

스튜어트 플랫폼의 빠른 순기구학 해석

하현표* · 한명철†

(1999년 5월 15일 접수, 1999년 12월 22일 심사완료)

A Fast Forward Kinematic Analysis of Stewart Platform

Hyun-Pyo Ha and Myung-Chul Han

Key Words: Stewart Platform(스튜어트 플랫폼), Forward Kinematics(순기구학), Newton-Raphson Method(뉴턴 랩슨법)

Abstract

The inverse kinematics problem of Stewart platform is straightforward, but no closed form solution of the forward kinematic problem has been presented. Since we need the real-time forward kinematic solution in MIMO control and the motion monitoring of the platform, it is important to acquire the 6 DOF displacements of the platform from measured lengths of six cylinders in small sampling period. Newton-Raphson method a simple algorithm and good convergence, but it takes too long calculation time. So we reduce 6 nonlinear kinematic equations to 3 polynomials using Nair's method and 3 polynomials to 2 polynomials. Then Newton-Raphson method is used to solve 3 polynomials and 2 polynomials respectively. We investigate operation counts and performance of three methods which come from the equation reduction and Newton-Raphson method, and choose the best method.

1. 서론

스튜어트에 의해 처음 소개되어진 스튜어트 플랫폼은 병렬 매니플레이터의 형태로써 지금까지 연구가 계속되고 있다. 병렬 매니플레이터는 직렬 매니플레이터에 비해 높은 강성과 큰 부피 대 부하 비, 좋은 동적 성능, 쉬운 역기구학 해석 등의 장점을 가지고 있다. 그러나, 병렬 구조로 인한 제한된 작업영역과 순기구학의 복잡한 특성은 확산되는 병렬형 매니플레이터 이용에 걸림들이 되고 있다.

스튜어트 플랫폼은 Fig. 1과 같이 상·하판과 이들을 연결하는 6개의 선형 액추에이터로 구성된다. 각 액추에이터의 양 끝단에는 양쪽 모두 구면 조인트(spherical joints) 또는 한 쪽은 구면 조

인트, 다른 쪽은 유니버설 조인트(universal joints)로 상판과 하판을 연결한다. 6개의 액추에이터의 구동에 의해 상판은 하판에 대해 6자유도 운동을 하게 된다.

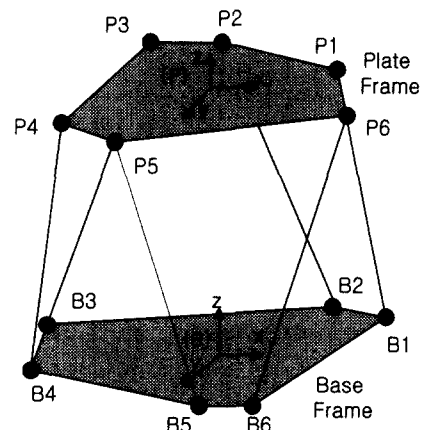


Fig. 1 Structure of Stewart platform

* 부산대학교 대학원 지능기계공학과

† 책임저자, 회원, 부산대학교 기계공학부

E-mail : mchan@hyowon.pusan.ac.kr

TEL : (051)510-2459 FAX : (051)514-0685

액추에이터의 6개의 길이로부터 상판의 6자유도 운동을 구하는 순기구학 문제는 스투어트 플랫폼의 주요 연구 대상으로, 수치해석적 방법, 해석적 방법, 추정기를 이용하는 방법 등이 있다. 스투어트 플랫폼은 액추에이터의 상·하판에 접촉형태에 따라 3-3, 3-6, 6-6의 여러 형태가 있으며, 그 중 6-6의 형태가 일반적인 스투어트 플랫폼이다. 수치해석적 방법은 뉴턴 랩슨법(Newton-Raphson Method)을 사용하는데, 초기에 Dirudonne와 Perish⁽¹⁾가 일반적인 6-6구조를, 이후 McCallion과 Truong⁽²⁾은 3-6형태를, 그리고, Der-Ming Ku⁽³⁾는 3-3구조의 해를 구하였다. 계산량에 있어서 6-6보다는 3-6형태가 그리고, 3-6보다는 3-3형태가 구조상의 간단함 때문에 우월하다. 여기서 뒤의 두 논문은 해석적 방법을 사용한 Nanua⁽⁴⁾의 논문에 근거하고 있다.

Innocenti와 Parenti-Castelli⁽⁵⁾는 3-6형태에 대해 해석적 방법으로 접근했다. 둘 다 16개의 실수와 허수 해를 구하고, 그에 따른 16개의 자세가 있음을 보였다. 이는 그후 Geng⁽⁶⁾에 의해 증명되었다. Dasgupta와 Mruthyunjaya⁽⁷⁾는 6-6의 일반적인 형태인 경우 많어도 64개의 자세로 제한됨을 보였으나 Raghavan⁽¹⁵⁾에 의해 최대 40개의 자세를 갖는 것으로 밝혀졌다. Nair⁽⁸⁾는 선형식과 비선형식으로 나누어 여러 가지 형태의 플랫폼의 순기구학을 해석했다.

마지막으로 추정기를 이용하는 법은 정규홍⁽⁹⁾이 칼만필터 알고리즘을 사용했고, 그 이후 강지윤⁽¹⁰⁾은 선형, 비선형 추정기를 사용해 6자유도 운동을 추정했다. 그리고, 이형상⁽¹¹⁾은 추정계인의 선정의 어려움에 대해 신경망을 이용하여 추정기를 설계하였다.

해석적 방법은 가능한 모든 해를 정확하게 구할 수 있는 장점이 있다. 그러나, 해를 구하는 과정에서 변수를 줄여갈 때 고차다항식이 나타나고 고차다항식을 푸는데 수치적인 방법에 의존해야 한다. 더욱이, 최대 64개의 해로부터 하나를 찾아내야하는 어려움이 있다. 추정기를 이용하여 상판의 자세를 판단하는 방법은 실시간성은 우수하나 정확한 해를 구하기 어렵고, 플랫폼의 움직임이 빠를 경우 추정성능이 떨어지게 된다. 추정기의 형태는 선형·비선형으로 나누어지는데 선형 추정기의 경우 선형화 오차에 의한 추정오차가 존재하고, 비선형추정기의 경우는 추정계인 선택

의 어려움이 있다. 수치해석적 방법은 매우 단순한 알고리즘을 사용하여 수렴특성은 양호하나, 계산시간이 많이 걸리고 존재하는 모든 해를 구할 수가 없다. 그러나, 플랫폼 제어를 위한 순기구학 해석은 모든 해를 구할 필요 없이 현재 상판의 운동을 나타내는 하나의 해만 구하면 되므로 제어입력의 실시간성을 보장하기 위해 계산시간 단축이 해결해야 될 문제이다.

본 논문에서는 Nair⁽⁸⁾의 방법을 이용하여 6개의 비선형식을 독립적인 단힌 비선형식을 이용하여 3개 변수의 3개의 다항식으로 또 2개 변수의 2개 다항식으로 줄인다. 순기구학 해석의 실시간성을 위해 변수를 줄인 후 수치해석적 방법(Newton-Raphson method)을 이용하여 해를 구한다. 기존의 6개의 비선형식, 3개 다항식 그리고 2개 다항식을 다룰 경우에 각각의 순기구학의 해를 찾는 데 걸리는 연산시간과 연산횟수 및 연산결과를 비교하여 실제 제어에 사용할 수 있는 가장 적합한 방법을 찾는다. Fig. 2는 본 논문에서 다룰 차량시뮬레이터용 플랫폼의 실제 사진이다.

