

전기장을 받는 선형 전왜세라믹 내의 균열해석

범현규* · 정경문** · 강상현**
(2000년 5월 30일 접수)

Analysis of a Crack in a Linear Electrostrictive Ceramic Subjected to Electric Fields

Hyeon Gyu Beom, Kyoung Moon Jeong and Sang Hyeon Kang

Key Words: Electrostrictive Ceramic(전왜세라믹), Crack(균열), Electric Field(전기장), Elastic Field(탄성장), Contact(접촉), Complex Function Theory(복소함수이론), Linear Dielectric Theory(선형 유전체 이론)

Abstract

A crack with electrically conducting surfaces in a linear electrostrictive ceramic subjected to uniform electric fields is analyzed. Complete forms of electric fields and elastic fields for the crack are derived by using the complex function theory. The linear electromechanical theory predicts overlapping of the traction free crack surfaces. It is shown that the surfaces of the crack are contact near the crack tip. The contact zone size obtained on the basis of the linear dielectric theory for the conducting crack does not depend on the electric fields and depends on only the original crack and the material property for the linear electrostrictive ceramic.

1. 서론

전왜세라믹 재료는 전기장을 인가하면 전기장의 제곱에 비례하는 기계적 변형이 발생하는 재료로서 이러한 전기-기계적 커플링 특성을 이용하여 센서(sensor)와 변환기(transducer) 및 액츄에이터(actuator) 등의 재료로 널리 이용되고 있다. 최근에 전왜세라믹 내의 결함에 관한 연구가 여러 연구자들⁽¹⁻⁴⁾에 의해 수행되었다. 전왜세라믹에 전기장이 인가될 때 개재물(inclusion)이나 내부 전극(internal electrode) 주위에 전기장이 집중되어 발생하는 부적합 변형은 응력을 발생시킨다. 균열과 같은 결함은 전극선단에서 미소균열로 발생

하고 진전하여 디바이스의 신뢰성을 감소시키므로 전왜세라믹 내의 균열에 관한 연구는 제품의 신뢰성을 확보하는데 필수적이다.

전기장을 받는 균열을 포함하고 있는 전왜세라믹은 파괴역학적 연구에서 중요성이 증가되고 있다. Smith와 Warren^(5,6)은 선형 전왜세라믹 내의 균열선단에서의 응력특이성에 관해 연구하였다. 그들은 응력 특이성이 균열선단으로부터의 거리 r 에 대해 $1/r$ 임을 보였다. 그러나 이 특이성은 균열선단을 감싸는 작은 영역에서의 변형률에너지가 유한하지 않는 특성을 나타내고 있다. 물리적으로 적합하지 않는 이러한 응력 특이성을 제거하기 위해 McMeeking^(7,8)은 균열을 가느다란 타원(slender ellipse)으로 모델링하여 해석하였다. 최근에 Beom⁽⁹⁾은 비선형 전왜세라믹 내의 균열에 대한 응력 특이성에 대하여 전기적 항복의 영향에 대하여 연구하였다. 그는 지배적인 균열선단

* 회원, 전남대학교 기계공학과
E-mail : hgbeom@chonnam.ac.kr
TEL : (062)530-1682 FAX : (062)530-1689
** 전남대학교 대학원 기계공학과

장의 응력 특이성이 $r^{-1/2}$ 이고 그 크기는 응력강도계수(stress intensity factor)로 특정 지워짐을 보였다. 또한, 소규모 비선형 조건하에 응력강도계수는 전기장의 강도계수와 관계가 있다는 것을 보였다.⁽¹⁰⁾

본 연구의 목적은 전기장이 인가될 때 선형 전왜세라믹 내에 전기적 전도표면(conducting surface)을 갖는 균열문제를 해석하는 것이다. 전도균열(conducting crack)에 대한 전기장과 탄성장의 완전한 형태는 복소함수이론(complex function theory)을 이용하여 유도하였다. 균열면에 기계적 하중이 작용하지 않을 때 선형 유전체 이론(linear dielectric theory)을 적용하여 균열의 진전을 예측할 수 있다.

