

모드해석과 관측기를 이용한 1 차원 온도분포의 실시간 예측

안중용* · 박영민** · 정성중***
(2000년 6월 9일 접수)

Real Time Estimation in 1-Dimensional Temperature Distribution Using Modal Analysis and Observer

Joong-Yong Ahn, Young-Min Park and Sung-Chong Chung

Key Words : Inverse Heat Problem(열전달역해석문제), Modal Analysis(모드해석), Observer(관측기), State Space Equation(상태공간방정식), Temperature Field(온도장)

Abstract

An inverse heat conduction problem(IHCP) arises when unknown heat fluxes and whole temperature field are to be found with temperature measurements of a few points. In this paper, observers are proposed as solution algorithm for the IHCP. A 1-dimensional heat transfer problem is modeled with modal analysis and state space equations. Position of the heat source is estimated through test heat inputs and the autocorrelation among a few of temperature data. The modified Bass-Gura method is used to design a state observer to estimate the intensity of heat source and the whole temperature field of a 1-dimensional body. To verify the reliability of this estimator, analytic solutions obtained from the proposed method are compared.

기호설명

A : 부재의 단면적
 \mathbf{A} : 상태공간방정식의 시스템 행렬
 a_H : 열원의 위치 ($0 \leq a_H \leq L$)
 \mathbf{B} : 상태공간방정식의 입력 벡터
 B_L, B_R : x 에 대한 선형 제차 미분연산자
 \mathbf{C} : 상태공간방정식의 출력 벡터
 h : 대류열전달계수
 k : 열전도계수
 k_u : 열원 입력 추정 이득 행렬
 \mathbf{L} : 상태변수 추정 이득 행렬 ($N \times 1$)
 L_{cond} : 전도에서 미분연산자, $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$
 L_{conv} : 대류에서 미분연산자, $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{hP}{kA}$

M : $1/\alpha$
 \mathbf{M}_0 : 가관측성행렬
 N : 모델링에 쓰이는 모드의 개수
 $N_n(t)$: n 번째 모드와 관련된 일반화된 열입력
 P : 부재의 주변길이
 $Q(x,t)$: $\frac{q(t)}{k} \delta(x-a_H)$
 $q(t)$: 단면적 당 발생된 에너지
 s_N : 모드 축소 기준식
 T_∞ : 주위온도
 T_i : 부재의 초기온도
 T_{Left}, T_{Right} : 부재 좌측과 우측면의 온도
 α : 열확산계수, $k/\rho c$
 β : 모드 선택을 위한 기준값
 Θ : 제차경계조건에서의 온도
 $\theta_n(t)$: n 번째 고유함수(모드)
 ϕ : 플랜트 특성방정식
 $\phi_c(t)$: 관측기 특성방정식
 A : $\alpha \lambda^2$
 $\eta_n(t)$: 시간에 따라 변하는 일반화된 좌표

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 삼성항공

*** 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : chung@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0444 FAX : (02)2298-4634

1. 서론

최근, 공간이 협소하거나 주위 환경 때문에 측정장비를 설치할 수 없는 곳의 열적 상태를 감시해야하는 데에 발생하는 어려움을 해결하기 위한 노력이 이루어지고 있다. 이러한 어려움은 로켓 노즐과 열차단장치가 필요한 항공산업과 핵발전소의 열해석에서 자주 발생한다.⁽¹⁾ 일부분에서 측정된 온도측정치로부터 열유속과 전체 온도를 계산하는 이 문제는 역해석문제(inverse problem)로 알려져 있다. 수학적으로 IHCP는 ill-posed 문제에 속하는 것으로서 측정데이터에서의 작은 오차는 추정치에서 큰 편차를 초래할 수 있다. 추정문제에서 ill-posedness의 물리적인 이유는 표면 상태에서의 변화가 열전도의 확산 성격 때문에 내부로 가면서 감쇄되기 때문이다.⁽²⁾

역해석 문제의 해법은 엄밀해법⁽³⁾(exact method), 파라미터추정^(3,4)(parameter estimation), 정격화기법⁽⁵⁾(regularization technology)과 차분법⁽⁶⁾(difference method) 등이 있다. 최근 개발된 방법들은 대부분 수학적 기법을 통해 측정 데이터에 대한 해의 민감도를 줄이기 위한 노력이다. 일부 연구자들은 열전달 문제를 재구성함으로써 역해석문제의 ill-posedness를 피하는 접근을 시도하고 있다. El Bagdouri와 Jarmy⁽⁷⁾는 역해석문제를 최적 경계 제어 문제로 재구성하여 일반적인 최적화 기법으로 해를 구하였다. Park과 Lee⁽⁸⁾는 Karhunen-Loève Galerkin 프로시저 기반의 모드축소에 의한 방법을 이용하여 역해석 문제를 풀었다. 그러나 기존의 방법들은 계산시간이 오래 걸리거나 전체시간의 온도측정치를 계산에 이용하기 때문에 실시간 예측에는 적용하기 어려운 단점이 있다.

실시간 예측에 대한 연구로서 상태변수와 외란 관측기에 의한 방법,⁽⁹⁾ 재귀최소오차자승법을 이용한 방법,⁽¹⁰⁾ 주파수 영역 접근법⁽²⁾ 등이 있다. 이 연구들은 측정잡음에 대한 민감도와 시간지연의 축소를 목적으로 하고 있다.