2. 플랫폼의 좌표계와 6자유도 운동

일반적인 6-6 스투어트 플랫폼은 Fig. 1에 나타난 바와 같이 상·하판의 중심에 각각 좌표계 {P}, {B}를 둔다.

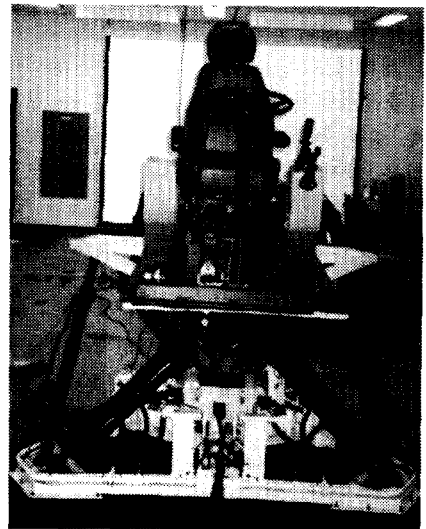


Fig. 2 Real Stewart platform structured system

각 좌표계 중심에서의 상·하판 조인트좌표는 식 (1), (2)와 같이 주어진다.

$$B_i = [b_{ix} \ b_{iy} \ 0]^T \quad i=1, 2, \dots, 6$$

:하판조인트벡터 (1)

$$P_i = [p_{ix} \ p_{iy} \ 0]^T \quad i=1, 2, \dots, 6$$

:상판조인트벡터 (2)

하판의 좌표계를 중심 좌표계로 선정하여 상판의 x, y, z 방향의 병진운동을 서지(surge, u), 스웨이(sway, v), 히브(heave, z)로 정의하고, 회전운동을 브라이언트 각(Bryant angle) 즉 xyz 오일러 각 롤(roll r), 피치(pitch p), 요(yaw y)로 정의하면 6자유도 운동을 변수 q 로 다음과 같은 벡터로 표현한다.

$$q = [u \ v \ z \ r \ p \ y]^T \quad (3)$$

여기서 하판의 좌표계로 나타낸 병진운동을 q_1 라 하고, 상판의 좌표계로 나타낸 것을 q_1^u 라 하면 두 좌표값 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$q_1 = [u \ v \ z]^T$$

$$q_1^u = [q_{11}^u \ q_{12}^u \ q_{13}^u]^T \quad (4)$$

$$q_1^u = R^T q_1$$

여기서 R 은 하판에 대한 상판의 회전변환행렬로 식 (5)와 같이 표현한다.

$$R = \begin{bmatrix} \cos p \cos r & & & & & \\ \sin r \sin p \cos y + \cos r \sin y & & & & & \\ -\cos r \sin p \cos y + \sin r \sin y & & & & & \\ & -\cos p \sin y & & \sin p & & \\ -\sin r \sin p \sin y + \cos r \cos y & & -\sin r \cos p & & & \\ \cos r \sin p \sin y + \sin r \cos y & & \cos r \cos p & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

3. 플랫폼의 역기구학

6자유도 운동이 주어졌을 때 링크 길이(실린더 길이)를 구하는 역기구학은 링크 벡터인 식 (6)과 그 놈(norm)을 취한 식 (7)로부터 쉽게 구할 수가 있다.

$$I_i = RP_i + q_1 - B_i \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (6)$$

$$l_i = \|RP_i + q_1 - B_i\| \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (7)$$

4. 순기구학 - 수치해석적 방법 I

순기구학 문제는 6자유도 성분의 값을 구하기 위해 6개의 비선형 방정식을 동시에 푸는 것이다. 6개의 비선형식의 수치해석적 방법은 목적함수인 식 (8)을 이용한다.

$$f_i(q) = I_i^T I_i - l_{i,mea}^2 \quad i=1, \dots, 6 \quad (8)$$

여기서 $I_i = (RP_i + q_1 - B_i)$ 는 링크 벡터이고, $l_{i,mea}$ 는 실험시의 측정된 링크 길이이다. 뉴턴랩슨법은 식 (9)와 같이 표현되어지고 측정된 링크길이와 추정된 링크길이의 차이가 줄어들 때까지 추정치를 갱신하여 6자유도 운동을 구하는 방법이다. 추정된 6자유도 운동이 실제와 일치한다면, 식 (8)의 목적함수는 0이 될 것이다.

$$q_{n+1} = q_n - \left[\frac{df(q_n)}{dq_n} \right]^{-1} f(q_n) \quad (9)$$

여기서 $\frac{df(q_n)}{dq_n}$ 는 자코비안 행렬이고, 자코비안 행렬의 역행렬은 가우스 소거법을 이용한 LU 분해법으로 구해진다. 알고리즘은 다음과 같이 표현되어진다.

- Step 1 초기값 q 선정한다.
- Step 2 q 를 이용 식 (4)에 대입하여 회전변환행렬 R 를 계산한다.
- Step 3 식 (8)을 이용하여 $f_i(q)$, $A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}$ 를

계산한다.

Step 4 $C_j = -f_j(q)$ 라 두고, $\sum_{j=1}^6 |C_j| < \epsilon_1$ 이면 중단하고 q 를 해로 정한다. 그렇지 않으면 다음 Step 5로 넘어간다.

Step 5 LU분해법을 이용하여 δq_j 에 대하여

$$\sum_{j=1}^6 A_{ij} \delta q_j = C_i \text{를 푼다. 만약, } \sum_{j=1}^6 |\delta q_j| < \epsilon_2$$

이면 중단하고 q 를 해로 선정한다. 허용오차를 만족하지 않으면 다음 Step 6으로 넘어간다.

Step 6 $q \leftarrow q + \delta q$ 를 이용하여 새로운 q 를 선택하고 Step 2에서 다시 시작한다.

순기구학 해석으로 실제 제어에 사용할 때에는 계속적인 순기구학 해석이 필요하기 때문에 위의 절차로 하되 초기값 q 는 초기 위치에서 주어진 값을 사용하고 다음 과정에서는 출력이 다음 초기값이 된다. 결국 초기값의 잘못선정으로 인한 거짓해로의 수렴 가능성을 줄일 수 있다.

5. 순기구학 - 수치해석적 방법 II

Nair⁽⁸⁾에서 제안한 방법은 해석적 방법을 이용하여 9개의 변수를 갖는 6개의 선형방정식을 우선 구한다. 미지수에 비해 독립적인 식 3개가 모자라게 되고, 이 모자라는 식을 위해 3개의 독립적인 닫힌 비선형식을 사용하여 6자유도 운동을 구한다. 6개의 비선형식의 해석적 방법은 미지수를 줄여서 하나의 변수로 표현되는 고차다항식을 다루었으나, 여기서는 우선 3개의 변수를 가지는 3개의 다항식을 다룬다.