2. 문제의 수식화

무한대에서 균일한 전기장 E_1^∞ 와 E_2^∞ 를 받는 전왜세라믹 내에 간격 $(-a, a)$ 로 놓여있는 균열의 형상을 Fig. 1에 나타내었다. 전왜세라믹의 외부 경계면에 기계적인 하중은 작용하지 않는다. 균열면에 트래션은 없고 전기적으로 전도된다고 가정한다. 여기서 변위와 전기포텐셜의 면내성분은 Cartesian 좌표 x_1, x_2 에만 의존한다. 평면변형률 조건하에 등방성 전왜세라믹에 대한 변형률은 다음과 같다.^(2,9)

$$\begin{aligned} r_{ij} = & \frac{1+\nu}{Y}(\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}) + Q(1+q)D_i D_j \\ & - Qq(1+\nu)D_k D_k \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 r_{ij} , σ_{ij} 와 D_i 는 각각 변형률, 응력, 전기변위(electric displacement)이다. Y 와 ν 는 Young 계수와 Poisson 비이고, Q 와 q 는 전왜계수, δ_{ij} 는 Kronecker 델타이다. 한 항에서 로마 하침자의 반복은 첨자의 범위 1에서 2까지의 합을 나타낸다. 선형 유전체 재료(linear dielectric material)에 대한 전기장과 전기 변위의 관계식은 다음과 같다.

$$D_i = \epsilon E_i \quad (2)$$

여기서 E_i 는 전기장 벡터이고 ϵ 은 유전율(permittivity)이다.

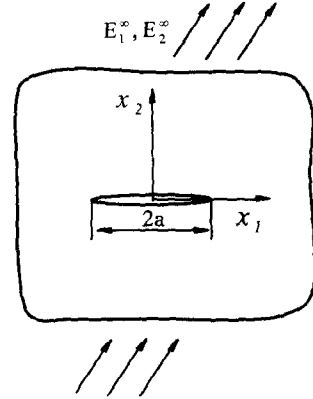


Fig. 1 Crack in an electrostrictive ceramic under electric loading

Knops⁽¹¹⁾는 복소함수이론을 이용하여 2차원 전왜 문제를 해석하였다. 선형 유전체에 대해 2차원 전기장은 복소포텐셜 $\Omega(z)$ 을 이용하여 풀면 다음과 같다.

$$-E_1 + iE_2 = \Omega'(z) \quad (3)$$

여기서 $z = x_1 + ix_2$ 이고, (\cdot) 은 z 에 대한 미분을 의미한다. 평형방정식을 만족하는 변위장에 대한 일반해는 복소함수로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} 2G(u_1 + iu_2) = & (3 - 4\nu)\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ & + S\Omega(z)\overline{\Omega'(z)} + \frac{4(1-\nu)}{\beta} S \int \overline{\Omega'(z)^2} dz \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 u_i 는 변위, $\phi(z)$ 와 $\psi(z)$ 는 해석함수(analytic function)이고 상첨자 $(\bar{\cdot})$ 는 공액복소수를 나타낸다. 상수 G, S 와 β 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G = & \frac{Y}{2(1+\nu)}, \quad S = \frac{1-(1+2\nu)q}{4} \frac{Y}{1-\nu^2} \epsilon^2 Q \\ \beta = & \frac{2-2(1+2\nu)q}{1+q} \end{aligned} \quad (5)$$

응력과 합력(resultant force)은 해석함수를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽¹¹⁾

$$\frac{\sigma_{22} + \sigma_{11}}{2} = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - S\Omega'(z)\overline{\Omega'(z)}$$

$$\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} + i\sigma_{12} = \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) - S\Omega''(z)\overline{\Omega(z)}$$

$$F_1 + iF_2 = -i[\phi(z) + z\phi'(z) + \overline{\psi(z)} - S\Omega(z)\overline{\Omega'(z)}] \quad (6)$$

여기서 F_j ($j=1,2$)는 재료에 작용하는 합력의 성분이다.