본 논문에서는 과도상태의 1차원 열전달 문제를 모드 해석과 고유치 축소기법을 이용하여 연속적인 상태공간 방정식으로 모델링한다. 시험 열 입력과 온도 데이터의 상호 상관을 이용하여 열원의 위치를 추정한 후 제안된 수정 Bass-Gura 방법을 이용하여 관측기를 설계한다. 관측기를 이용하여 한점의 온도측정으로부터 열원의 세기와 전체 온도장을 추정한다. 제안된 방법은 고차의 모드를 삭제하고 적분 형태의 관측기를 사용함으로써 측정 잡음에 대한 추정값의 민감도를 줄이는 효과가 있다. 전도 및 대류 문제에서 제시된 방법과 해석적인 해를 비교하여 그 정확성을 검증한다.

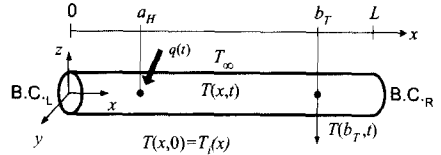


Fig. 1 1-dimensional heat problem

2. 모델링

2.1 지배 방정식

Fig. 1과 같이 y 또는 z 방향의 온도구배는 거의 없고 x 방향으로만 온도구배가 존재하는 요소에서의 비정상상태 1차원 열전달 문제는 다음과 같이 모형화 된다.

$$-\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{hP}{kA}[T(x,t) - T_\infty] \tag{1a}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{q(t)}{k} \delta(x - a_H)$$

$$T(x,0) = T_i(x) \tag{1b}$$

a. 온도 경계조건

$$T(0,t) = T_{Left}(t), \quad T(L,t) = T_{Right}(t) \tag{2a}$$

b. 단열 경계조건

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \tag{2b}$$

c. 대류 경계조건

$$-kA \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = hA[T_\infty - T(0,t)] \tag{2c}$$

$$-kA \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = hA[T(L,t) - T_\infty]$$

2.2 지배 방정식

2.2.1 전도열전달 모델

전도열전달에 대한 지배방정식은 식 (1)에서 h가 0인 경우이다. 모드해석을 열전달 문제에 적용시키기 위해 대류 경계조건을 제외한 식 (2)의 비제차 경계조건을 제차 경계조건으로 변환시켜야 한다. 먼저 대류 열전달 계수가 0일 때의 식 (1)과 식 (2)를 일반적으로 나타내면 다음 식과 같다.

$$L_{cond}[T(x,t)] + M \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = Q(x,t) \tag{3a}$$

$$B_L[T(x,t)]_{x=0} = l(t), \quad B_R[T(x,t)]_{x=L} = r(t) \tag{3b}$$

식 (3b)를 제차 경계조건으로 바꾸기 위해 다음을 가정한다.

$$T(x,t) = \Theta(x,t) + g(x)l(t) + h(x)r(t) \quad (4)$$

여기서 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 는 $\Theta(x,t)$ 에 대한 경계조건이 제차가 되게 선택되어야 하고, 식 (3)과 식 (4)로부터 다음과 같은 비제차 미분방정식이 구해진다.

$$\begin{aligned} L_{cond}[\Theta(x,t)] + M \frac{\partial \Theta(x,t)}{\partial t} \\ = Q(x,t) - \{l(t)L_{cond}[g(x)] + \dot{l}(t)Mg(x)\} \\ - \{r(t)L_{cond}[h(x)] + \dot{r}(t)Mh(x)\} \end{aligned} \quad (5)$$

고유치해석과 확장정리(expansion theorem)를 이용하여 식 (5)의 해를 식 (6)과 같이 가정하면, 식 (7)과 같은 무한개의 비연성상미분 방정식이 얻어진다.

$$\Theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x)\eta_n(t) \quad (6)$$

$$\dot{\eta}_n(t) + \Lambda_n \eta_n(t) = N_n(t), \quad n=1,2,\dots \quad (7)$$

여기서 $N_n(t)$ 은 식 (8), G_n , G_n^* , H_n , H_n^* , $Q_n(t)$ 는 식 (9), 초기조건은 식 (10)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} N_n(t) = Q_n(t) - \{G_n^* \dot{l}(t) + G_n \dot{r}(t)\} \\ - \{H_n^* r(t) + H_n \dot{r}(t)\} \quad n=1,2,\dots \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G_n = \int_0^L \theta_n(x)Mg(x)dx, G_n^* = \int_0^L \theta_n(x)L_{cond}[g(x)]dx \\ H_n = \int_0^L \theta_n(x)Mh(x)dx, H_n^* = \int_0^L \theta_n(x)L_{cond}[h(x)]dx \end{aligned} \quad (9)$$

$$Q_n(t) = \int_0^L \theta_n(x)Q(x,t)dx \quad n=1,2,\dots$$

$$\eta_n(0) = \int_0^L M\theta_n(x)\Theta(x,0)dx \quad (10)$$

2.2.2 대류열전달 모델

대류열전달 모델의 지배방정식은 $T_{em}(x,t) = T(x,t) - T_{\infty}$ 라 하면

$$L_{conv}[T_{em}(x,t)] + M \frac{\partial T_{em}(x,t)}{\partial t} = Q(x,t) \quad (11)$$

이 된다. 전도열전달 모델과 같은 과정을 거쳐 $T_{em}(x,t)$ 에 대한 문제를 $\Theta(x,t)$ 에 대한 비제차 미분방정식과 제차 경계조건으로 구성된 문제로 바

꾼다. 만일 경계조건과 열입력이 전도열전달 모델과 같은 경우라면 대류열전달 모델과 전도열전달 모델간의 차이는 고유치와 식 (9)의 G_n^* 와 H_n^* 값에서 나타난다. 예를 들어, 전도열전달 모델에서의 고유치가 $\alpha\lambda^2$ 이면, 대류열전달 모델에서의 고유치는 $\alpha(\lambda^2 + hP/kA)$ 가 된다.