5.1 선형 기구학 함수

식 (7)을 제공하여 전개하면 식 (10)과 같이 표현된다. 식 (10)의 상수부분을 우변으로 넘기고 정리하면 식 (11)이 된다. 측정된 링크 길이는 알고 있다고 가정하여 상수로 취급한다.

$$\begin{aligned} \|I_i\|^2 = & \|T\|^2 + \|P_i\|^2 + \|B_i\|^2 \\ & + 2(q_1 \cdot RP_i - q_1^T B_i - RP_i \cdot B_i) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} q_1^T B_i - q_1^T P_i + RP_i \cdot B_i - \frac{1}{2} \|T\|^2 \\ = \frac{1}{2} \{ \|B_i\|^2 + \|P_i\|^2 - \|I_i\|^2 \} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $\|T\|^2 = \|q_1\|^2$, (\cdot) 는 벡터 내적을 의미하며 $q_1 \cdot RP_i = q_1^T RP_i = q_1^T P_i$ 이다. 식 (11)을 6자유도 운동을 포함하는 9개의 변수를 선정하여 선형방정식을 구하면 식 (12)로 나타난다. 행렬 A의 모든 요소는 상·하판의 조인트 벡터요소들로 구성되므로, 기구학적 설계에 의해서 결정되는 상수들이다.

$$Ax = L \quad (12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b_{1x} & b_{1y} & -p_{1x} & -p_{1y} & b_{1x}p_{1x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & b_{6x} & b_{6y} & -p_{6x} & -p_{6y} & b_{6x}p_{6x} \\ b_{1x}p_{1y} & b_{1y}p_{1x} & b_{1y}p_{1y} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{6y}p_{6x} & b_{6y}p_{6y} & b_{6x}p_{6y} \end{bmatrix} \in R^{6 \times 9}$$

$$x = \left[-\frac{1}{2} \|T\|^2 \ u \ v \ q_{11}^p \ q_{12}^p \ r_{11} \ r_{12} \ r_{21} \ r_{22} \right]^T \in R^{9 \times 1}$$

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_{1x}^2 + b_{1y}^2 + p_{1x}^2 + p_{1y}^2 - l_1^2 \\ \cdot \\ b_{6x}^2 + b_{6y}^2 + p_{6x}^2 + p_{6y}^2 - l_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdot \\ L_6 \end{bmatrix} \in R^{6 \times 1}$$

식 (12)는 모든 형태의 스튜어트 플랫폼에 적용이 가능하다. 본 논문에서 다루는 스튜어트 플랫폼(Fig. 2)의 구조는 Fig. 3과 같다. 상판과 하판의 조인트들이 각각 원주 위에 있고, 원의 중심은 상·하판 좌표계의 중심과 일치한다. x 축은 $p_1(b_1)$ 과 $p_6(b_6)$ 의 중간을 가로지르고 각각 x_p, x_b 라 한다. 상판(하판)에서 각 관절의 대칭적인 분포를 위해 $p_1(b_1)$ 과 $p_3(b_3)$ 및 $p_3(b_3)$ 과

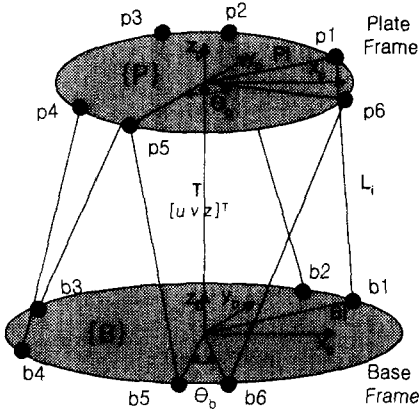


Fig. 3 Considered platform structure

p_5 (b_5) 사이의 각은 120° 이다. θ_b, θ_p 는 상·하판의 p_5 와 p_6 , b_5 와 b_6 사이의 각으로 모든 조인트 좌표를 결정할 수 있는데, 다음의 과정으로 구해진다. x 축과 상·하판의 각 조인트 사이의 각은 식 (13)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 60i - \frac{\theta_p}{2}, \quad i=1, 3, 5 \\ \lambda_i &= \lambda_{i-1} + \theta_p, \quad i=2, 4, 6 \\ \Lambda_i &= 60i - \frac{\theta_b}{2}, \quad i=1, 3, 5 \\ \Lambda_i &= \Lambda_{i-1} + \theta_b, \quad i=2, 4, 6 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 λ_i 는 상판 조인트 p_i 와 x_p 사이의 각이고, Λ_i 는 하판 조인트 b_i 와 x_b 사이의 각이며 θ_b, θ_p 는 상·하판의 p_5 와 p_6 , b_5 와 b_6 사이의 각이다. 조인트 벡터는 식 (14)와 같다.

$$\begin{aligned} P_i &= [r_p \cos(\lambda_i) \quad r_p \sin(\lambda_i) \quad 0]^T \\ B_i &= [r_b \cos(\Lambda_i) \quad r_b \sin(\Lambda_i) \quad 0]^T \\ i &= 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 r_b, r_p 는 각각 상판과 하판의 반경이다. $\theta_b = \theta_p$ 일 때는 상판과 하판의 기구학적 구조가 일치하게 되어 행렬 A 의 랭크(rank)가 5밖에 되지 않는다. 이럴 경우 독립적인 네 개의 방정식이 필요하므로 수식을 더욱 복잡하게 만든다. 특이성(singularity)의 측면에서는 상판과 하판

이 닮은꼴이고 그 조인트의 연결이 닮은꼴의 위치와 일치할 때 특이형상(singular configuration)에 빠지게 된다.

이런 특이성을 Ma와 Angeles⁽¹²⁾는 구조적 특이성(architecture singularity)이라 소개했다. 물론 특이성에 빠지게 되면 플랫폼의 운동은 불가능하게 된다. $\theta_b \neq \theta_p$ 로 둘 때, 선형방정식 (12)는 행간약화(row reduction)를 사용하여 식 (15)과 같이 구해진다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_2 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -k_4 & 0 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & k_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \|T\|^2 \\ u \\ v \\ q_{11}^p \\ q_{12}^p \\ r_{21} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{22} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \\ L_4' \\ L_5' \\ L_6' \end{pmatrix}$$

여기서 L_1', L_2', \dots, L_6' 는 L_1, L_2, \dots, L_6 들의 선형 조합이고 k_1, \dots, k_5 는 상·하판의 기구학적 형상으로 결정되는 계수이다. 일반적인 스텐워드 플랫폼일 경우에는 k_1, \dots, k_8 까지 8개의 상수가 존재한다.⁽⁸⁾ 그러나, 본 논문에서 다루는 구조인 경우는 조인트들의 대칭성으로 인해 5개의 상수만 존재한다. 식 (15)의 선형방정식을 전개하면 식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= 2(k_1(r_{11} + r_{22}) - L_1') \\ u &= L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}) \\ v &= L_3' - k_3 r_{12} \\ q_{11}^p &= L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}) \\ q_{12}^p &= L_5' - k_5 r_{12} \\ r_{21} &= L_6' + r_{11} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)에서 9개의 변수 중 r_{11}, r_{12}, r_{22} 를 종속 변수로 선택하고 나머지 6개의 변수를 표현했다. 회전변환행렬 중 세 종속변수를 선택했기 때문에 변화가 비슷하여 적은 반복횟수로 뉴턴 램슨법을 수행 할 수 있다. 그러나, 종속변수를 잘못 선택 한 경우에는 행렬 A 의 1열에서 6열까지의 행렬 은 랭크가 6이 되지 못한다. 예를 들어 u, v, q_{11}^p, q_{12}^p 중 3개를 선택 시에는 랭크가 6이 되지 못하고, 이들 중 2개를 선택하고 r_{21} 을 선택할 때도 마찬가지이다. 이 때에는 해를 구하기 위하여 부족한 랭크만큼의 독립적인 비선형 방정식이 더 필요하다. 그리고, 5.2절에서 다루는 닫힌 비선형 방정식과의 결합에서 종속변수들의 선택은 수식을 복잡하게 만들 수도 있다. 이상을 고려하여 종속변수를 선택했다.

