자동미분을 이용한 민감도기반 분리시스템동시최적화기법의 개선

박 창 규* · 이 종 수**

(1999년 11월 25일 접수)

Improvement of Sensitivity Based Concurrent Subspace Optimization Using Automatic Differentiation

Changkue Park and Jongsoo Lee

Key Words: Multidisciplinary Design Optimization(다분야통합최적설계), Concurrent Subspace Optimization(분리시스템 동시최적화), Sensitivity Analysis(민감도해석), Automatic Differentiation(자동미분)

Abstract

The paper describes the improvement on concurrent subspace optimization(CSSO) via automatic differentiation. CSSO is an efficient strategy to coupled multidisciplinary design optimization(MDO), wherein the original design problem is non-hierarchically decomposed into a set of smaller, more tractable subspaces. Key elements in CSSO are consisted of global sensitivity equation, subspace optimization, optimum sensitivity analysis, and coordination optimization problem that require frequent use of 1st order derivatives to obtain design sensitivity information. The current version of CSSO adopts automatic differentiation scheme to provide a robust sensitivity solution. Automatic differentiation has numerical effectiveness over finite difference schemes that require the perturbed finite step size in design variable. ADIFOR(Automatic Differentiation In FORtran) is employed to evaluate sensitivities in the present work. The use of exact function derivatives facilitates to enhance the numerical accuracy during the iterative design process. The paper discusses how much the automatic differentiation based approach contributes design performance, compared with traditional all-in-one(non-decomposed) and finite difference based approaches.

1. 서 론

다기능, 다목적 등의 제품적 설계성능의 특성을 요구하는 최적화문제에서는 다수의 공학적 현상이 연관된 다분야 해석 및 설계기술이 필요하다. 즉, 다양한 공학적 원리를 동시에 고려하여 균형 있고 유기적인 방법으로 최적의 설계를 결정하는 체계적인 설계자동화기술인 다분야통합최적설계(multidisciplinary design optimization, MDO) 기술[1,2]이 요구된다. 전통적인 최적화방법에서는 목적함수, 설계변수 및 구속조건 등을 정의하는 최적설계문제의 수학적 표현을 하나의 설계시스템으로 고려하여 해석용 CAE 소프트웨어와 연결하여 설계해를 탐색하는 과정을 거친다. 그러나 MDO에 있어서 대부분의 설계변수들이 다수의 공학적 현상과 연관되어 있으므로 최종적으로 얻어진 최적설계해의 의미를 판정하기 어려울 뿐 아니라 설계변수의 개수가 많은 대규모 설계문제인 경우, 모든 설계변수가 최적해에 도달하기 전에 수렴(premature convergence)한다. 이러한 최적화과정상의 문제를 효율적으로 해결하기 위해 분

* 연세대학교 대학원 기계공학과
** 회원, 연세대학교 기계전자공학부
E-mail : jleej@yonsei.ac.kr
TEL : (02)361-4474 FAX : (02)362-2736

리기반 설계(decomposition based design)기법[3,4]이 적용된다.

MDO방법론 중에 하나인 분리시스템동시최적화(concurrent subspace optimization, CSSO)[5,6]는 하나의 설계시스템을 여러 개의 하부시스템으로 분리하여 독립적으로 설계를 수행하고, 최종적으로 통합된 최적설계를 찾는 방법이다. MDO문제는 설계변수의 구성 및 연관된 공학적 현상에 따라 수직적(hierarchical) 또는 비수직적(nonhierarchical) 계층구조 등 여러 형태의 하부시스템으로 구성되는데, 일반적으로 수직적으로 연성(coupling)된 분리시스템을 구성하기 어려우므로 비수직적으로 하부시스템을 구성한다. CSSO는 다수의 하부시스템간에 연성관계가 비수직적으로 작용할 때 적용 가능한 분리기반 MDO방법론이다. CSSO는 비선형수리계획법을 근간으로 하는 민감도기반 다분야통합최적화방법으로서, 하부시스템간의 연관관계를 민감도해석을 통해 최적화를 동시적으로 수행하고 최종적으로 최적의 상태로 통합화되는 설계해를 탐색하는 과정인데, 최적화 및 민감도해석의 각 단계에서는 매번 1차 미분의 결과를 요구한다.