2.3 모드축소를 이용한 상태공간방정식

관측기를 이용해 한 점의 온도 측정점으로부터 열입력의 세기와 x 구간 전체의 온도를 추정하기 위해 비연성화 된 식 (7)을 상태공간방정식으로 나타낸다. 그러나 무한개의 모드로 상태공간방정식을 만들기는 불가능하기 때문에, 모드축소가 필요하다. 주요 모드 선택의 근거를 부여하기 위해 다음과 같은 방법을 이용한다. $x = a_H$ 에서 일정한 열입력 $q(t)$ 가 들어오고 양끝단이 등온경계조건인 경우, 식 (7)은 다음과 같이 된다.

$$\dot{\eta}_n(t) = -\Lambda_n \eta_n(t) + \frac{1}{k} \theta_n(a_H) q_{const}, \quad n=1,2,\dots \quad (12)$$

여기서 $\theta_n(a_H)$ 는 열원의 n 번째 모드에 대한 기여도를 나타낸다. 초기 조건을 $\Theta(x,t) = 0$ 이라 가정하면 식 (12)의 해는 식 (13)이 된다.

$$\eta_n(t) = \frac{\theta_n(a_H)}{\Lambda_n} (1 - e^{-\Lambda_n t}) \frac{q_{const}}{k} \quad (13)$$

위의 결과로부터 정상상태에서의 시스템 전체의 열용적(heat content)⁽¹¹⁾을 식 (14)로 정의하고, 모드축소를 위한 기준 s_N 을 식 (15)와 같이 정의한다.

$$\int_0^L \Theta(x,t)M\Theta(x,t)dx = \left(\frac{\theta_1^2(a_H)}{\Lambda_1^2} + \frac{\theta_2^2(a_H)}{\Lambda_2^2} + \frac{\theta_3^2(a_H)}{\Lambda_3^2} + \dots \right) \frac{q_{const}^2}{k^2} \quad (14)$$

$$s_N^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\theta_i(a_H)}{\Lambda_i} \right)^2 \quad (15)$$

$\theta_i(a_H)$ 가 0인 모드는 제외하고 1에서부터 N 을 증가시키면서 다음의 수렴성이 만족되도록 N 을 선택한다.

$$\frac{s_N}{s_{N+1}} \geq \beta, \quad 0 < \beta < 1 \quad (16)$$

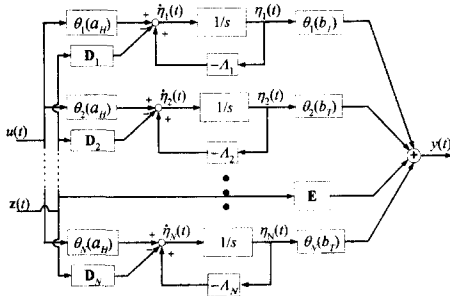


Fig. 2 Block diagram of state space model of heat transfer

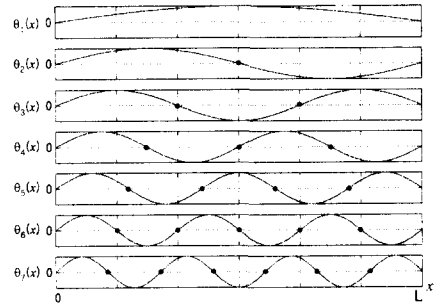


Fig. 3 Nodal points of mode shapes

식 (16)을 이용하여 모델링에 참여할 모드 수를 결정한 뒤 선택된 유한개의 모드로 다음과 같은 상태공간방정식을 구성한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) - Dz(t) \tag{17}$$

여기서,

$$x(t) = \{\eta_1(t) \ \eta_2(t) \ \dots \ \eta_N(t)\}^T, \quad u(t) = \frac{q(t)}{k}$$

$$z(t) = [l(t) \ \dot{l}(t) \ r(t) \ \dot{r}(t)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \square & & & \\ & -A & & \\ & & \square & \\ & & & \dots \\ & & & & -A_N \end{bmatrix}$$

$$B = [\theta_1(a_H) \ \theta_2(a_H) \ \dots \ \theta_N(a_H)]^T$$

$$D = \begin{bmatrix} \leftarrow D_1 \rightarrow \\ \leftarrow D_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow D_N \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^* & G_1 & H_1^* & H_1 \\ G_2^* & G_2 & H_2^* & H_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N^* & G_N & H_N^* & H_N \end{bmatrix}$$

그리고 $b_T(0 \leq b_T \leq L)$ 지점에 온도센서가 위치 한다면 출력 $y(t)$ 는 식 (18)과 같다. Fig. 2는 구성된 열전달 상태공간방정식의 블록선도이다.

$$y(t) = T(b_T, t) = Cx(t) + Ez(t) \tag{18}$$

여기서,

$$C = [\theta_1(b_T) \ \theta_2(b_T) \ \dots \ \theta_N(b_T)]$$

$$E = [g(b_T) \ 0 \ h(b_T) \ 0]$$

3. 센서위치 선정

3.1 가관측성을 위한 센서위치 선정

일반적으로 출력 $y(t)$ 에 모든 모드의 정보가 담겨지기 위해서는 가관측성행렬의 랭크(rank)가 N 이 되어야 한다. 즉 행렬 C 를 구성하는 $\theta_n(b_T)$

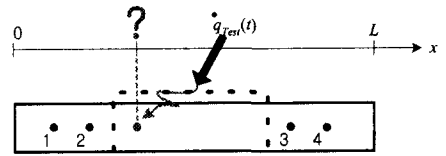


Fig. 4 Heat input location

중 하나라도 0이 되는 지점에 온도센서가 위치한다면 그에 해당하는 모드는 출력에 나타나지 않으므로 출력, 즉 그 위치의 온도로부터는 전체의 온도를 추정할 수 없다. 예를 들어 Fig. 3과 같이 모델링된 7개의 모드가 있을 때 그림에서 $b_T = L/2$ 인 위치에 온도센서를 위치시킨다면 두 번째, 네 번째, 여섯 번째 모드는 Fig. 2에 의해 출력에 반영되지 않는다. 그러므로 고유함수값이 0이 되는 지점에는 온도센서 설치를 피해야 한다.