5.2 닫힌 비선형 방정식

식 (15)의 선형방정식을 풀기 위해 3개의 다른 독립적인 방정식이 있어야 한다. 식 (17)~(23)은 회전변환행렬과 병진 운동벡터의 성질을 이용한 독립적인 닫힌 비선형 방정식들이다.

$$RR^T = I \tag{17}$$

$$R^T R = I \tag{18}$$

$$\det(R) = 1 \tag{19}$$

$$R(:, 1) \times R(:, 2) = R(:, 3) \tag{20}$$

$$q_1 = Rq_1^p \tag{21}$$

$$q_1^p = R^T q_1 \tag{22}$$

$$\|T\|^2 = q_1^T q_1 = T_p^T q_1^p \tag{23}$$

식 (17)~(23)을 식 (12)의 x 의 변수로만 표현 하면, 식 (24)~(30)과 같이 된다.⁽⁸⁾

$$1 - (r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{21}^2 + r_{22}^2) + (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})^2 = 0 \tag{24}$$

$$(1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(\|T\|^2 - q_{11}^{p2} - q_{12}^{p2}) - (u - r_{11}q_{11}^p - r_{12}q_{12}^p)^2 = 0 \tag{25}$$

$$(1 - r_{21}^2 - r_{22}^2)(\|T\|^2 - q_{11}^{p2} - q_{12}^{p2}) - (v - r_{21}q_{11}^p - r_{22}q_{12}^p)^2 = 0 \tag{26}$$

$$(1 - r_{11}^2 - r_{21}^2)(\|T\|^2 - u^2 - v^2) - (q_{11}^p - r_{11}u - r_{21}v)^2 = 0 \tag{27}$$

$$(1 - r_{12}^2 - r_{22}^2)(\|T\|^2 - u^2 - v^2) - (q_{12}^p - r_{12}u - r_{22}v)^2 = 0 \tag{28}$$

$$(r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22})(\|T\|^2 - u^2 - v^2) - (q_{11}^p - r_{11}u - r_{21}v)(q_{12}^p - r_{12}u - r_{22}v) = 0 \tag{29}$$

$$(r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22})(\|T\|^2 - q_{11}^{p2} - q_{12}^{p2}) - (u - r_{11}q_{11}^p - r_{12}q_{12}^p)(v - r_{21}q_{11}^p - r_{22}q_{12}^p) = 0 \tag{30}$$

위 식들에 식 (16)를 대입하고, 그 중 세 개의 비선형방정식을 선택하는데 그 중에서 계산량을 줄이기 위해 식 (24), (25), (26)를 선택하여 대입 하면 식 (31)~(33)이 된다.

$$1 - r_{11}^2 - r_{12}^2 - (L_6' + r_{12})^2 - r_{22}^2 + (r_{11}r_{22} - r_{12}(L_6' + r_{12}))^2 = 0 \tag{31}$$

$$(1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(2k_1(r_{11} + r_{22}) - 2L_1' - (L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}))^2 - (L_5' - k_5r_{12})^2) - (L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}) - r_{11}(L_4' + k_4(r_{11} - r_{22})) - r_{12}(L_5' - k_5r_{12}))^2 = 0 \tag{32}$$

$$(1 - r_{11}^2 - (L_6' + r_{12})^2)(2k_1(r_{11} + r_{22}) - 2L_1' - (L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}))^2 - (L_3' - k_3r_{12})^2) - (L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}) - r_{11}(L_2' + k_2(r_{11} - r_{22})) - (L_6' + r_{12})(L_3' - k_3r_{12}))^2 = 0 \tag{33}$$

위의 세 비선형식에서 뉴턴 램슨법을 이용하여 종속변수(r_{11}, r_{12}, r_{22})를 결정하면, 식 (16)을 이용하여 나머지 6개의 독립변수를 풀 수 있다. 자코비안은 부록 1에 나타난다. 9개의 변수로부터 전체 6자유도 값을 구하는 법은 다음 6장에서 설명할 것이다.

6. 순기구학 - 수치해석적 방법 III

이번에는 식 (31)~(33)을 두 변수의 2개 다항 식으로 변환할 수 있는데 r_{22} 로 정리하면 r_{22} 의 제곱의 꼴로 다음과 같다.

$$Ar_{22}^2 + Br_{22} + C = 0 \quad (34)$$

$$Dr_{22}^2 + Er_{22} + F = 0 \quad (35)$$

$$Gr_{22}^2 + Hr_{22} + I = 0 \quad (36)$$

여기서 $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ 는 r_{11} 과 r_{12} 의 함수이다.

식 (34)~(36)에서 r_{22} 를 소거하기 위하여 Bezout⁽⁴⁾의 방법을 사용하는데 식 (34)와 (35), 식 (34)와 (36)에서 각각 r_{22} 를 소거하여 r_{11} 과 r_{12} 의 2개의 다항식을 구할 수 있다. 이 식들은 r_{12} 에 대하여 12차 다항식(r_{11} 에 대하여 10차)인데 부록2에는 소거 방법인 Bezout의 방법과 2개의 다항식을 서술한다. 이 두 식을 가지고 다시 한번 수치해석적인 방법에 적용할 수가 있다. 이 식들의 자코비안은 많은 지면을 필요로 하기 때문에 생략한다. 이 두 식은 한 변수에 대하여 다시 정리할 수 있지만 그러나 부록 2에서 보이듯이 두 식의 형태가 너무 복잡해서 한 변수로 정리할 때는 더욱 복잡해지고 연산횟수도 그 만큼 증가하여 비교하지 않아도 빠른 순기구학 해석이 불가능할 것으로 생각된다. 그리고 7장의 세 방법 비교의 결과로부터 오차 또한 상대적으로 클 것으로 짐작된다.

이제 r_{11} 과 r_{12} 의 값을 뉴턴 랩슨법으로 구했을 때 6자유도 값을 어떻게 구하는지 알아본다. 식 (31)에 앞에서 구한 r_{11} 과 r_{12} 를 대입하면 r_{22} 의 이차 다항식이 된다. 우리는 이를 근의 공식에 대입하여 두 개의 r_{22} 값을 쉽게 구할 수가 있다. 이 때 해가 2개 존재하는데 하나의 값은 거짓 해가 된다. 다음은 거짓 해를 찾는 방법을 보여준다.

