에서 계산되어 그 만족 여부를 조사하게 된다. 따라서 전체 요소의 수가 많아지고 층의 수가 늘어나면 고려해야 될 구속 조건의 수도 늘어나는데, 최적화 과정의 매 단계에서 이를 모두 고려하는 것은 계산의 효율성 면에서 매우 비합리적이다. 본 논문에서는 이러한 특성이 있는 적층 평판의 두께 최적화 도구로서, 탐색 방향을 결정하는 매 단계에서 액티브한 구속 조건만을 고려하는 유용 방향법(method of feasible direction)<sup>(20)</sup>을 쓰게 된다. 실제 적층 평판의 파괴 조건을 계산해보면 대부분의 경우 액티브한 구속 조건의 수는 전체 구속 조건의 수에 비해 그리 많지 않으므로 이 방법은 매우 효율적이게 된다.

한편 탐색 방향을 결정하기 위해서는 구속 조건의 기울기(gradient), 즉 설계 변수  $t_k$ 에 대한 파괴 조건의 편미분값이 필요하다. 파괴 조건은

응력의 함수이므로 결국 응력 성분의  $t_k$ 에 대한 민감도,  $\left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial t_k} \right\}$ 를 알아야 하는데 이는 다음과 같이 구할 수 있다.

먼저 응력 해석을 위한 유한요소 지배 방정식을  $t_k$ 에 대해 미분하면

$$\frac{\partial [K]}{\partial t_k} \{u\} + [K] \frac{\partial \{u\}}{\partial t_k} = \frac{\partial \{F\}}{\partial t_k} \quad (20)$$

과 같이 되고,  $\{F\}$ 가  $t_k$ 에 무관하므로

$$[K] \frac{\partial \{u\}}{\partial t_k} = - \frac{\partial [K]}{\partial t_k} \{u\} \quad (21)$$

를 얻는다. 여기서  $\{u\}$ 는 절점에서의 변위 벡터이고,  $[K]$ 와  $\{F\}$ 는 각각 강성행렬과 하중 벡터를 나타낸다. 한편 응력-변형률, 변형률-변위 관계식,  $\{\sigma\} = [Q] \{\epsilon\}$ 와  $\{\epsilon\} = [B] \{u\}$ 를 이용하여 최종적으로 식 (22)를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \{\sigma\}}{\partial t_k} = \frac{\partial [Q]}{\partial t_k} [B] \{u\} + [Q] [B] \frac{\partial \{u\}}{\partial t_k} \quad (22)$$

#### 2.3.2 컨벡스 모델링을 통한 파괴조건의 계산

복합재료 적층 평판의 물성치는 생산 공정상의 결함, 물성치 측정상의 오차, 사용 환경 등의 여러 요인으로 인해 어느 정도의 불확실성 또는 편차를 보이게 마련이며, 강성이나 강도에 반드시 영향을 미치게 된다. 따라서 구속 조건으로 사용하는 파괴 조건식을 계산할 때, 이러한 물성치의 불확실성을 고려함으로써 설계의 안전성과 신뢰성은 더 향상될 것이다.

이러한 불확실성을 고려하기 위한 방법으로는 먼저 확률론적인 방법이 있다. 그러나 이 방법은 불확실성을 갖는 물성치의 확률 모델을 만들기 위한 충분한 자료가 있어야 하며, 자료가 불충분 또는 부정확할 경우 해석 오차가 커지는 단점을 가진다. 이에 대한 대안으로서 최근 활발한 연구가 진행되고 있는 컨벡스 모델링 기법을 들 수 있다. 컨벡스 모델링은 다양한 사례에 적용되었는데, 기하학적 불확실성을 갖는 탄성체의 응력

집중 문제,<sup>(15)</sup> 불확실한 가정을 받는 보와 평판의 진동 문제,<sup>(16)</sup> 형상에 있어 불확실성이 존재하는 보의 파괴 문제,<sup>(17)</sup> 불확실한 물성치를 갖는 적층 평판의 좌굴 문제<sup>(18)</sup> 등을 그 예로 들 수 있다.