3.2 열원 위치 추정을 위한 센서위치 선정

열원 위치 추정을 위한 방법에는 수치방법론⁽¹²⁾을 이용한 여러가지 방법들이 있으나 이들은 열원이 이동할 경우 실시간으로 온도를 추정하는 데는 적합하지 않다. 일반적으로 시스템에서 열원이 존재하는 대략적인 영역은 이미 알고 있는 경우가 대부분이다. 따라서 Fig. 4와 같이 열원의 정확한 위치는 모르나 다음과 같이 점선으로 표시된 영역에 열원이 존재한다고 가정한다.

열적 시스템에서 테스트 열입력 $u_{Tes}(t)$ 에 대한 임의의 온도 측정점 $x=c$ 에서의 출력 $\theta(c, t)$ 는 입력에 대해서 시간지연 τ_0 와 크기비 γ 를 가진다. 이때 γ 는 식 (19)로부터 구해지며⁽¹³⁾ 열입력과 온도 측정점 간의 거리에 반비례한다. 그러므로 기지의 열원을 가해 열원이 존재하는 영역 외부 양쪽에 각각 2점의 온도를 측정하여 테스트 열원과의 크기비 γ 를 구한 후 이들의 비례관계로부터 열원의 위치를 추정한다.

$$R_{u_{test}\theta}(\tau)_{peak} = R_{u_{test}\theta}(\tau_0) = \gamma(c)R_{u_{test}u_{test}}(0) \quad (19)$$

여기서 $R_{u_{test}\theta}(\tau)$ 는 테스트 입력과 출력간의 상호상관, $R_{u_{test}u_{test}}(\tau)$ 는 테스트 입력의 자기상관이다.

4. 관측기 설계

3.2 절에서 추정한 열원 위치에 대한 정보로부터 행렬 **B**를 구하면 관측기 시스템과 플랜트 시스템은 각각 식 (20)과 (21)로 표현할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{LC}] \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \hat{u}(t) - \mathbf{Dz}(t) + \mathbf{L}[y(t) - \mathbf{Ez}(t)] \quad (20)$$

$$\hat{y}(t) = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Ez}(t), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{LC}] \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) - \mathbf{Dz}(t) + \mathbf{L}[y(t) - \mathbf{Ez}(t)] \quad (21)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{Ez}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

열원 입력 $u(t)$ 를 추정하기 위해 식 (22)와 같이 열원이 미소 시간동안 일정하다고 가정하면 열원 추정 모델은 식 (23)과 같이 된다. 이 식의 의미는 온도 추정값이 측정값보다 작으면 열원의 추정값을 증가시키고, 반대의 경우에는 열원의 추정값을 감소시키는 것이다. 만약 온도 추정값과 측정값이 일치하면 그때의 식 (23)은 식 (22)와 같은 형태로써 열원의 추정값도 실제값과 일치한다는 것을 의미한다. 이 때 열원은 측정온도와 추정값의 차의 시간에 대한 적분형태로 구해진다. 적분은 고주파의 오차를 평활화시키기 때문에 측정 잡음에 대한 열원 추정값의 민감도는 미분을 이용하는 다른 방법보다 더 작다.

$$\frac{du(t)}{dt} = 0, \quad u(0) = u_0 \quad (22)$$

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = k_u[y(t) - \hat{y}(t)], \quad \hat{u}(0) = \hat{u}_0 \quad (23)$$

식 (20)~(23)을 이용하면 다음과 같은 오차 시스템의 방정식이 얻어진다. Fig. 5는 관측기 시스템과 플랜트의 블록선도이다.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_s(t) \\ e_n(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{LC} & \mathbf{B} \\ -k_u \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_s(t) \\ e_n(t) \end{pmatrix} \quad (24)$$

여기서, $e_s(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$, $e_n(t) = \hat{u}(t) - u(t)$.

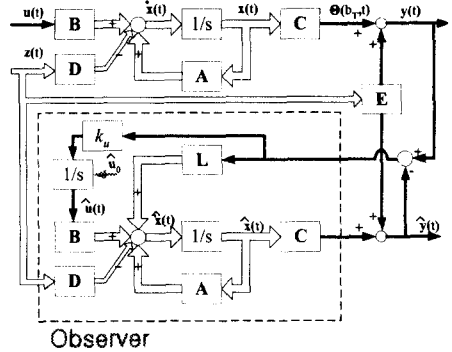


Fig. 5 Block diagram of combined system

열원 또는 온도가 정확히 추정되기 위해서는 식 (24)에서 오차 행렬이 0으로 수렴해야 한다. 이것은 오차시스템이 안정된 행렬이어야 하는 것을 의미한다. 즉 오차시스템 행렬의 특성방정식의 근이 모두 좌반평면에 위치하도록 상태변수 추정 이득 행렬 **L**과 열원 입력 추정 이득 k_u 가 결정되어야 한다.

일반적인 선형시스템의 관측기 설계에서 플랜트 시스템과 관측기 시스템의 이득이 독립적으로 결정되는 것과는 달리, 본 논문에서 제안한 관측기에서는 상태변수 추정 이득 행렬 **L**과 열원 입력 추정 이득 k_u 는 동시에 결정되어야 한다. 이를 위해 다음과 같이 Bass-Gura 방법⁽¹⁴⁾을 수정한 새로운 이득 결정법을 제안한다.