식 (31) 즉 식 (34)를 더욱 자세히 서술하면 식 (37)과 같다.

$$Ar_{22}^2 + Br_{22} + C = 0 \quad (37)$$

$$A = r_{11}^2 - 1, \quad B = -2r_{11}r_{12}(L_6' + r_{12})$$

$$C = 1 - r_{11}^2r_{12}^2 - (L_6' + r_{12})^2(r_{12}^2 - 1)$$

Table 1 Motion specifications

6 DOF motion	Single	Composite
Roll(r)	20°	4°
Pitch(p)	20°	4°
Yaw(y)	20°	4°
Surge(u)	432mm	76mm
Sway(v)	432mm	76mm
Heave(z)	432mm	76mm

우리가 보유한 스튜어트 플랫폼의 운동사양은 Table 1과 같고, $r_{11}, r_{12}, r_{22}, L_6'$ 가 단독 운동(single motion)을 할 때 각 변수의 범위를 구하면 식 (38)과 같다. 이 범위는 운동사양을 식 (5)에 나타난 각 변수 값에 대입하여 알 수 있다. 물론 L_6' 은 식 (15)에서 알 수 있다.

$$\begin{aligned} 0.8830 &\leq r_{11} \leq 1 \\ -0.3214 &\leq r_{12} \leq 0.3214 \\ 0.8437 &\leq r_{22} \leq 1 \\ -1 &\leq L_6 \leq 1 \end{aligned} \quad (38)$$

위 범위를 고려한 식 (37)의 해(r_{22})는 하나의 해를 가지게 되고 그 해는 (39)와 같다. $a=0(r_{11}^2=1)$ 일 때는 특이점에 빠지게 된다. 그러나, 식 (38)에서 보듯이 우리가 사용하는 운동사양에서는 특이점에 빠질 염려가 없다.

$$r_{22} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (39)$$

이제 식 (15)의 x 의 9개의 변수를 구할 수 있고, 이 변수들로부터 6자유도 성분을 구하는 방법이 식 (40)~(48)까지 나타난다. 3개의 다항식인 경우 또한 여기서부터 6자유도 운동을 구할 수 있다.

식 (40)~(42)는 식 (22), (23)에서 유도된다.

$$z = \sqrt{(\|T\|^2 - u^2 - v^2)} \quad (40)$$

$$r_{31} = (q_{11}^p - r_{11}u - r_{21}v)/z \quad (41)$$

$$r_{32} = (q_{12}^p - r_{12}u - r_{22}v)/z \quad (42)$$

여기서 z 는 병진 운동성분 중 z 방향의 성분은

로 항상 양이다. 식 (20)에서 식 (43)~(46)을 구하고, 회전변환행렬을 완성한다.

$$r_{13} = r_{21}r_{32} - r_{22}r_{31} \quad (43)$$

$$r_{23} = r_{12}r_{31} - r_{11}r_{32} \quad (44)$$

$$r_{33} = r_{11}r_{22} - r_{21}r_{22} \quad (45)$$

완성된 회전변환행렬로부터 롤, 피치, 요각은 식 (46)~(48)와 같이 표현된다.⁽¹²⁾

$$p = \text{atan2}(r_{13}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \quad (46)$$

$$y = \text{atan2}(-r_{12}/\cos(p), r_{11}/\cos(p)) \quad (47)$$

$$r = \text{atan2}(-r_{23}/\cos(p), r_{33}/\cos(p)) \quad (48)$$

이제 식 (16), (40), (46)~(48)에서 6자유도 운동 $q = [u \ v \ z \ r \ p \ y]^T$ 가 완성된다.

7. 각 방법의 비교

각 수치해석적 방법의 비교를 위해 연산횟수와 실제 처리시간, 그리고, 각 방법의 성능을 비교한다.

7.1 연산 횟수 비교

계산량 위해 간접적으로 확인할 수 있는 연산 횟수를 보면 Table 2과 같다. 여기서 방법 (method) 1~3은 각각 6개, 3개, 2개의 비선형식 방법을 나타낸다.

방법 1에서는 주로 자코비안의 계산에서 6×6 행렬을 다루기 때문에 많은 연산횟수가 필요하다. 그리고 자코비안 역행렬을 구할 때 사용하는 LU분해에서도 많은 횟수가 필요하다. LU분해에 사용되는 연산횟수는 다음과 같다.⁽¹⁴⁾

$$\text{곱셈/나눗셈 연산횟수} : \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n \quad (49)$$

$$\text{덧셈/뺄셈 연산횟수} : \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \quad (50)$$

여기서 n 는 시스템 차수이다.

방법 2인 경우는 LU분해에서 그 만큼의 횟수를 줄일 수 있다.

Table 2 Operation counts

	Method 1	Method 2	Method 3
Multiply/Divide	386	272	1608
Add/Subtract	296	244	1181
Square root	0	2	3
Trigonometric	29	7	7

Table 3 Specification's platform for simulation

Parameter	Value	Physical Meaning
R_p	0.79m	joint circle radius in the plate
R_b	0.93m	joint circle radius in the base
θ_p	119°	degree between p5 and p6
θ_b	9.24°	degree between b5 and b6

더욱이 방법 3은 LU분해과정을 간단한 역행렬 계산으로 대체할 수 있다. 그러나, 방법 2의 횟수가 월등하게 줄어들지 않는 이유는 식 (31)~(33)이 다소 복잡하기 때문에 자코비안(부록 1)을 구하는 데에 많은 연산횟수가 필요하기 때문이다. 그리고, 방법 3으로 변환해 갈수록 역행렬 계산은 간단해지지만 수식이 더욱 복잡해져서 많은 연산횟수가 필요함을 알 수 있다. 우리가 연구에서 제외한 하나의 다항식을 다룰 때에는 방법 3보다 더 많은 연산횟수가 필요할 것이다. Table 2의 전체 연산횟수 비교에서 방법 2인 경우 가장 적은 연산횟수로 순기구학을 해석할 수 있음을 알 수 있다.

7.2 실제처리시간

직접적인 계산 시간 비교를 위해 각 방법들을 시뮬레이션 하였다. 시뮬레이션에 사용한 컴퓨터는 Pentium II 400MHz이다. 실제 스튜어트 플랫폼의 일반적인 운동인 정현과 입력으로 6자유도 값을 식 (7)의 역기구학 식에 대입하여 링크의 길이를 얻고 이 길이로부터 순기구학 해석을 행했다. 그리고, 입력의 6자유도 값과 순기구학 해석의 결과를 비교함으로써 각 방법의 성능을 비교했다. Table 3은 스튜어트 플랫폼의 사양이다.

6자유도 정현과 입력은 식 (51)과 같다. 허브 z 운동은 하판에서 상판까지의 초기 위치가 0.92m이기 때문에 초기 위치에서의 변화량을 입력 값으로 한다.

Table 4 Error bounds

	$\sum_{j=1}^{6(3)(2)} f(q_j) < \epsilon_1$	$\sum_{j=1}^{6(3)(2)} \delta q_j(\delta x_j) < \epsilon_2$
Method 1	1×10^{-4}	1×10^{-3}
Method 2	1×10^{-5}	1×10^{-5}
Method 3	1×10^{-6}	1×10^{-6}

$$\begin{aligned}
 u &= 0.3 \sin(2\pi t) & [m] \\
 v &= 0.2 \sin(2\pi t) & [m] \\
 z &= 0.92 + 0.1 \sin(2\pi t) & [m] \\
 r &= 0.0873 \sin(2\pi t) & [rad] \\
 p &= 0.0698 \sin(2\pi t) & [rad] \\
 y &= 0.0524 \sin(2\pi t) & [rad]
 \end{aligned} \quad (51)$$

3장의 뉴턴 랩슨법의 알고리즘 중 Step 5에 나타나는 허용오차는 각각의 방법에 따라 다른데 Table 4에 나타난다. Table 4에서 허용 오차가 방법 1보다 방법 2가, 그리고 방법 3을 다룰 때 더 작게 선정된 이유는 방법 1에서는 허용오차에 따라 직접적으로 6자유도 추정치의 정확성에 영향을 미치지만, 방법 2, 3은 허용 오차가 작더라도 6자유도 운동의 오차가 크게 미치지 때문이다.