컨벡스 모델링은 불확실성을 가지는 양을 다루기 위해, 확률분포함수가 필요한 확률론적인 접근법과 달리 분포 범위에 대한 정보만을 필요로 하는 방법이다. 예를 들어 파괴 조건식의 최대값을 구하고자 할 때, 물성치의 분포 범위에 대한 정보로부터 물성치의 편차가 존재하는 컨벡스 집합을 만들고, 파괴 조건식을 이들 편차에 대해 선형화하게 된다. 따라서 파괴 조건식의 최대값은 편차로 이루어지는 컨벡스 집합의 경계에 존재하게 되므로 계산량을 줄이며 근사적으로 물성치의 불확실성을 반영할 수 있게 된다.

다음에서 컨벡스 모델링을 통한 파괴 조건의 계산 과정에 대해 간략히 설명하기로 한다. 먼저 본 논문에서는 파괴 조건으로 Hoffman의 식을 쓰며, 식 (19)에 나타난 구속 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 G(X) = & \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} \right) \cdot \\
 & (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_T X_C} - \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} \right) \cdot \\
 & (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{1}{Z_T Z_C} \right) \cdot \\
 & (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \left( \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) \sigma_1 + \left( \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) \sigma_2 \\
 & + \left( \frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C} \right) \sigma_3 + \left( \frac{\sigma_4}{R} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_5}{S} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_6}{S} \right)^2 - 1
 \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 응력 성분은 재료주축(principal material axes) 방향에 대한 값이다. 또한  $X_T$ ,  $Y_T$ ,  $Z_T$ 는 인장 강도를,  $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $Z_C$ 는 압축 강도를 나타내며,  $R$ ,  $S$ 는 전단 강도이다.

해석의 첫 단계로 식 (23)의 구속 조건을 불확실성을 가지는 물성치의 편차에 대해 선형화시켜야 한다. 본 논문에서는  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$ 가 공칭값(nominal value)을 중심으로 일정 범위 내에 분포한다고 가정하였다. 이 때 식 (23)은 다음과 같이 이들 물성치의 함수로 나타낼 수 있다.

$$G = G(E_1, E_2, E_3, E_4) \quad (24)$$

$E_1 = E_L$ ,  $E_2 = E_T$ ,  $E_3 = \nu_{LT}$ ,  $E_4 = G_{LT}$ 로 표시했고, 각 계수는 파괴 조건에 직접 나타나지는 않으나 강성 행렬을 통해 그 영향을 미친다. 한편 각 물성치의 공칭값을  $E_i^0$ 라 하면  $E_i = E_i^0 + \delta_i$ 로 나타낼 수 있고, 그 때의 파괴 조건식  $G(E_i^0 + \delta_i)$ 는  $\delta_i$ 의 일차항까지를 고려한 Taylor 전개에 의해

$$G(E_i^0 + \delta_i) = G(E_i^0) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial G(E_i^0)}{\partial E_i} \delta_i \quad (25)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 다음과 같은 행렬을 정의한다.

$$\{f\}^T = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial G(E_i^0)}{\partial E_1} & \frac{\partial G(E_i^0)}{\partial E_2} \\ \frac{\partial G(E_i^0)}{\partial E_3} & \frac{\partial G(E_i^0)}{\partial E_4} \end{array} \right] \quad (26)$$

$$\{\delta\}^T = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4] \quad (27)$$

식 (26)과 (27)을 이용하면 식 (25)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(E_i^0 + \delta_i) = G(E_i^0) + \{f\}^T \{\delta\} \quad (28)$$

식 (28)은  $\delta_i$ 의 선형 함수이므로,  $\delta_i$ 가 만약 컨벡스 집합을 이룬다면 최대값은 반드시 집합의 경계면에서 가지게 되어 문제 해결은 한결 쉬워지게 된다. 따라서 해석의 다음 단계로, 이들 편차가 존재하는 컨벡스 집합을 만들어야 한다. 이를 위해 먼저, 실험이나 기타의 방법에 의해 구한 물성치의 범위가  $E_i^L \leq E_i \leq E_i^U$ 일 때, 공칭값과 최대 편차를 식 (29)로 정의한다.

$$E_i^0 = \frac{1}{2}(E_i^U + E_i^L), \quad \Delta_i = \frac{1}{2}(E_i^U - E_i^L) \quad (29)$$

따라서  $E_i$ 는 식 (30)으로 나타낼 수 있다.

$$E_i = E_i^0 + \delta_i, \quad |\delta_i| \leq \Delta_i \quad (30)$$

컨벡스 집합을 만들기 위해서  $|\delta_i| \leq \Delta_i$ 에 의해 만들어지는 상자(box)형태의 영역을 포함하는 타원체(ellipsoid) 모양의 집합을 가정한다.