전왜세라믹 재료 내의 균열에 대한 해는 문제의 경계조건을 만족하는 함수 $\Omega(z)$, $\phi(z)$, $\psi(z)$ 가 결정되어지면, 전기장과 탄성장은 식 (3), (4)와 (6)으로부터 얻을 수 있다.

3. 전도균열

3.1 트래క్ష이 없는 면을 갖는 전도균열

무한대에서 균일한 전기장을 받는 전왜세라믹 내에 존재하는 전도균열을 생각하자. 전도균열면 ($|x_1| < a$)에 대한 전기-기계적 경계조건은 다음과 같다.

$$E_1(x_1, 0^\pm) = 0 \quad (7)$$

$$\sigma_{22}(x_1, 0^\pm) + i\sigma_{12}(x_1, 0^\pm) = 0$$

무한대에서 경계조건은 다음과 같다.

$$E_1 = E_1^\infty, \quad E_2 = E_2^\infty \quad (8)$$

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = 0$$

트래క్ష이 없는 면을 갖는 전도균열 문제에서 전기장을 발생시키는 복소함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.^(5,6)

$$\Omega(z) = -E_1^\infty \sqrt{z^2 - a^2} + iE_2^\infty z \quad (9)$$

함수 $\Omega(z)$ 는 위에서 결정되었으므로 전기장은 식 (3)으로부터 구할 수 있다. 본 논문에서 전도균열에 대한 전기장의 강도계수는 균열선단으로부터의 거리 r 에서 균열의 연장부분에 대하여 $E_1 = K_1^E/\sqrt{2\pi r}$ 로 정의된다. 균열에 대한 전기장의 강도계수는 식 (3)과 (9)로부터 결정되고, 다음과 같이 주어진다.

$$K_1^E = E_1^\infty \sqrt{\pi a} \quad (10)$$

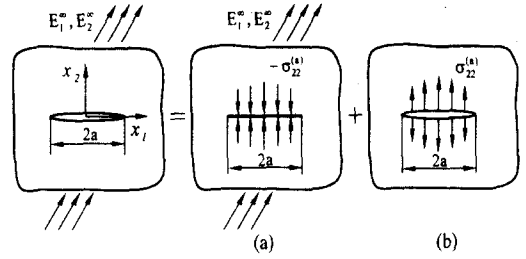


Fig. 2 Application of superposition to obtain the solution for a crack with traction free surfaces

이제는 균열에 대한 탄성장의 해를 알아보자. Fig. 2와 같이 중첩법을 적용하여 트래క్ష이 없는 면을 갖는 전도균열에 대하여 복소함수 $\phi(z)$ 와 $\psi(z)$ 의 엄밀한 형태를 얻을 수 있다. 전도균열 문제에 대해 전기장을 발생시키는 복소함수는 식 (9)로 주어진다. 균열에 대한 복소함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(z) = \phi^{(a)}(z) + \phi^{(b)}(z) \quad (11)$$

$$\psi(z) = \psi^{(a)}(z) + \psi^{(b)}(z)$$

여기서 괄호 안의 상첨자 a 와 b 는 문제 (a)와 (b)에 관련된 양이다. 문제 (a)에서 균열은 무한대에서 균일한 전기장 E_1^∞ 와 E_2^∞ 를 받는 전왜세라믹 내에 간격 $(-a, a)$ 로 놓여있다. 문제 (a)에 대하여 균열면과 무한대에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{22}^{(a)}(x_1, 0^\pm) + i\sigma_{12}^{(a)}(x_1, 0^\pm) = 2S(E_1^\infty)^2$$

$$E_1^{(a)}(x_1, 0^\pm) = 0 \text{ for } |x_1| < a \quad (12)$$

$$E_1^{(a)} = E_1^\infty, \quad E_2^{(a)} = E_2^\infty$$

$$\sigma_{22}^{(a)} + i\sigma_{12}^{(a)} = 0 \text{ as } z \rightarrow \infty$$

문제 (a)에 대한 복소함수의 해는 다음과 같다.