Fig. 4는 시뮬레이션에 걸린 시간을 나타낸다. 샘플링 시간은 0.001초로하고 최종시간 2초이다. 총 2000개의 정현파 링크길이 집합으로부터 순기구학 해석을 하는데 걸린 실제처리시간이다.

전체 2000개의 샘플에 대하여 한번 해를 찾는데 걸린 평균 시간은 방법 1이 0.014초, 방법 2가 0.0047초로 방법 1보다 약 3배(2.9787배)정도 빠르다. 그러나, 방법 3은 0.0824초로 방법 2보다 약 18배(17.5415배)나 더 느린 것을 알 수가 있다. Table 2에 나타난 연산횟수 면에서 방법 2가 방법 1에 비해 3배 이하의 횟수를 가지지만, 실제 처리 시간 면에서 3배 정도의 차이가 난다. 이는 6방법 1이 허용오차를 만족하지 않을 때, 다시 처음부터 연산을 시작하는 반면, 3개의 다항식은 9개의 선형변수로부터 6자유도 운동 계산(식 (40)-(48))을 뺀, 세 다항식만을 다시 연산하기 때문이다. 그러나, 방법 3은 방법 2보다 연산 횟수가 월등히 많아져서 실제 처리 시간도 많이 걸린다.

Table 5 Maximum error of forward kinematics

Max Error (Ref.-Out.)	Method 1	Method 2	Method 3
u : Surge	0.0014	0.0000	0.0110
v : Sway	-0.0010	-0.0056	0.0047
z : Heave	0.0005	-0.0014	-0.021
r : Roll	0.0004	0.0003	0.0052
p : Pitch	0.0003	-0.0017	0.0056
y : Yaw	0.0002	-0.0060	-0.0233

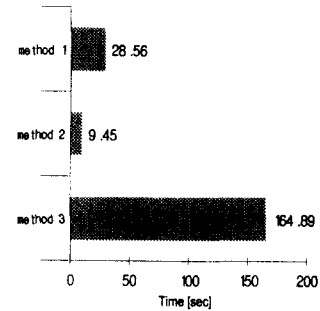


Fig. 4 Real consuming time

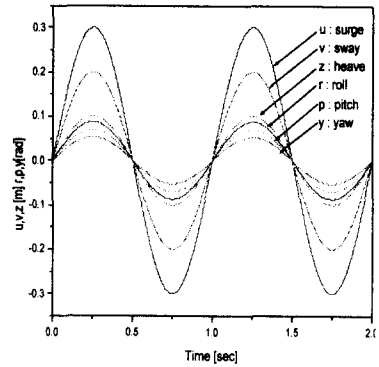


Fig 5 Forward kinematic results : method 1

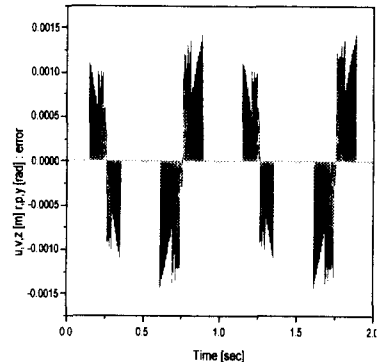


Fig. 6 Forward kinematic error : method 1

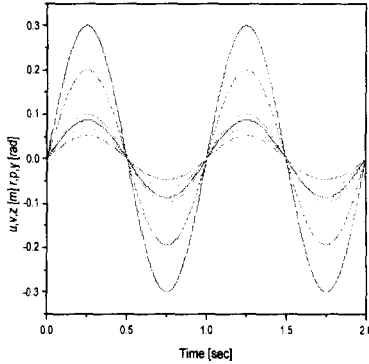


Fig. 7 Forward kinematic results : method 2

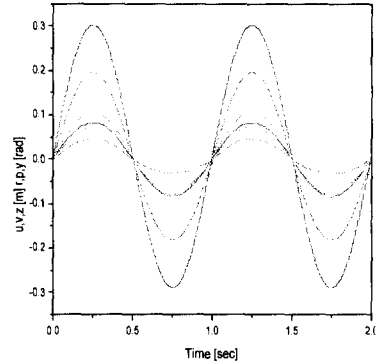


Fig. 9 Forward kinematic results : method 3

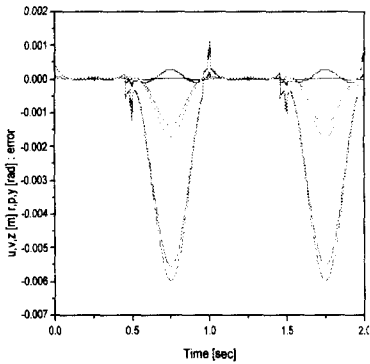


Fig. 8 Forward kinematic error : method 2

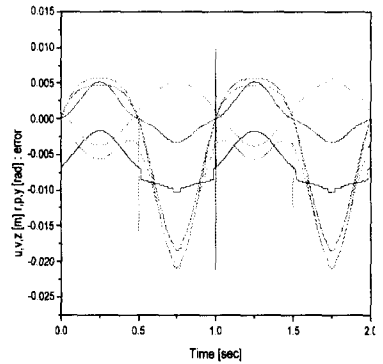


Fig. 10 Forward kinematic error : method 3

7.3 성능 평가

각각의 방법에 대한 실제 순기구학 해석의 성능을 알아본다. 앞에서 간단히 설명했듯이 식 (51)과 같은 형태의 입력으로 역기구학 실행시의 링크 길이를 이용하여 순기구학 해석을 위해 시물레이션하였다. 식 (51)에서 z방향은 다른 병진운동과 크기를 맞추기 위해 초기위치(0.92m)를 뺀 것을 도식화했다.

Table 5는 각 방법의 최대오차를 나타낸다. 순기구학의 허용오차가 6자유도의 성능에 직접적으로 작용하는 방법 1인 경우에 가장 좋은 성능을 나타내었다. 그리고 다항식의 수가 줄어 갈수록 오차의 크기는 점점 커지는 것을 볼 수 있는데 다항식의 수가 줄수록 오차가 증가하고, 또한 수치해석의 결과로 얻은 변수의 오차가 6자유도 운동을 구할 때 큰 오차로 나타나기 때문이다.

Fig. 5, 6은 방법 1의 순기구학 해석의 결과로 오차가 발생하는 시점이 정현파의 각 피크치를 기준으로 발생하는데 이는 뉴턴 랩슨법이 각

운동의 변화량이 바뀔므로 해가 완전히 수렴하지 않기 때문이다. 그러나 그 외의 부분에서는 좋은 응답을 나타낸다.

Fig. 7, 8은 방법 2의 경우를 나타낸다. Fig. 8에서 가장 큰 오차를 보이는 것이 z성분인데 이것은 r_{11}, r_{12}, r_{22} 를 구하고 이들과 식 (16)을 이용하여 u, v 가 결정되면 식 (40)으로부터 z 를 구하기 때문에 오차가 가장 크게 발생한다.