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\delta_i^2}{e_i^2} \leq 1 \quad (31)$$

식 (31)의 타원체는  $V = C e_1 e_2 e_3 e_4$ 의 체적을 가지는데, 식 (30)에 의한 영역을 최소로 포함해야 한다. 왜냐하면 타원체의 체적이 커질수록 해의 정밀도가 낮아질 것이기 때문이다. 또한 이를 위해서는 식 (30)의 영역의 모서리 점들( $\delta_i = \pm \Delta_i$ )이 타원체의 경계에 존재해야 한다. 이상의 조건으로부터 다음과 같은 Lagrangian을 만들 수 있으며, 이를 최소화함으로써 식 (31)의  $e_i$ 를 구할 수 있다.

$$L = C e_1 e_2 e_3 e_4 + \lambda \left( \frac{\Delta_1^2}{e_1^2} + \frac{\Delta_2^2}{e_2^2} + \frac{\Delta_3^2}{e_3^2} + \frac{\Delta_4^2}{e_4^2} - 1 \right) \quad (32)$$

$\frac{\partial L}{\partial e_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ 의 조건을 대입하고 통상적인 방법을 통해 식 (33)의  $e_i$ 를 얻을 수 있다.

$$e_1 = 2\Delta_1, \quad e_2 = 2\Delta_2, \quad e_3 = 2\Delta_3, \quad e_4 = 2\Delta_4 \quad (33)$$

따라서 불확실성을 가지는 물성치가  $\delta_i$ 의 편차를 가질 때, 파괴 조건식의 최대값을 구하는 문제는 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$G_{\max} = \text{Max}_{\{\delta\} \in C(e)} (G(E_i^0) + \{f\}^T \{\delta\}) \quad (34)$$

$$C(e) = \left\{ \delta : \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_i^2}{e_i^2} = 1 \right\} \quad (35)$$

식 (34)의 최대값은 Lagrange multiplier를 도입하여 풀 수 있다. 이를 위해 먼저 식 (35)를 행렬식의 형태로 바꾸는데  $\{\epsilon\}$ 을  $\epsilon_{ii} = \frac{1}{e_i^2}$ 인 대각 행렬이라 정의하면 식 (35)는

$$\{\delta\}^T \{\epsilon\} \{\delta\} - 1 = 0 \quad (36)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 따라서 파괴 조건의 최대값은 식 (37)의 Lagrangian으로부터 구할 수 있으며, 최종적인 형태는 식 (38)과 같다.

$$L(\delta) = \{f\}^T \{\delta\} + \lambda (\{\delta\}^T \{\epsilon\} \{\delta\} - 1) \quad (37)$$

$$G_{\max} = G(E_i^0) + \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left( e_i \frac{\partial G(E_i^0)}{\partial E_i} \right)^2} \quad (38)$$

### 3. 수치 결과

#### 3.1 목적 함수와 구속 조건의 계산

최적화 과정에서는 적층 순서의 목적 함수로 변형 에너지와 좌굴 하중이 사용되고, 두께 최적화 과정의 구속 조건으로 파괴 조건이 사용된다. 이러한 적층 평판의 정적 및 좌굴 해석 도구로 Reddy의 고차 전단이론<sup>(21)</sup>에 기초한 유한요소법을 사용하였다. 이 방법에서는 변위  $u, v$ 를 두께 방향 좌표,  $z$ 의 3차 다항식으로 가정한 뒤 평판 상, 하단에서의 경계 조건을 적용하여 변위장을 결정하게 된다. 따라서 지그재그(zigzag) 분포를 보이는  $u, v$ 를 근사적으로 나타내고, 두께 방향에 대해 포물선 형태의 전단 응력 분포를 얻게 되어 전단 보정계수(shear correction factor)가 불필요하게 된다. 식 (39)는 이 이론에서 사용되는 변위장을 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) + z \left[ \psi_x - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ v &= v_0(x, y) + z \left[ \psi_y - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (39)$$

한편 본 논문에서는 중립면을 중심으로 적층 순서와 층의 두께가 대칭인 대칭형 적층 평판 (symmetric laminated plate)을 고려하였다. 해석 모델은 대칭성을 이용하여 전체 중립면의 1/4을 16 개의 요소로 분할하였다. 4절점 요소를 사용하였고, 강성 행렬은 감차 적분(reduced integration)을 이용하여 구하였다. 앞으로의 수치 결과에 이용된 물성치 및 각종 설계 자료는 다음과 같다.