수식적으로 표현 가능한 경우에는 직접 미분을 취하여 엄밀해를 얻을 수 있으나, 유한요소 수식화 등을 통해 계산되는 구조 및 유동해석의 경우에는 정확한 함수의 표현(closed form)이 불가능하므로 대부분의 경우 유한차분법(finite difference scheme)에 의해 계산한다. 이때, 전방, 후방 및 중앙차분법 등에 의한 미분의 계산은 각각 2번 또는 3번의 함수계산이 필요하고 입력설계변수의 변화량(perturbed step size, Δx_i)에 따라 미분의 결과가 좌우된다. 예를 들어, 설계 변수의 변화량을 작게 선택한 경우에는 최적화 과정의 반복시간이 길어지게 되고, 변화량을 크게 선정하는 경우에는 수치적 오차에 의해 엄밀해와 다른 결과를 생성하게 된다. 이러한 문제는 설계변수 및 파라미터에 대해 비선형적인 반응함수에 대해 두드러지게 나타나고 수많은 반복과정을 거치는 동안 수치적 오차가 누적되는 결과를 가져온다. 유한차분에 의한 민감도기법의 문제를 해결하기 위해서는 반응함수의 민감도를 구성하는 각 편미분 성분들의 특성을 고려한 미분계산이 요구되는데, 자동미분(automatic differentiation)은 각 독립변수와 종속변수의 관계를 이용하는 연쇄 법칙(chain rule)을 근거로 신뢰성 있는 미분의 해를 제시하는 계산기법이다. 자동미분은 편미분의 관계를 컴퓨터 프로그램에 의해 직접 미분하여 최종적인 전미분(total derivative)의 해를 계산하므로 유한차분법에서 요구되는 변수 변화량을 요구하지 않고 기계오차(machine precision)의 범위 한도 내에서 엄밀 해와 일치된 결과를 생성할 수 있다. 자동미분은 수학적 이론[7,8]에서 출발하여 다양한 기법이 개발되었으며, 최근에 와서는 각 프로그램의 언어 특성에 맞는 자동미분용 계산 도구의 계속적인 발전으로 구조설계를 위한 대규모 최적화 문제[9]뿐 아니라, 전산유체역학에 의한 공력설계 문제[10,11]에도 적용되고 있다.

본 연구에서는 MDO를 수행하는 경우에 있어서 유한차분방법에 근거한 1차 미분과정으로부터 발생하는 문제점을 극복하고 함수계산량을 줄이기 위한 방법으로 자동미분을 이용함으로써 CSSO의 효율성을 제고하고자 한다. 본 논문에서는 CSSO의 수식화 과정을 설명하고 자동미분의 개념 및 중요성을 함께 서술한다. 또한, 설계문제의 적용사례를 통해 자동미분에 의해 개선된 CSSO의 설계해를 전통적 최적설계기법(all-in-one design approach) 및 유한차분법에 의한 CSSO 결과와 비교하고자 한다.

2. 분리시스템 동시최적화

CSSO는 분리된 하부시스템간의 연성을 고려한 전역민감도해석(global sensitivity equation, GSE)을 통해 목적함수 및 구속조건의 만족도 등에 대한 설계정보를 계산하고, 이를 이용하여 각 하부시스템에서 최적화(subspace optimization, SSO)를 수행한다. 하부시스템 최적해에 대한 민감도해석(optimal sensitivity analysis, OSA)을 실시하고 각 하부시스템을 최적으로 통합하는 중재통합최적화(coordination optimization problem, COP)를 통해 수렴된 설계해를 탐색한다.

2.1 전역민감도

MDO문제는 연관된 공학적 원리 및 특성에 따라 다수의 하부시스템으로 구성할 수 있으며, 이들은 서로 연성의 관계를 갖는다. 예를 들어, Fig. 1과 같이 전체 시스템이 두 개의 하부시스템, A와 B로 이루어진 경우 다음과 같이 표현

할 수 있다.