$$\phi^{(a)}(z) = \frac{1}{2} S(E_1^\infty)^2 z + iSE_1^\infty E_2^\infty (\sqrt{z^2 - a^2} - z) \quad (13)$$

$$\psi^{(a)}(z) = 0$$

식 (13)을 얻기 위해 무한대에서 강제회전은 없다고 가정하였다. 포텐셜 (13)에 의해 발생하는 모

든 응력은 무한대에서 영(zero)이고, 매우 작은 반경을 갖는 전도균열선단을 감싸는 닫혀진 곡선에 대한 합력(resultant force)은 영이다.

전기장이 작용하지 않는 문제 (b)에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(b)}(x_1, 0^\pm) + i\sigma_{12}^{(b)}(x_1, 0^\pm) &= -2S(E_1^\infty)^2 \\ E_1^{(b)}(x_1, 0^\pm) &= 0 \text{ for } |x_1| < a \\ E_1^{(b)} = E_2^{(b)} = 0, \sigma_{22}^{(b)} + i\sigma_{12}^{(b)} &= 0 \text{ as } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (14)$$

문제 (b)에 대한 해는 이미 잘 알려져 있다.^(12,13)

$$\begin{aligned} \phi^{(b)}(z) &= S(E_1^\infty)^2(\sqrt{z^2 - a^2} - z) \\ \psi^{(b)}(z) &= -S(E_1^\infty)^2 \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \end{aligned} \quad (15)$$

트랙션이 없는 면을 갖는 전도균열에 대한 복소함수의 해는 문제 (a)와 (b)에 대한 해의 중첩으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{2} S(E^\infty)^2 z + S\{(E_1^\infty)^2 + iE_1^\infty E_2^\infty\} \\ &\quad \times (\sqrt{z^2 - a^2} - z) \\ \psi(z) &= -S(E_1^\infty)^2 \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $E^\infty = \sqrt{(E_1^\infty)^2 + (E_2^\infty)^2}$ 이다. 식 (4), (9)와 (16)으로부터 $\Delta u_2(x_1) = u_2(x_1, 0^+) - u_2(x_1, 0^-)$ 로 정의되는 균열면에 대한 변위의 점프(jump)는 다음과 같다.

$$\Delta u_2(x_1) = \frac{2(1-\nu)(E_1^\infty)^2 S}{G} \left[2\sqrt{a^2 - x_1^2} - \frac{\pi a}{\beta} \right] \quad (17)$$

복소함수 (9)와 (16)에 의해 발생하는 응력은 균열면에 대해 트랙션이 없다는 경계조건을 만족한다. 그러나 균열선단근처에서 균열면에 대한 수직변위가 $\beta > 0$ 에 대하여 음(negative)의 값을 갖기 때문에 균열선단 근처에서 균열면이 닫혀짐을 식 (17)로부터 쉽게 알 수 있다. 전왜세라믹에 대한 전형적인 β 의 범위는 $0 < \beta < \frac{3}{2}$ 이다.⁽³⁾ 그러므로, 무한대에서 균일한 전기장을 받는 전도균열면은 균열선단근처에서 접촉이 발생한다.