- 초기 설계
  - 적층 순서 :  $[0/90/\dots/0/90]_s$
  - 층의 두께 :  $t_i = 0.1''$
  - 적층 평판의 크기 :  $16'' \times 16''$
  - 섬유 배열각 :  $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$
  - 층 두께의 범위 :  $0.005'' \leq t_i \leq 0.1''$
  - 작용 하중 : 사인(sine) 하중, 균일 하중
  - 경계 조건 : 단순지지(s.s.), 고정단(clamped)
  - 물성치 및 강도(T300/5208 graphite/epoxy)

$$E_L = 19.2 \times 10^6 \text{ psi}, \quad E_T = 1.56 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$G_{LT} = 0.82 \times 10^6 \text{ psi}, \quad G_{TT} = 0.49 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu_{LT} = 0.24, \quad \nu_{TT} = 0.49$$

$$X_T = 219.5 \times 10^3 \text{ psi}, \quad X_C = 246.0 \times 10^3 \text{ psi}$$

$$Y_T = Z_T = Y_C = Z_C = 6.35 \times 10^3 \text{ psi}$$

$$R = 9.80 \times 10^3 \text{ psi}, \quad S = T = 12.6 \times 10^3 \text{ psi}$$

3.2 알고리즘의 검증

섬유 배열각과 두께를 설계 변수로 하는 각각의 최적화 모듈을 독립적으로 실행하여, 적층 순서 최적화 알고리즘의 효율성과 물성치의 불확실성 고려의 필요성을 검증하였다.

먼저 적층 순서 최적화에 대해서는 최적해를 찾기 위해 수행된 목적 함수의 계산 횟수를 조사하여 알고리즘의 효율성을 알아보고자 하였다. 이를 위해 층의 수가 8, 12, 16, 20인 단순지지된 정사각 적층 평판에 대해 균일 하중하의 변형 에너지를 최소화(강성의 최대화)하거나 좌굴 하중을 최대화하는 적층 순서를 찾게 하였다. Table 1과 Table 2는 최적 적층 순서와 이 때 수행된 목적 함수의 계산수를 전체 설계 영역의 크기와 비교한 값을 나타낸 것이다. 여기서 괄호 안의 값은

Table 1 Results of Stiffness Maximization

Number of layers	Optimum	$f^*/f^0$	Objective evaluation
8	$[-45_2/45_2]_s$	0.5526	24(9.375)
12	$[-45_2/\pm 45/45_2]_s$	0.5754	92(2.246)
16	$[-45_3/45_3]_s$	0.6015	436(0.665)
20	$[-45_3/45_7]_s$	0.6308	2560(0.244)

Table 2 Results of Buckling Load Maximization

Number of layers	Optimum	$f^*/f^0$	Objective evaluation
8	$[-45/\pm 45/45]_s$	1.7640	20(7.813)
12	$[-45_2/45_4]_s$	1.7004	76(1.855)
16	$[-45_2/\pm 45/45_4]_s$	1.6223	412(0.629)
20	$[-45_3/45_7]_s$	1.5672	1380(0.132)

목적 함수 계산수 / 전체 설계 영역  $\times 100(\%)$ 에 의해 계산된 값이다. 또한  $f^*$ 는 최적해일 때의 목적 함수,  $f^0$ 는 초기 설계에 의한 목적 함수를 나타낸다.

Table에 나타난 결과로부터 최적해를 찾는 데 수행된 목적 함수의 계산 횟수는 전체 설계 영역 (가능한 적층 순서의 수)에 비해 현저히 적고, 이러한 경향은 층의 수가 많아질 경우에 더욱 뚜렷이 나타남을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서 사용하는 적층 순서 최적화 알고리즘이 강성이나 좌굴 하중을 최대화하는데 있어서, 계산상의 효율성을 지니면서 전역해를 찾을 수 있는 매우 효과적인 방법임을 알 수 있다.

다음으로 두께 최적화 과정의 파괴 조건 계산에서 물성치의 불확실성을 고려하는 것의 영향과 그 필요성을 검증하기 위해, 임의로 가정한 몇 가지 적층 순서에 대해 최적해를 구하고 불확실성을 고려하지 않은 경우와 비교하였다. 계산상의 편의를 위해 불확실성을 가지는 물성치는 모두 공칭값으로부터 최대  $\pm 10\%$ 의 편차를 보인다고 가정하였다. 사용된 적층 순서는 다음과 같다.