N개의 모드를 선택하고 이득값을 임의의 값으로 가정하였을 때, 오차의 시스템 행렬식 (25)로부터 얻어진 특성방정식의 계수로 이루어진 벡터를 \mathbf{a}_o 라 한다. 또한 식 (27)로 주어지는 플랜트 특성방정식의 계수로 구성된 벡터를 \mathbf{a}_p 라 하고 특성방정식을 전개하여 계수들을 비교하면 이득 행렬과 $(\mathbf{a}_o - \mathbf{a}_p)$ 사이에는 식 (29)와 같은 관계가 성립한다.

만약 임의의 값으로 가정한 이득값들이 관측기 오차시스템의 특성방정식의 근이 모두 좌반평면에 위치하도록 결정되었다면 오차는 0으로 수렴하게 된다. 반대로 관측기를 설계할 때 관측기 오차시스템의 극점을 모두 좌반평면에 위치시키면 오차는 0으로 수렴시키는 추정 이득 행렬 **L**과 k_u 가 결정된다. 여기서 \mathbf{a}_p , \mathbf{M}_o , **B**, **S**는 플랜트가 결정될 때 이미 결정된 값이므로 오차시스템의 특성방정식의 근 즉, 극점을 $s_i = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}$ 로 규정하면 모든 μ_i 를 모두 좌반평면에 위치시키면 추정오차가 0으로 수렴되는 관측기가 설계된다.

$$\begin{aligned} \phi_o(s) &= \det \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{LC} & \mathbf{B} \\ -k_u\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= s^N + \alpha_{N-1}s^{N-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{a}_o = [\alpha_N \ \dots \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_0]^T \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_N) \\ &= s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \dots + a_1s + a_0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathbf{a}_p = [a_{N-1} \ \dots \ a_1 \ a_0 \ 0]^T \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ k_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & | & 0 \\ \mathbf{3}^T \mathbf{M}_o & & & | & \mathbf{3}^T \mathbf{M}_o \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} (\mathbf{a}_o - \mathbf{a}_p) \quad (29)$$

여기서,

$$\mathbf{3} = \begin{bmatrix} 1 & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{N-1} & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & a_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 제안된 방법의 검증

5.1 양쪽 등은 경계조건을 가지는 전도 문제

제안된 추정방법을 검증하기 위해 Fig. 6 과 같이 양쪽 등은 경계조건을 갖는 1 차원 부재의 온도 분포를 추정하였다. 해석적 해와의 용이한 비교를 위하여 부재의 크기, 경계조건 및 물성치는 아래와 같이 결정하였다. 초기조건은 모든 해석 구간에 대해서 25°C, 경계조건은 $T_{Left}(t)$, $T_{Right}(t)$ 각각 25°C, 40°C로 일정하다. 부재의 길이 L 은 3 m, 열원 위치 a_H 는 1 m, 열전도 계수 k 는 $2 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, 열확산계수 α 는 $2 \text{ m}^2/\text{s}$, 열원의 크기 $q(t)$ 는 60 W/m^2 이다.

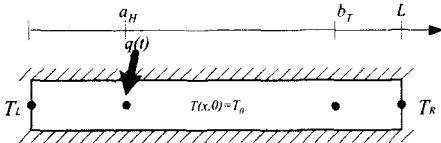


Fig. 6 Conduction problem

제안된 방법을 적용하는 첫 단계는 모드축소를 통해 열전달방정식을 상태공간방정식으로 재구성하는 것이다. β 를 크게 하면 할수록 엄밀해에 가까운 해를 제공하는 상태공간방정식을 얻을 수 있지만, 계산량과 계산시간이 그 만큼 커지는 부효과가 발생한다. 따라서 정확도와 계산량 사이의 trade-off가 불가피하다. 본 논문에서는 시행착오를 거쳐 β 를 0.9995로 하였으며, 이때 상태공간방정식 모델에 참여하는 모드는 7 개가 된다. 출력 온도센서 위치는 가관측성을 위한 센서 위치 선정법에 따라 $x=2.2$ 로 지정되었다. 열원의 위치는 $0.5 \leq a_H \leq 2$ 구간에 존재한다고 가정하고 열원 위치 추정법을 적용했을 때 $a_H \approx 1.007$ 로 추정되었다.

이상으로부터 구해진 7 개 모드의 상태공간방정식으로부터 주어진 열원에 대한 전체 온도장을 Fig. 7에 해석적으로 구한 온도장을 Fig. 8에 나타내었다.

열원 추정의 특성은 관측기 특성방정식에 의해 결정되는 관측기의 이득에 의해 영향을 받는다. 일반적으로 제어기에서 관측기의 극점은 관측기의 동특성이 시스템의 동특성보다 빠르도록 결정되기 때문에 관측기의 이득이 클수록 좋다. 그러나 관

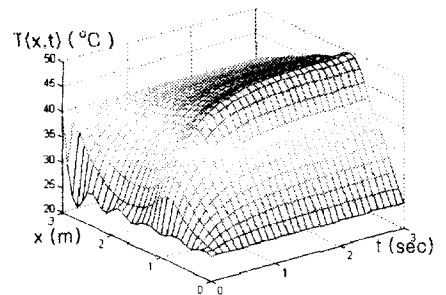


Fig. 7 Temperature field (state space model)