Fig. 9, 10은 방법 3의 순기구학 출력과 오차를 나타낸다. 방법 2보다 수식이 복잡해지고 6자유도 운동으로 변환하는 과정 또한 한 과정이 더 추가됨으로 오차가 크게 나타났다. 한 번씩 거의 발산하는 것처럼 일어나는 값들은 그 과정의 수치해석법이 원래 값에 수렴하지 못함을 볼 수 있다. 그러나 수렴하지 못하는 구간이 계속 생기지 않고 한 순간만이 나타나는 것은 다음 과정에서는 다시 수렴값으로 뉴턴 랩슨법이 수행되기 때문이다.

각각의 경우에 대한 시뮬레이션 결과 허용오차가 6자유도의 성능에 직접적으로 작용하는 6개의 비선형식을 다룰 때 가장 좋은 성능을 나타내었다. 그리고, 다항식의 수가 줄어 갈수록 오차의 크기는 점점 커지는 것을 볼 수 있는데 다항식의 수가 줄수록 변수를 줄여가는 과정동안 오차가 발생할 것이고, 수치해석의 결과로 얻은 값의 작은 오차가 6자유도 운동을 구할 때에는 큰 오차로 나타나기 때문이다.

8. 결 론

순기구학 해석을 실시간 제어에 사용할 때는 빠르고 정확한 해를 구해야만 한다. 이러한 순기구학 해석을 위해서 수치해석적 방법은 단순한 알고리즘으로 수렴특성도 양호한 것으로 알려져 있지만, 계산량이 많은 단점이 있다. 따라서 계산량을 줄이기 위해 Nair⁽⁸⁾의 변수를 줄이는 방법을 이용하여 6개의 비선형식을 3개 다항식으로, 또 2개의 다항식으로 바꾸어서 각각의 경우에 수치해석적 방법인 뉴턴 랩슨법으로 순기구학의 해를 구하였다. 또 각 경우에 연산횟수와 처리시간, 성능을 비교함으로써 실시간 제어에 가장 유리한 방법을 찾을 수 있는데, 연산횟수와 처리시간을 비교했을 때, 3개의 다항식을 다루는 것이 가장 유리함을 알 수 있었다. 그리고, 순기구학 해석의 성능을 비교했을 때에는 6개의 비선형식이 6자유도의 정확도에 직접적으로 관여할 수 있어 가장 좋은 성능을 나타냈다. 그러나, 전체적으로 비교했을 때, 3개의 다항식이 6개의 비선형식보다 3배정도의 빠른 순기구학 해석이 가능할 뿐만 아니라 성능에서도 실제 사용에 무리가 없을 정도이기 때문에 가장 유리한 방법인 것으로 생각된다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구의 연구비(과제번호 : 97-02-00-10-01-5)와 부산대학교 기성회재원 연구비의 지원 하에 수행되었으며, 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Dieudonne, J. E. and Perish, R. V., 1972, "An Actuator Extension Transformation for a Motion Simulator and Inverse Transformation Applying Newton-Raphson Method," *NASA Tech. Note*, NASA TND-7607.
- (2) McCallion, H. and Truong, P. D., 1979, "The Analysis of a Six-Degree-of-freedom Work Station for Mechanised Assembly," *Proceedings of the Fifth World Congress for the Theory of Machines and Mechanisms*, an ASME Publication, pp. 603~616.
- (3) Ku, Der-Ming, 1999, "Direct Displacement Analysis of a Stewart Platform Mechanism," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, pp. 453~465.
- (4) Nanua, P., Waldron, K. J. and Murthy, V., 1990, "Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 4, pp. 438~444.
- (5) Innocenti, C. and Parenti-Castelli, V., 1990, "Direct Position Analysis of the Stewart Platform Mechanism," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 25, No. 6, pp. 611~621.
- (6) Geng, Z., Haynes, L., Lee, J. and Carroll, R., 1992, "On the Dynamic Model and Kinematic Analysis of a Class of Stewart Platforms," *Journal of Robotics Automation systems*, Vol. 9, pp. 237~254.
- (7) Dasgupta, B. and Mruthyunjaya, T. S., 1994, "A Canonical Formulation of the Direct Position Kinematics Problem For a General 6-6 Stewart Platform," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 6, pp. 819~827.
- (8) Nair, R. and Maddocks, J. H., 1994, "On the Forward Kinematics of Parallel Manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 13, No. 2, pp. 171~188.
- (9) 정규홍, 이교일, 1994, "스튜어트 플랫폼 순기구학 해의 실시간 추정기법," *대한기계학회논문집*, 제18권, 제7호, pp. 1632~1642.
- (10) 강지윤, 김동환, 이교일, 1996, "스튜어트 플랫폼의 견실한 순기구학 추정기 설계," *Proceedings of the 11th KACC, October 1996*, pp. 28~31.

- (11) 이형상, 한명철, 1998, "신경망을 이용한 스텔러트 플랫폼의 순기구학 추정기 설계," *Proceedings of the 13th KACC, October 1998*, pp. 1280~1284.
- (12) Ma, O. and Angeles, J., 1991, "Architecture Singularities of Platform Manipulators," *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California, pp. 1542~1547.
- (13) John J. Craig, 1989, *Introduction to Robotics*, Addison Wesley.
- (14) Steven J. Leon, 1994, *Linear Algebra with Applications*, Prentice Hall.
- (15) Raghvan, M., 1993, "The Platform of General Geometry has 40 Configurations," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 277~282.

부 록 1

식 (31)~(33)까지를 다음과 같이 정의 할 때

$$f_1(x) = \text{식 (31)}, \quad f_2(x) = \text{식 (32)}, \quad f_3(x) = \text{식 (33)}$$

자코비안은 식 (43)과 같다.

$$\frac{df(x_n)}{dx_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial r_{11}} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial r_{12}} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial r_{22}} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial r_{11}} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial r_{12}} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial r_{22}} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial r_{11}} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial r_{12}} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial r_{22}} \end{bmatrix}$$

여기서

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial r_{11}} = -2(r_{11} - (r_{11}r_{22} - r_{12}(L_6' + r_{12}))r_{22})$$

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial r_{12}} = -2(2r_{12} + L_6' + (r_{11}r_{22} - r_{12}(L_6' + r_{12}))(L_6' + 2r_{12}))$$