Laminate A : [0/90],

Laminate B : [ $\pm 45/0/90$ ],

Laminate C : [ $\pm 45/90/0/45/90/-45/0$ ],

Table 3은 최적화의 결과로 얻은 각 적층 평판의 목적 함수(두께)를 비교한 것이다. Optimum 1과 Optimum 2는 각각 물성치의 불확실성을 고려했을 때와 그렇지 않았을 때의 결과를 나타내며, 목적 함수의 증가량,  $\Delta h$ 는 다음 식을 따른다.

$$\Delta h = \frac{\text{Optimum 1} - \text{Optimum 2}}{\text{Optimum 2}} \times 100(\%) \quad (41)$$

**Table 3** Comparison of Objective Functions  
(a) Sinusoidal load, s.s.

Laminate	Optimum 1	Optimum 2	$\Delta h$
A	0.3460	0.3160	9.49
B	0.3164	0.2912	8.65
C	0.3564	0.3238	10.07

(b) Sinusoidal load, clamped

Laminate	Optimum 1	Optimum 2	$\Delta h$
A	0.2262	0.2022	11.87
B	0.2576	0.2334	10.37
C	0.2970	0.2610	13.79

(c) Uniform load, s.s.

Laminate	Optimum 1	Optimum 2	$\Delta h$
A	0.3666	0.3326	10.22
B	0.3944	0.3596	9.68
C	0.4360	0.3952	10.32

(d) Uniform load, clamped

Laminate	Optimum 1	Optimum 2	$\Delta h$
A	0.2646	0.2288	15.65
B	0.3016	0.2754	9.51
C	0.3500	0.3108	12.61

모든 경우에 대해 물성치의 불확실성을 고려했을 때, 최적해로 더 큰 값을 얻었고 그 증가폭은 적층 순서, 하중, 경계 조건에 따라 달라졌다. 증가폭을 보면 대략 8~15% 정도이며, 이로부터 설계의 안전성과 신뢰성을 위해서는 물성치의 불확실성을 고려하는 것이 필요함을 알 수 있다.

### 3.3 적층 평판의 최적 설계

최종적으로 2.1의 2단계 최적화 알고리즘을 이용하여 정사각 적층 평판의 최적 설계를 수행하게 된다. 한편 동일한 섬유 배열각을 갖는 층이 연속적으로 많이 존재할 때 적층 평판은 매트릭스(matrix) 균열 현상이 일어나기 쉬우며 가능한 이를 피해야 한다고 알려져 있다. 따라서 본 최적화 과정에서는 이러한 층의 수가 4개를 넘지 않도록 하는 구속 조건을 부가하였다. 또한 두께 최적화에서 구속 조건으로 사용하는 파괴 조건은, 모든 요소의 Gauss 적분점의 수직선상에 위치한 층의 상, 하단에서 계산되어 만족 여부를 조사하였다. 불확실성을 가지는 물성치는  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$ 이며, 최대 편차( $\delta$ )는 2.5, 5(%)의 두 가지를 가정하였다. 하중 및 경계 조건으로는 층의 수가 16개인 적층 평판에 대해 균일한 하중( $q_0 = 100 \text{ psi}$ )이 작용하고 단순지지된 경우를 고려하였다. (강성+두께), (좌굴 하중+두께) 최적화에 대해, Table 4에서는 물성치의 불확실성을 고려하지 않은 결과를 보였고, Table 5와 Table 6은 불확실성을 가질 때의 최적해와 두께의 상대적인 증가량 등을 나타낸 것이다. 최적해의 양상을 보면 두 경우 모두 적층 순서는 불확실성 정도에 관계없이 동일하고, 두께는  $\delta$ 에 비례하여 증가함을 알 수 있다. 한편 Fig. 3은 최대 편차량과 최적해의 증가량과의 관계를 그래프로 나타낸 것이며 이러한 경향이 잘 나타나 있다. 또한 최적해로 얻은 각 층의 두께를 보면 불확실성을 고려한다고 해서 그 값이 일률적으로 증가하지는 않았는데, 이로부터 안전율(safety factor)을 이용한 설계가 그리 효율적이지 않음을 알 수 있다.