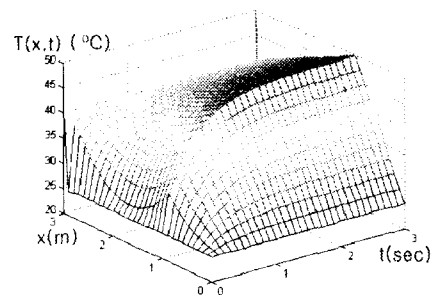
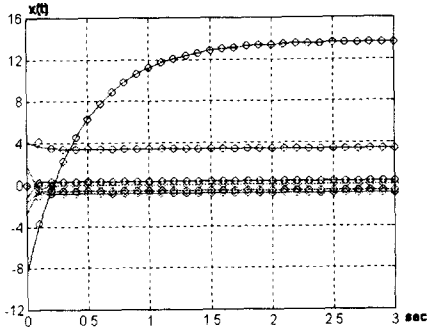
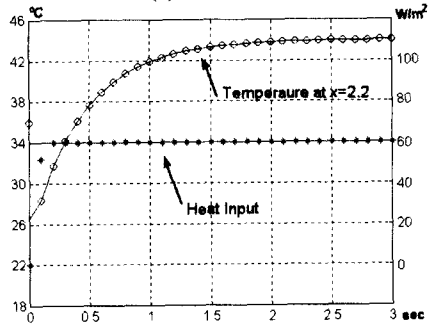


Fig. 8 Temperature field (exact solution)



(a) State variables



(b) Heat input intensity and temperature at $x = 2.2$

Fig. 9 Estimated results (o, * : estimates)

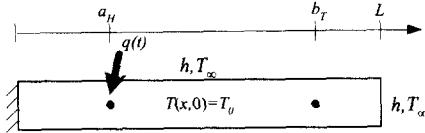


Fig. 10 Convection problem

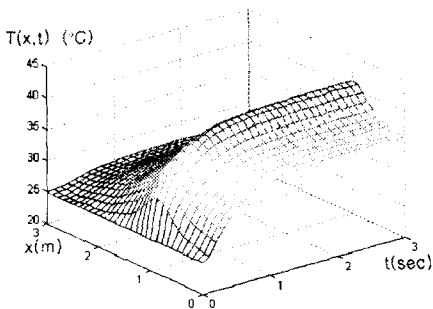


Fig. 11 Temperature field (state space model)

측기의 이득이 너무 크면 신호 잡음에 의한 영향이 커진다. 따라서 관측기의 이득은 응답성과 잡음에 의한 영향의 trade-off 에 의해 결정된다. 본 논문에서는 이런 trade-off 에 의해 특성방정식의 근을 식 (30)과 같이 결정하였다.

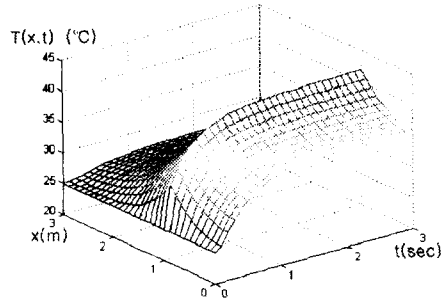
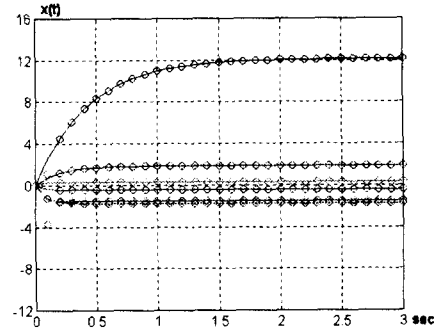
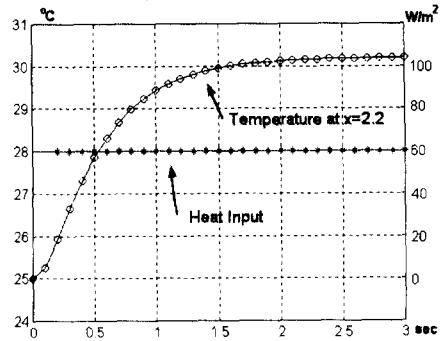


Fig. 12 Temperature field (exact solution)



(a) State variables



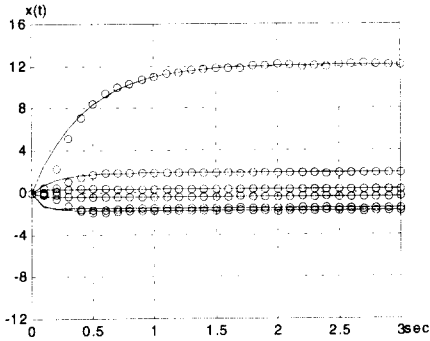
(b) Heat input intensity and temperature at $x = 2.2$

Fig. 13 Estimated results (o, * : estimates)

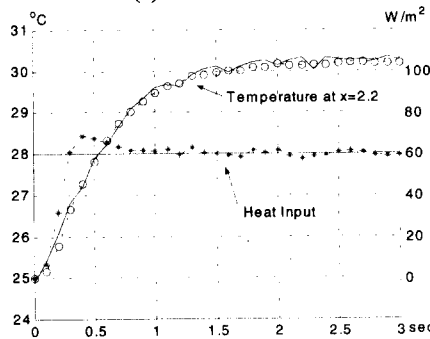
$$\mu_l = 3A_N, \quad \mu_{n+1} = \mu_n + 1, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

식 (29)에서 제안된 수정 Bass-Gura 방법으로 결정된 추정 이득 값은 다음과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} -0.4656 \\ -0.8011 \\ -1.0699 \\ 0.5101 \\ -0.1151 \\ 0.0017 \\ 0.0715 \end{bmatrix} \times 10^{10}, \quad k_u = 7.6748 \times 10^{10} \quad (31)$$



(a) State variables



(b) Heat input intensity and temperature at $x = 2.2$

Fig. 14 Estimated results (o, * : estimates)