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial r_{22}} = -2(r_{22} - (r_{11}r_{22} - r_{12}(L_6' + r_{12}))r_{11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2(x)}{\partial r_{11}} &= 2r_{11}(2(k_1(r_{11} + r_{22}) - L_1') - (L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}))^2 - (L_5' - k_5r_{12})^2) \\ &\quad + 2(1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(k_1 - (L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}))k_4) - 2(L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}) \\ &\quad - r_{11}(L_4' + k_4(r_{11} - r_{22})) - r_{12}(L_5' - k_5r_{12}))(k_2 - L_4' - k_4(r_{11} - r_{22}) - r_{11}k_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2(x)}{\partial r_{12}} &= -2r_{12}(2(k_1(r_{11} + r_{22}) - L_1') - (L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}))^2 - (L_5' - k_5r_{12})^2) \\ &\quad + 2(1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(L_5' - k_5r_{12})k_5 - 2(L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}) - \\ &\quad r_{11}(L_4' + k_4(r_{11} - r_{22})) - r_{12}(L_5' - k_5r_{12}))(-L_5' + 2k_5r_{12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2(x)}{\partial r_{22}} &= 2(1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(k_1 + (L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}))k_4) - 2(L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}) \\ &\quad - r_{11}(L_4' + k_4(r_{11} - r_{22})) - r_{12}(L_5' - k_5r_{12}))(-k_2 + r_{11}k_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3(x)}{\partial r_{11}} &= -2r_{11}(2k_1(r_{11} + r_{22}) - 2L_1' - (L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}))^2 \\ &\quad - (L_3' - k_3r_{12})^2) + (1 - r_{11}^2 - (L_6' + r_{12})^2)(2k_1 - 2(L_2' \\ &\quad + k_2(r_{11} - r_{22}))k_2) - 2(L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}) - r_{11}(L_2' + k_2(r_{11} - r_{22})) \\ &\quad - (L_6' + r_{12})(L_3' - k_3r_{12}))(k_4 - L_2' - k_2(r_{11} - r_{22}) - r_{11}k_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3(x)}{\partial r_{12}} &= (-2L_6' - 2r_{12})(2k_1(r_{11} + r_{22}) - 2L_1' - (L_2 + k_2(r_{11} - r_{22}))^2 \\ &\quad - (L_3' - k_3r_{12})^2) + 2(1 - r_{11}^2 - (L_6' + r_{12})^2)(L_3' - k_3r_{12})k_3 \\ &\quad - 2(L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}) - r_{11}(L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}))) \\ &\quad - (L_6' + r_{12})(L_3' - k_3r_{12})(-L_3' + k_3r_{12} + (L_6' + r_{12})k_3) \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial r_{22}} &= (1 - r_{11}^2 - (L_6' + r_{12})^2)(2k_1 + 2(L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}))k_2) \\ &\quad - 2(L_4' + k_4(r_{11} - r_{22}) - r_{11}(L_2' + k_2(r_{11} - r_{22}))) \\ &\quad - (L_6' + r_{12})(L_3' - k_3r_{12})(-k_4 + r_{11}k_2) \end{aligned}$$

부 록 2

다음의 식들을 Bezout의 방법을 사용하여 r_{22} 를 소거할 수 있다.

$$Ar_{22}^2 + Br_{22} + C = 0 \tag{34}$$

$$Dr_{22}^2 + Er_{22} + F = 0 \tag{35}$$

$$Gr_{22}^2 + Hr_{22} + I = 0 \tag{36}$$

i) 식 (34)와 (35) : Bezout의 방법

$$\left| \begin{array}{cc|cc} A & C & E & B \\ D & F & D & A \\ \hline B & C & A & C \\ E & F & D & F \end{array} \right| = 0$$

다음 식은 Bezout 방법으로 r_{22} 가 소거된 결과식이다.

$$\begin{aligned} &((-1 + r_{11}^2)((1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(2k_1r_{11} - 2L_1' - (L_4' + k_4r_{11})^2 - (L_5' - k_5r_{12})^2) \\ &\quad - (L_2' + k_2r_{11} - r_{11}(L_4' + k_4r_{11}) - r_{12}(L_5' - k_5r_{12}))^2) - (1 - r_{11}^2 - r_{12}^2 \\ &\quad - (L_6' + r_{12})^2 + r_{12}^2(L_6' + r_{12})^2)(-(1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)k_4^2 - (-k_2 + k_4r_{11})^2)^2 \\ &\quad - (((1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(2k_1 + 2(L_4' + k_4r_{11})k_4) - 2(L_2' + k_2r_{11} - r_{11}(L_4' + k_4r_{11}) \\ &\quad - r_{12}(L_5' - k_5r_{12}))(-k_2 + k_4r_{11}))(-1 + r_{11}^2) + 2r_{12}(L_6' + r_{12})r_{11}(-(1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)k_4^2 \\ &\quad - (-k_2 + k_4r_{11}))(-2r_{12}(L_6' + r_{12})r_{11}((1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(2k_1r_{11} - 2L_1' \\ &\quad - (L_4' + k_4r_{11})^2 - (L_5' - k_5r_{12})^2) - (L_2' + k_2r_{11} - r_{11}(L_4' + k_4r_{11}) \\ &\quad - r_{12}(L_5' - k_5r_{12}))^2) - (1 - r_{11}^2 - r_{12}^2 - (L_6' + r_{12})^2 + r_{12}^2(L_6' + r_{12})^2) \\ &\quad ((1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(2k_1 + 2(L_4' + k_4r_{11})k_4) - 2(L_2' + k_2r_{11} - r_{11}(L_4' + k_4r_{11}) \\ &\quad - r_{12}(L_5' - k_5r_{12}))(-k_2 + k_4r_{11}))) = 0 \end{aligned}$$

ii) 식 (34)와 (36) : Bezout의 방법

$$\left| \begin{array}{cc|cc} A & C & H & B \\ G & I & G & A \\ \hline B & C & A & C \\ H & I & G & I \end{array} \right| = 0$$

다음 식은 Bezout 방법으로 r_{22} 가 소거된 결과식이다.

$$\begin{aligned}
& ((-1 + r_{11}^2)(1 - r_{11}^2 - (L_6' + r_{12})^2)(2k_1r_{11} - 2L_1' - (L_2' + k_2r_{11})^2 - (L_3' - k_3r_{12})^2; \\
& - (L_4' + k_4r_{11} - r_{11}(L_2' + k_2r_{11}) - (L_6' + r_{12})(L_3' - k_3r_{12}))^2) - (1 - r_{11}^2 - r_{12}^2 \\
& - (L_6' + r_{12})^2 + r_{12}^2(L_6' + r_{12})^2)(- (1 - r_{11}^2 - (L_6' + r_{12})^2)k_2^2 - (-k_4' + k_2r_{11})^2))^2 \\
& - (((1 - r_{11}^2 - (L_6' + r_{12})^2)(2k_1 + 2(L_2' + k_2r_{11})k_2) - 2(L_4' + k_4r_{11} - r_{11}(L_2' + k_2r_{11} \\
& - (L_6' + r_{12})(L_3' - k_3r_{12}))(-k_4 + k_2r_{11}))(-1 + r_{11}^2) + 2r_{12}(L_6' + r_{12})r_{11}(- (1 - r_{11}^2 \\
& - (L_6' + r_{12})^2)k_2^2k_4 + k_2r_{11})^2))(-2r_{12}(L_6' + r_{12})r_{11}((1 - r_{11}^2 - (L_6' + r_{12})^2) \\
& - (2k_1r_{11} - 2L_1' - (L_2' + k_2r_{11})^2 - (L_3' - k_3r_{12})^2) - (L_4' + k_4r_{11} \\
& - r_{11}(L_2' + k_2r_{11}) - (L_6' + r_{12})(L_3' - k_3r_{12}))^2) - (1 - r_{11}^2 - r_{12}^2 \\
& - (L_6' + r_{12})^2 + r_{12}^2(L_6' + r_{12})^2)((1 - r_{11}^2 - (L_6' + r_{12})^2)(2k_1 \\
& + 2(L_2' + k_2r_{11})k_2) - 2(L_4' + k_4r_{11} - r_{11}(L_2' + k_2r_{11}) - (L_6' + r_{12}) \\
& (L_3' - k_3r_{12})(-k_4 + k_2r_{11}))) = 0
\end{aligned}$$