## 4. 결론

본 논문에서는 섬유 배열각의 이산성과 물성치의 불확실성을 고려하여 복합재료 적층 평판의

**Table 4** Optimal Solutions with Uncertainty in Material Properties Neglected

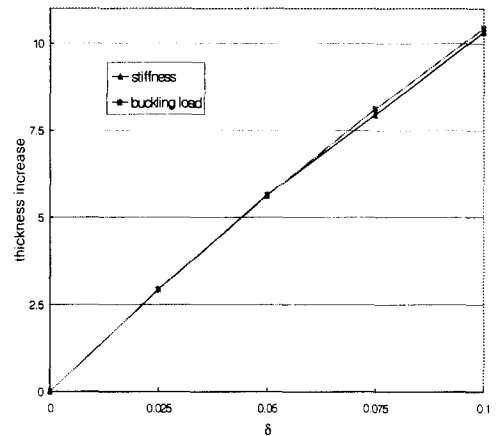
objective	Stiffness	Buckling load
stacking sequence	$[-45_2/45/-45_2/45_2/0]_s$	$[-45/45/-45_2/45_3/90]_s$
	$t_1 = 0.02148$	$t_1 = 0.02255$
	$t_2 = 0.02148$	$t_2 = 0.02255$
	$t_3 = 0.02148$	$t_3 = 0.05331$
layer thickness	$t_4 = 0.05664$	$t_4 = 0.03172$
	$t_5 = 0.05664$	$t_5 = 0.04594$
	$t_6 = 0.00546$	$t_6 = 0.00637$
	$t_7 = 0.00546$	$t_7 = 0.00637$
	$t_8 = 0.00526$	$t_8 = 0.00529$
initial thickness	1.6	1.6
final thickness	0.3878	0.3882

**Table 5** Optimal Solutions with Convex Modeling ( $\delta = 2.5\%$ )

objective	Stiffness	Buckling load
stacking sequence	$[-45_2/45/-45_2/45_2/0]_s$	$[-45/45/-45_2/45_3/90]_s$
	$t_1 = 0.02152$	$t_1 = 0.02342$
	$t_2 = 0.02152$	$t_2 = 0.02342$
	$t_3 = 0.02152$	$t_3 = 0.05474$
layer thickness	$t_4 = 0.05869$	$t_4 = 0.03288$
	$t_5 = 0.05869$	$t_5 = 0.04720$
	$t_6 = 0.00603$	$t_6 = 0.00638$
	$t_7 = 0.00603$	$t_7 = 0.00638$
	$t_8 = 0.00558$	$t_8 = 0.00535$
final thickness	0.39916	0.39954
thickness increase	2.93(%)	2.92(%)

**Table 6** Optimal Solutions with Convex Modeling ( $\delta = 5.0\%$ )

objective	Stiffness	Buckling load
stacking sequence	$[-45_2/45/-45_2/45_2/0]_s$	$[-45/45/-45_2/45_3/90]_s$
	$t_1 = 0.02332$	$t_1 = 0.02567$
	$t_2 = 0.02332$	$t_2 = 0.02567$
	$t_3 = 0.02332$	$t_3 = 0.05489$
layer thickness	$t_4 = 0.05943$	$t_4 = 0.03452$
	$t_5 = 0.05943$	$t_5 = 0.04763$
	$t_6 = 0.00540$	$t_6 = 0.00572$
	$t_7 = 0.00540$	$t_7 = 0.00572$
	$t_8 = 0.00524$	$t_8 = 0.00521$
final thickness	0.40972	0.41006
thickness increase	5.65(%)	5.63(%)



**Fig. 3** Thickness increase vs.  $\delta$

최적 설계를 수행하였다. 최적화에 이용한 적응 순서 최적화 알고리즘은 유전 알고리즘이 갖는 여러 장점을 지니고 계산량에 있어서도 효율성을 가지며 전역해를 찾을 수 있는 방법이다. 또한 두께 최적화 과정에 도입한 컨벡스 모델링 기법은 확률론적인 방법과 달리, 불확실성을 가지는

물성치의 분포 범위에 대한 정보만으로 이의 영향을 파괴 조건의 계산에 반영할 수 있는 방법이다. 정확한 물성치의 분포 양상을 알 경우에는 확률론적인 방법에 비해 정확도가 떨어진다고 볼 수 있으나, 현실적으로 엄밀한 분포 함수를 구하기가 어렵고 구속 조건의 계산 횟수가 상당히 많다는 점에 착안하면 최적화 과정에서 물성치의 불확실성을 고려하는 방법으로는 컨벡스 모델링이 보다 적합하다 하겠다. 이상의 최적화 기법은 자유경계면(*free edge*)을 갖는 파괴 문제나 동적 거동 등의 다양한 사례에 적용 가능할 것으로 보이며 이에 대한 연구가 진행중이다.