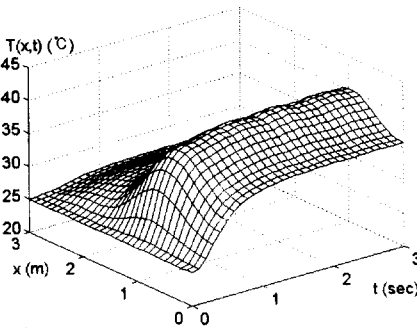
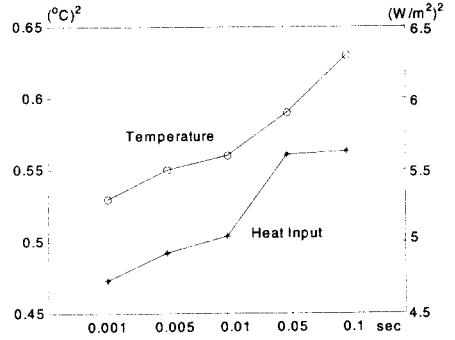


Fig. 15 Estimated temperature field with noise added temperature data

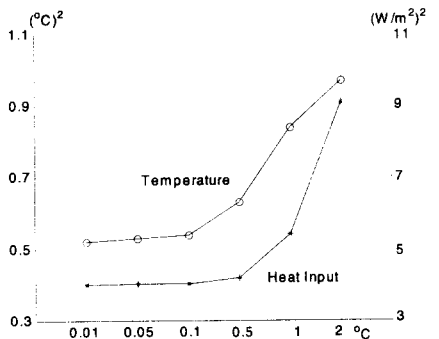
Fig. 9 는 각각 열원 입력, 상태변수, $x = 2.2$ 에서 온도에 대한 실제값과 추정값을 나타낸 것이다. 실제값을 추정하는 데에 200ms 이 걸렸다. 일반적인 기계구조물의 열적 시정수는 수분에서 수시간에 이르고 열원도 1Hz 보다 훨씬 작은 저주파로 변하기 때문에 기계 구조물의 열원 추정에 있어서 200ms 의 추정시간은 실시간으로 간주할 수 있다.

상태공간방정식 구성에 이용되는 모드개수는 추정 가능한 열원의 주파수의 한계에 영향을 미친다.

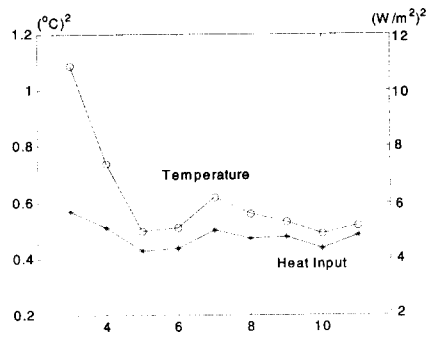
모드개수가 플랜트 및 관측기 시스템의 차수를



(a) Errors vs. measuring time step



(b) Errors vs. magnitude of noise



(c) Errors vs. number of modes

Fig. 16 Results of sensitivity analysis

결정하기 때문에 모드개수가 작아지면 시스템의 차수도 작아지고 추정이득도 작아져 시간지연이 커지기 때문에 큰 주파수의 열원 추정이 어려워진다. 그러나 모드개수를 너무 크게 하면 시간지연은 작아지지만 과도상태에서 오버슈트가 커지는 단점이 있다. 따라서 시간지연과 오버슈트 사이의 trade-off 를 통해서 모드개수를 정해야 한다.

5.2 단열과 대류 경계조건을 가지는 대류 문제 식 (3a)를 지배방정식으로 하고 초기조건은 모

든 해석구간에 대해서 25℃로 일정하며 경계 조건은 한쪽은 단열 다른 한쪽은 대류로서 식 (32)와 같다. 부재의 크기, 열원위치, 물성치는 열전도 문제와 동일하고, 대류 열전달계수 h 는 $2 W/m^2 \cdot C$, 주위온도 T_{∞} 는 25℃, P/A 는 $1(m^2)^{-1}$ 이다.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_{em}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \\ -kA \left. \frac{\partial T_{em}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} &= hAT_{em}(L,T) \end{aligned} \quad (32)$$

열전도 문제와 동일한 과정을 적용하면 6 개의 모드를 이용하여 상태공간방정식을 구할 수 있다. 상태공간방정식으로부터 구한 전체 온도장과 해석적으로 구한 온도장을 각각 Fig. 11 과 Fig. 12 에 나타내었다. Fig. 13 은 각각 열원입력, 상태변수, $x=2.2$ 에서 온도의 실제값과 추정값을 보인 것이다. 전도 열전달 문제와 마찬가지로 200ms 내에 실제값이 잘 관측되고 있음을 알 수 있다.

5.3 측정잡음이 존재하는 경우의 추정

위의 추정결과들은 온도측정치에 측정잡음이 없는 경우이다. 그러나 실제 온도측정치에서는 측정잡음이 존재하며 이는 역해석문제의 ill-posedness 때문에 추정오차에 큰 영향을 미치게 된다.

5.2 절의 시뮬레이션에 사용된 온도측정치에 평균 0, 표준편차 0.1 로 정규분포하는 측정잡음을 삽입하여 열원입력과 전체온도장을 추정하였다. 이 때 측정시간 간격은 0.01 초이고 사용된 모드개수는 6 개이다. Fig. 14 는 각각 열원입력, 상태변수, $x=2.2$ 에서 온도의 실제값과 추정값을 보이고, Fig. 15 는 추정된 열원입력으로부터 계산된 전체 온도장을 보인 것이다. 온도측정치에 측정잡음이 존재하는 경우에도 ill-posedness 에 의해 잡음이 크게 증폭되는 현상이 발생하지 않고 실제값을 잘 추정하고 있음을 확인할 수 있다. 온도 추정치는 측정잡음이 오히려 줄어드는 결과를 보이고 있다.