$$A[(X_A, X_B), Y_A] = 0 \qquad (1)$$
$$B[(X_B, X_A), Y_B] = 0$$

$$Y_A = Y_A(X_A, Y_B) \qquad (2)$$
$$Y_B = Y_B(X_B, Y_A)$$

여기서 X_A 및 X_B는 각 하부시스템에 소속된 설계변수이고, 식 (2)에서는 각 하부시스템으로부터 얻어진 반응함수 Y_A와 Y_B가 각각, 다른 하부 시스템의 해석 결과인 Y_B 및 Y_A와 서로 연성되어 있음을 보여준다. 이러한 하부 시스템간의 연성을 고려하기 위해 각 설계변수에 대한 반응함수의 민감도를 계산하는데, 식 (2)에 연쇄법칙을 적용하면 각 하부시스템 A와 B에서의 전미분의 결과를 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{\partial Y_A}{\partial Y_B} \\ -\frac{\partial Y_B}{\partial Y_A} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dY_A}{dX_A} \\ \frac{dY_B}{dX_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dY_A}{dX_A} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{\partial Y_A}{\partial Y_B} \\ -\frac{\partial Y_B}{\partial Y_A} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dY_A}{dX_B} \\ \frac{dY_B}{dX_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dY_B}{dX_B} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

여기서 $\frac{dY_A}{dX_A}$, $\frac{dY_A}{dX_B}$, $\frac{dY_B}{dX_A}$ 및 $\frac{dY_B}{dX_B}$ 등을 전역민감도(GSE)라 하며, 이러한 결과를 이용하여 각 하부시스템간의 연성된 설계변수 및 반응함수의 결과 사이의 연관관계를 파악할 수 있다.

2.2 영향계수

각 하부시스템에 존재하는 다량의 구속조건은

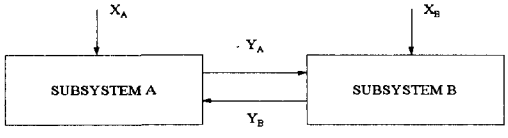

Fig. 1 Two-way coupling in subsystem interaction

K-S 함수식(Kreisselmerier-Steinhauser function)을 이용하면 식 (5)와 같이 하나의 구속함수누계(cumulative constraint measure, CMC)로 표현된다.

$$C = \frac{1}{\rho} \ln\left[\sum_{j=1}^{m} \exp(\rho \cdot g_j)\right] \qquad (5)$$

여기서, m은 구속조건의 개수이며 ρ는 사용자에 의해 정의되는 상수이고 g_j는 부등식 구속조건이다. 이때, CMC의 값이 양(positive)이면 구속조건을 만족하지 않는 불용설계해(infeasible design)가 존재한다는 것을 의미한다. 설계변수 변화에 대한 구속조건의 변화량를 표현하면 식 (6)으로 주어진다.

$$\frac{dC}{dX_i} = \left[\sum_{j=1}^{m} \exp(\rho \cdot g_j)\right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^{m} \left\{\frac{dg_j}{dX_i} \exp(\rho \cdot g_j)\right\}\right] \qquad (6)$$

구속조건을 갖는 최적화문제에서 반응함수의 민감도를 분석하기 위해서는 구속조건뿐 아니라 목적함수 F의 변화량도 고려해야 하는데, 이를 영향계수(effectiveness coefficient)라 정의하고 식 (7)과 같이 표현한다.

$$e_{ij} = \frac{dg_j/dX_i}{dF/dX_i} \qquad (7)$$

또한, 모든 구속조건에 대한 설계변수의 전체의 영향도를 분석하기 위해 식 (6)을 이용하여 식 (7)을 다시 표현하면 아래와 같다.

$$e_i = \frac{dC/dX_i}{dF/dX_i} \qquad (8)$$

식 (8)은 CSSO의 효율적인 설계시스템의 분리 및 수렴성을 향상시키기 위한 기준으로 사용된다. 예를 들어 하부시스템, A와 B에서 어떤 설계변수 X_i에 대한 영향계수의 값이 A에서보다 B에서 작을 경우 그 설계변수는 B에 할당된다. 즉, 영향계수가 크면 최적화과정에서 목적함수의 변화보다는 구속조건의 변화에 의해 영향을 크게 받으므로 유용설계(feasible design)를 더 많이 얻을 수 있는 하부시스템에 설계변수를 할당하도록 조절한다.