### 참고문헌

- (1) Park, W. J., 1982, "An Optimal Design of Simple Symmetric Laminates Under the First Ply Failure Criterion," *J. Compos. Mater.*, Vol. 16, pp. 341~355.
- (2) Kim, C. W., Hwang, W., Park, H. C., and Han, K. S., 1997, "Stacking Sequence Optimization of Laminated Plates," *Compos. Struct.*, Vol. 39, pp. 283~288.
- (3) Tauchert, T. R., and Adibhatla, S., 1984, "Design of Laminated Plates for Maximum Stiffness," *J. Compos. Mater.*, Vol. 18, pp. 58~69.
- (4) Kam, T. Y., and Chang, R. R., 1992, "Optimum Layup of Thick Laminated Composite Plates for Maximum Stiffness," *Eng. Opt.*, Vol. 19, pp. 237~249.
- (5) Kam, T. Y., and Lai, M. D., 1989, "Multilevel Optimal Design of Laminated Composite Plate Structures," *Comput. Struct.*, Vol. 31, pp. 197~202.
- (6) Franco Correia, V. M., Mota Soares, C. M., and Mota Soares, C. A., 1997, "Higher Order Models on the Eigenfrequency Analysis and Optimal Design of Laminated Composite Structures," *Compos. Struct.*, Vol. 39, pp. 237~253.
- (7) Mota Soares, C. M., Mota Soares, C. A., and Franco Correia, V. M., 1997, "Optimization of Multilaminated Structures Using Higher-Order Deformation Models," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 149, pp. 133~152.
- (8) Haftka, R. T., and Walsh, J. L., 1992, "Stacking-Sequence Optimization for Buckling of Laminated Plates by Integer Programming," *AIAA J.*, Vol. 30, pp. 814~819.
- (9) Adali, S., Richter, A., and Verijenko, V. E., 1997, "Optimization of Shear-Deformable Laminated Plates Under Buckling and Strength Criteria," *Compos. Struct.*, Vol. 39, pp. 167~178.
- (10) Riche, R. L., and Haftka, R. T., 1993, "Optimization of Laminated Stacking Sequence for Buckling Load Maximization by Genetic Algorithm," *AIAA J.*, Vol. 31, pp. 951~956.
- (11) Sivakumar, K., Iyenger, N. G. R., and Kalyanmoy Deb, 1998, "Optimum Design of Laminated Composite Plates with Cutouts Using a Genetic Algorithm," *Compos. Struct.*, Vol. 42, pp. 265~279.
- (12) Winston, W. L., *Introduction to Mathematical Programming*, Duxbury Press, California, 1995.
- (13) Hajela P., and Shii C. J., 1989, "Optimal Design of Laminated Composites Using A Modified Mixed Integer and Discrete Programming Algorithm," *Comput. Struct.*, Vol. 32, pp. 213~221.
- (14) Ben-Haim, Y. and Elishakoff, I., 1990, *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, Elsevier, Amsterdam.
- (15) Givoli, D., and Elishakoff, I., 1992, "Stress Concentration at a Nearly Circular Hole with Uncertain Irregularities," *J. Appl. Mech.*, Vol. 59, pp. 65~71.
- (16) Elishakoff, I., and Colombi, P., 1993, "Combination of Probabilistic and Convex Models of Uncertainty When Scarce Knowledge Is Present an Acoustic Excitation Parameters," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 104, pp. 187~209.
- (17) Ben-Haim, 1993, "Failure of an Axially Compressed Beam with Uncertain Initial Deflection of Bounded Strain Energy," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 31, pp. 989~1001.
- (18) Elishakoff, I., 1994, "A Deterministic Method

- to Predict the Effects of Unknown-but-Bounded Elastic Moduli on the Buckling of Composite Structures," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 111, pp. 155~167.
- (19) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, Tokyo, 1975.
- (20) Vanderplaats, G. N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill, New York, 1984.
- (21) Reddy, J. N., 1984, "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates," *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 745~752.