제안된 관측기를 통한 온도추정 알고리즘의 측정잡음에 대한 민감도를 파악하기 위하여 측정시간 간격, 측정잡음의 크기, 모드 개수를 변화시키면서 열원을 추정했을 때 열원과 온도 분포에 대해서 실제값과 추정값 사이의 오차제곱평균을 Fig. 16 에 보였다.

추정오차는 측정시간 간격에 비례해서 커지고 있다. 또한 잡음의 크기가 커질수록 추정오차는 증가하고 있지만 0.1 이하에서는 거의 추정오차의

차이가 없으며 0.5 이상에서 추정오차의 증가폭이 커지고 있다. 모드개수에 대해서는 모드개수가 증가할수록 오차가 줄어들기는 하지만 5 개 이후에는 소폭의 증가와 감소를 반복하고 있다. 이는 모드개수가 증가하면 엄밀해에 가까워져서 편중오차는 감소하여 일정값에 거의 수렴하지만 측정잡음에 의한 오차는 오히려 더 커질 수 있기 때문이다.

6. 결 론

본 논문에서는 과도상태의 1 차원 열전달 문제를 모드 해석과 상태공간 방정식을 이용하여 모델링 하였다. 시험 열 입력과 몇 개의 온도 데이터의 상호 상관을 이용하여 열원의 위치를 추정한 후 제안된 수정 Bass-Gura 법을 이용하여 상태 관측기를 설계하고 이를 이용하여 열원의 세기와 전체 온도장의 실시간 추정 방법을 제시하였다. 이 방법은 수학적인 일반적 접근으로 실시간으로 연속적인 전체 온도장의 추정이 가능하기 때문에 기존 연구의 단점이었던 제한된 열원 입력에 대해서만 정확한 해를 제공하거나 한정된 이산 점에서만 온도를 추정할 수 있다는 점을 극복하였다. 또한 고차의 모드를 삭제하고 적분 형태의 관측기를 사용함으로써 측정 잡음에 대한 추정값의 민감도를 줄이는 효과가 있다. 온도측정치에 측정잡음이 없는 경우와 존재하는 경우 모두 200ms 내에 실제값이 잘 추정되고 있다.

공작기계의 정밀도에 크게 영향을 미치는 볼스크류의 열오차는 볼스크류가 기하학적으로 세장비가 크고 열전도계수가 크기 때문에 1 차원 열전달 문제로 가정할 수 있다. 그런데 볼스크류는 계속해서 회전하고 너트가 이동되기 때문에 열원의 크기나 전체 온도분포를 직접 측정하는 것은 불가능하다. 따라서 본 논문에서 제시한 방법을 이용하면, 하나의 온도 측정으로 열원의 크기와 전체 온도를 실시간으로 측정하여 볼스크류의 열변형을 추정하고 보정하는 것에 응용할 수 있다.

참고문헌

- (1) Bass, B. R. and Ott, L. J., 1980, *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Pineridge Press, Swansea, England, pp. 649~661.
- (2) Blum, J. and Marquardt W., 1997, "An Optimal solution to Inverse Heat Conduction Problems Based On Frequency-Domain Interpretation and Observers," *Numerical Heat Transfer(B)*, Vol. 32, pp. 453~478.

- (3) Beck, J. V., Blackwell, B., and Clair, C. St., 1985, *Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems*, John Wiley, New York.
- (4) Deuffhard, P. and Hairer, E., 1983, *Numerical treatment of Inverse Problems in Differential and Integral Equations*, Birkhäuser, Boston.
- (5) Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y., 1977, *Solution of Ill-posed Problems*, Winston, Washington, DC.
- (6) Hensel, E. and Hills, R. G., 1986, "An initial value approach to the inverse heat conduction problem," *Trans. ASME J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 248~256.
- (7) El Bagdouri, M. and Jarny, Y., 1986, "Optimal Boundary Control of a Thermal System. Inverse Conduction Problems," *Prepr. 4th IFAC Symp. (Control of Distributed Parameter Systems)*, Los Angels, California.
- (8) Park, H. M. and Lee, J. H., 1998, "A Method of Solving Inverse Convection Problems by Means of Mode Reduction," *Chemical Engineering Science*, Vol. 53, No. 9, pp. 1731~1744.
- (9) Marquardt, W. and Auracher, H., 1990, "An Observer-based Solution of Inverse Heat Conduction Problems," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, No. 7, pp. 1545~1562.
- (10) Ji, C. C., Tuan, P. C., and Jang, H. Y., 1997, "A Recursive Least-squares Algorithm for on-line 1-D Inverse Heat Conduction Estimation," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, No. 9, pp. 2081~2096.
- (11) Tandy, D. F., Trujillo, D. M. and Busby, H. R., 1986, "Solution of Inverse Heat Conduction Problems using an Eigenvalue Reduction Technique," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 10, pp. 597~617.
- (12) Silva Neto, A. J. and Ozisik, M. N., 1993, "Simultaneous Estimation of Location and Timewise-varying strength of A plane Heat Source," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 24, pp. 467~477 (in Japanese).
- (13) Bendat, J. S., Piersol, A. G., 1991, *Random Data (Analysis and Measurement Procedure)*, 2nd Ed., John Wiley & Sons.
- (14) Friedland, B., 1987, *Control System Design (An Introduction to State-Space Methods)*, 2nd Ed. McGraw-Hill, John Wiley & Sons, Inc.