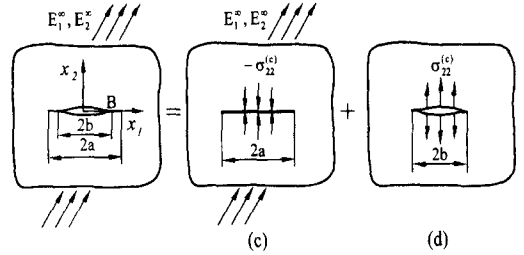


Fig. 3 Application of superposition to obtain the solution for a conducting crack with a contact zone

3.2 닫힌 부분을 갖는 전도균열

무한대에서 균일한 전기장을 받는 전왜세라믹 내에 닫힌 부분을 갖는 전도균열을 생각하자. 균열면에 마찰이 없다고 가정하면 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_1, 0^\pm) + i\sigma_{12}(x_1, 0^\pm) &= 0 \text{ for } |x_1| < b \\ u_2(x_1, 0^+) &= u_2(x_1, 0^-) \\ \sigma_{12}(x_1, 0^\pm) &= 0 \text{ for } b < |x_1| < a \\ E_1(x_1, 0^\pm) &= 0 \text{ for } |x_1| < a \\ \sigma_{22} + i\sigma_{12} &= 0 \\ -E_1 + iE_2 &= -E_1^\infty + iE_2^\infty \text{ as } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (18)$$

중첩의 원리를 이용하여 균열선단 근처에 접촉부를 갖는 전도균열에 대한 해를 얻을 수 있다. 접촉부를 갖는 균열에 적용한 중첩법은 Fig. 3에 나타내었다. 접촉부를 갖는 전도균열에 대한 복소함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi^{(c)}(z) + \phi^{(d)}(z) \\ \psi(z) &= \psi^{(c)}(z) + \psi^{(d)}(z) \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 괄호 안의 상첨자 c와 d는 각각 문제 (c)와 (d)에 관련된다. 무한대에서 균일한 전기장 E_1^∞ 와 E_2^∞ 를 받는 전왜세라믹 내에 간격 $(-a, a)$ 으로 닫혀진 균열이 놓여있는 문제 (c)의 균열면에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_2^{(c)}(x_1, 0^+) &= u_2^{(c)}(x_1, 0^-) \\ \sigma_{12}^{(c)}(x_1, 0^\pm) &= 0 \\ E_1^{(c)}(x_1, 0^\pm) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

단혀진 균열에 대한 전기장의 해는 식 (9)에서 주어진 전도균열에 대한 해와 일치하므로, 문제 (c)에 대한 복소함수의 해는 문제 (a)의 해를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi^{(c)}(z) &= \phi^{(a)}(z) + \phi^{(m)}(z) \\ \psi^{(c)}(z) &= \psi^{(a)}(z) + \psi^{(m)}(z) \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 $\phi^{(a)}(z)$ 와 $\psi^{(a)}(z)$ 는 식 (13)에 주어졌다. 포텐셜 $\Omega(z)$, $\phi^{(a)}(z)$ 와 $\psi^{(a)}(z)$ 로 인한 수직변위는 균열면 $|x_1| < a$ 에 대해 불연속이다. 그러므로, 탄성장은 균열면을 따라서 수직변위장에 적합하도록 더해져야 한다. 추가적인 탄성장이 수직변위에 적합시키면서 발생하는 복소함수 $\phi^{(m)}(z)$ 와 $\psi^{(m)}(z)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi^{(m)}(z) &= GC \ln \frac{z-a}{z+a} \\ \psi^{(m)}(z) &= GC \left[\ln \frac{z-a}{z+a} - \frac{2az}{z^2-a^2} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

단혀진 균열에 대한 복소함수의 해는 식 (11), (21)과 (22)로 얻어지며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi^{(c)}(z) &= \frac{1}{2} S(E^\infty)^2 z + iSE_1^\infty E_2^\infty (\sqrt{z^2-a^2}-z) \\ &\quad + GC \ln \frac{z-a}{z+a} \\ \psi^{(c)}(z) &= GC \left[\ln \frac{z-a}{z+a} - \frac{2az}{z^2-a^2} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 $C = \frac{(1+q)\epsilon^2 Q(K_1^E)^2}{8\pi(1-\nu)}$ 이다. 포텐셜 (9)와 (23)에 의해 발생하는 응력은 점 $(a, 0)$ 에서 전도 균열의 오른쪽 끝단에서 $O\left(\frac{1}{z-a}\right)$ 을 갖는다. 그러나 감싸진 곡선내의 재료는 평형상태이기 때문에 균열선단을 감싸는 닫혀진 곡선에 대한 합력은 없다. $|x_1| < a$ 에 대하여 닫혀진 균열면에 대한 변위의 점프는 식 (4), (9)와 (23)으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Delta u_1^{(c)} + i\Delta u_2^{(c)} = \frac{4(1-\nu)}{G} \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) SE_1^\infty E_2^\infty \sqrt{a^2-x_1^2} \quad (24)$$

단혀진 균열면에 대해 전단변위는 식 (24)로 알 수 있고, 응력은 식 (6), (9)와 (24)로부터 다음과

같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(c)}(x_1, 0^\pm) + i\sigma_{12}^{(c)}(x_1, 0^\pm) \\ = \frac{4GC}{a} \left[\beta - \frac{a^2}{a^2-x_1^2} \right] \text{ for } |x_1| < a \end{aligned} \quad (25)$$

단혀진 균열의 모든 표면에 대한 수직응력은 $\beta < 1$ 에 대하여 압축(compressive)상태이므로 균열의 모든 면은 닫혀진다. 그러나 균열면의 한 부분인 $|x_1| < a\sqrt{1-\frac{1}{\beta}}$ 에 작용하는 수직응력은 $\beta > 1$ 에 대하여 인장(tensile)이다. 그러므로, 균열의 모든 면은 완전히 닫혀 있지 않는다. 전도균열의 표면은 인장응력의 영향으로 인해 균열중심 근처에서 부분적으로 열려있다.

문제 (d)는 전기장이 작용하지 않는 전왜세라믹 내에 간격 $(-b, b)$ 로 균열이 놓여있다. 여기서 b 는 나중에 정확하게 결정되는 전도균열에 대한 열림 영역 크기의 반이다. 문제 (d)의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(d)}(x_1, 0^\pm) + i\sigma_{12}^{(d)}(x_1, 0^\pm) \\ = -[\sigma_{22}^{(c)}(x_1, 0^\pm) + i\sigma_{12}^{(c)}(x_1, 0^\pm)] \\ E_1^{(d)}(x_1, 0^\pm) = 0 \text{ for } |x_1| < b \\ E_1^{(d)} = E_2^{(d)} = 0, \sigma_{22}^{(d)} + i\sigma_{12}^{(d)} = 0 \text{ as } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (26)$$

문제 (d)에 대한 해는 이미 잘 알려져 있다.^(12,13)

$$\begin{aligned} \phi^{(d)}(z) &= -\frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{-b}^b \frac{\sigma_{22}^{(c)}(t) dt}{\chi^+(t)(t-z)} \\ \psi^{(d)}(z) &= \bar{\phi}^{(d)}(z) - z\phi^{(d)}(z) \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 $\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-b^2}}$ 이고, $\sigma_{22}^{(c)}$ 는 식 (25)으로 주어지고, 유수(residue) 이론을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi^{(d)}(z) &= \frac{2GC}{a} \left[\beta \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2-b^2}} - 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{a^2-z^2} \left\{ 1 - \frac{z}{a} \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{z^2-b^2}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

식 (28)을 적분하여 식 (30)을 얻는데 다음과 같은 관계가 사용되었다.

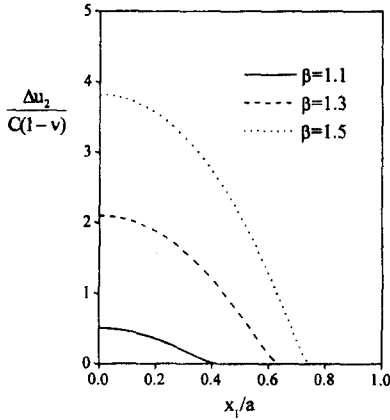


Fig. 4 Displacement difference as a function of x_1/a

$$\int \frac{z}{z^2 - a^2} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - b^2}} \quad (29)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{z^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}} \right\}$$

문제 (d)에 대한 복소함수는 다음과 같다.

$$\phi^{(d)}(z) = GC \left[\frac{2B}{a} \left\{ \sqrt{z^2 - b^2} - z \right\} - \ln \left\{ \left(\frac{z-a}{z+a} \right) \times \frac{\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{z^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}} \right\} \right]$$

$$\psi^{(d)}(z) = \bar{\phi}^{(d)}(z) - z\phi^{(d)'}(z) \quad (30)$$

균열이 열려진 크기는 조건 $K_I^B = 0$ 으로부터 결정되고 여기서 K_I^B 는 점 $B(x_1 = b, x_2 = 0)$ 에서 부분적으로 열려진 균열의 오른쪽 끝단에 대한 응력강도계수이다. 응력강도계수 K_I^B 는 식 (6)과 (30)으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$K_I^B = \frac{4GC}{a} \sqrt{\pi b} \left[\beta - \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right] \quad (31)$$

b 에 대해 $K_I^B = 0$ 을 풀면 열림 영역의 크기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$b = a \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}} \quad \text{for } \beta > 1$$

$$b = 0 \quad \text{for } 0 < \beta \leq 1 \quad (32)$$

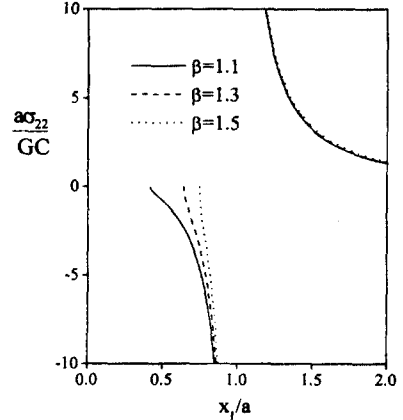


Fig. 5 Normal stress for the conducting crack on the x_1 axis as a function of x_1/a

균열의 열림 영역의 크기는 전기장과는 무관하고 전왜세라믹 재료에 대한 초기 균열크기와 재료특성 β 에만 의존한다. 접촉영역을 갖는 전도균열에 대한 복소함수는 위에서 완전하게 결정되었으므로, 변위와 응력은 식 (4)와 (6)으로부터 구할 수 있다. 응력장은 전기장 E_1^∞ 에는 의존하지만 E_2^∞ 와는 무관하다. 응력은 모드 I 대칭 조건인 $\sigma_{11}(x_1, x_2) = \sigma_{11}(x_1, -x_2)$, $\sigma_{22}(x_1, x_2) = \sigma_{22}(x_1, -x_2)$ 과 $\sigma_{12}(x_1, x_2) = -\sigma_{12}(x_1, -x_2)$ 를 만족한다. 응력장과는 달리 변위장은 전기장 E_1^∞ 와 E_2^∞ 에 의존하고 모드 I 대칭조건을 만족하지 않는다. 선형이론으로 트랙선이 없는 면을 갖는 균열의 경우와는 반대로 접촉부를 갖는 균열선단근처에 점근응력장이 역제곱근의 특이성을 갖지 않는 것을 알 수 있다. $|x_1| < b$ 에 대하여 균열면에 대한 수직변위에서 점프는 다음과 같다.

$$\Delta u_2 = 8C(1 - \nu) \left[\frac{\sqrt{b^2 - x_1^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{b^2 - x_1^2}}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \right] \quad (33)$$

β 의 특정한 값에 대하여 x_1/a 의 함수로서 수직변위에 대한 점프의 분포를 Fig. 4에 나타내었다. 전왜세라믹의 재료특성 β 가 커지면서 균열면의 접촉부는 더 작아지고, 균열의 열림영역의 크기는 더 커진다는 것을 알 수 있다. 전도균열의 표면에 대한 닫혀진 영역내의 응력은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = -4GC \frac{x_1}{a^2 - x_1^2} \frac{\sqrt{x_1^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{for } b < |x_1| < a \quad (34)$$

수직응력이 압축상태이므로 균열의 표면이 닫혀진다는 것을 알 수 있다. $x_1 > a$ 에 대하여 전도균열의 연장부분에 대한 응력은 다음과 같다.

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{4GC}{a} \left[\beta \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} - 1 \right) - \frac{ax_1}{a^2 - x_1^2} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} \right] \quad (35)$$

$x_2 = 0$ 일 때 수직응력을 Fig. 5에 β 의 특정한 값에 대하여 x_1/a 의 함수로서 나타내었다. 균열면의 접촉부에는 압축상태이고, 균열의 연장부분에 대해 인장상태임을 알 수 있다.

4. 결론

균일한 전기장을 받는 선형 전왜세라믹 내에 전기적으로 전도되는 면을 갖는 균열을 해석하였다. 표면에 트랙선이 없는 전도균열에 대해 전기장과 탄성장의 완전한 해는 복소함수이론을 이용하여 유도하였다. 균열선단 근처에서 균열면의 접촉이 일어남을 보였으며, 접촉부를 갖는 균열에 대한 해를 구하였다. 선형 유전체 이론을 토대로 한 전도균열의 접촉부의 크기는 전기장과는 무관하고 전왜세라믹에 대한 초기 균열크기와 재료특성에만 의존한다는 것을 알 수 있다.

후 기

이 논문은 1998년 한국학술진흥재단의 학술연구비에 의하여 지원되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Hao, T. H., Gong, X. and Suo, Z., 1996, "Fracture Mechanics for the Design of Ceramic Multilayer Actuators," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 44, pp. 23~48.
- (2) Yang, W. and Suo, Z., 1994, "Cracking in Ceramic Actuators Caused by Electrostriction," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 42, pp. 649~663.
- (3) Ru, C. Q., Mao, X. and Epstein, M., 1998, "Electric-Field Induced Interfacial Cracking in Multilayer Electrostrictive Actuators," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 46, pp. 1301~1318.
- (4) Winzer, S. R., Shankar, N. and Ritter, A. P., 1989, "Designing Cofired Multilayer Electrostrictive Actuators for Reliability," *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 72, pp. 2246~2257.
- (5) Smith, T. E. and Warren, W. E., 1966, "Some Problems in Two-Dimensional Electrostriction," *J. Math. Phys.*, Vol. 45, pp. 45~51.
- (6) Smith, T. E. and Warren, W. E., 1968, Corrigenda to "Some Problems in Two-Dimensional Electrostriction," *J. Math. Phys.*, Vol. 47, pp. 109~110.
- (7) McMeeking, R. M., 1987, "On Mechanical Stresses at Cracks in Dielectric With Application to Dielectric Breakdown," *J. Appl. Phys.*, Vol. 62, pp. 3116~3122.
- (8) McMeeking, R. M., 1989, "Electrostrictive Stresses Near Crack-Like Flaws," *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 40, pp. 615~627.
- (9) Beom, H. G., 1999, "Singular Behaviour Near a Crack Tip in an Electrostrictive Material," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 47, pp. 1027~1049.
- (10) Beom, H. G., 1999, "Small Scale Nonlinear Analysis of Electrostrictive Crack Problems," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 47, pp. 1379~1395.
- (11) Knops, R. J., 1963, "Two-Dimensional Electrostriction," *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 16, pp. 377~388.
- (12) Muskhelishvili, N. I., 1963, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Netherlands.
- (13) England, A. H., 1971, *Complex Variable Methods in Elasticity*, John Wiley & Sons Ltd., New York.
- (14) Suo, Z., 1993, "Models for Breakdown-Resistant Dielectric and Ferroelectric Ceramics," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, pp. 1155~1176.
- (15) Uchino, K., 1986, "Electrostrictive Actuators: Materials and Applications," *Am. Ceram. Soc. Bulletin*, Vol. 65, pp. 647~652.