2.3 책임계수 초기화

설계변수의 할당 후, 각 하부시스템에서 발생하는 구속조건의 위배정도를 분석하기 위한 방법으로 책임계수(responsibility parameter, r_k^p)를 사용한다. r_k^p의 초기화는 식 (9)와 같이 k-번째 하부시스템에 관련된 설계변수에 대한 p-번째 CMC의 미분을 거쳐 얻는다.

$$C_i^{pk} \equiv \frac{dC^p}{dX_i^k} \qquad i=1,\cdots,nxk \tag{9}$$

여기서, nxk는 k-번째 하부시스템에 있는 설계변수의 총 개수이다. 다량의 하부시스템에 대한 CMC 민감도행렬은 다음 식 (10)과 같이 자코비안(Jacobian)으로 표현된다.

$$J = \begin{array}{c} \\ k=1 \\ \vdots \\ \\ \\ k=\xi \end{array} \begin{bmatrix} p=1 & \cdots & p=\xi \\ C_1^{11} & & C_1^{\xi 1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{nx1}^{11} & & C_{nx1}^{\xi 1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ C_1^{1\xi} & & C_1^{\xi\xi} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{nx\xi}^{1\xi} & & C_{nx\xi}^{\xi\xi} \end{bmatrix} \tag{10}$$

여기서, ξ는 하부시스템의 개수이고 $nx\xi$는 ξ번째 하부시스템에서의 설계변수의 개수이다. 변수 v_k^p는 각 하부시스템에 대한 민감도의 최대 절대치의 항으로 정의될 수 있는데 다음과 같이 표현된다.

$$v_k^p = \frac{\max_i(|C_i^{pk}|)}{\max_k[\max_i(|C_i^{pk}|)]} \tag{11}$$

또한, v_k^p를 비율(scaling)로 나타내고 이를 r_k^p라 하며, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$r_k^p = \left(\frac{1}{\sum_k v_k^p}\right) v_k^p \qquad p=1,\xi \tag{12}$$

2.4 하부시스템최적화

책임계수의 초기화가 이루어지면 각 하부시스템에서 최적화(subspace optimization, SSO)가 수행되는데 최적화문제의 수학적 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } F(X^k) && (13)\\ &\text{subject to} && C^p \le C^{p0}[s^p(1-r_k^p)+(1-s^p)t_k^p] \\ & && X_k^L \le X_k \le X_k^U \end{aligned}$$

여기서, NSS는 하부시스템의 개수이며 C^p는 p번째 하부 시스템에 존재하는 CMC이다. s^p, r_k^p및 t_k^p는 하나의 설계문제를 여러 개의 하부시스템으로 분리함으로 인해 나타나는 상호영향을 고려하기 위한 파라미터이다. r_k^p는 p번째 SSO에서 CMC의 위배성을 줄이기 위하여 k번째 SSO에 할당된 책임(responsibility)을 나타낸다. 즉, 하부시스템의 연성된 관계를 고려하여 각 하부시스템이 구속조건의 위배정도에 대한 책임을 식 (11)의 결과로부터 나누어 갖게 되는데 이것을 도식화하면 Fig. 2와 같다.

교환계수(trade-off coefficient) t_k^p 는 p-번째 SSO에서 목적함수를 줄이기 위하여 구속조건이 위배

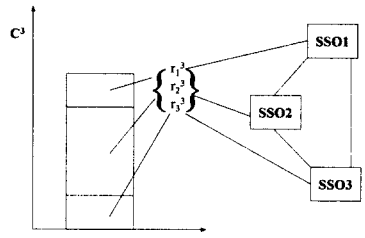

Fig. 2 Distribution of values for responsibility coefficients in three subspaces

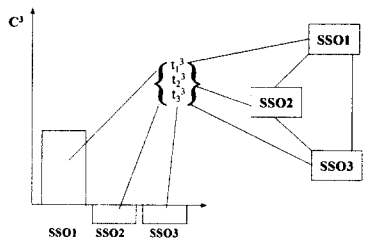

Fig. 3 Trade-off coefficient values for three subspaces

되었을 때, k-번째 SSO에서 구속조건을 원래보다 조금 더 만족하여 전체에 대하여 구속조건이 상쇄되도록 조절한다. 즉, 하나의 하부시스템에서 구속조건이 커지면 나머지 하부시스템은 작아지게 되어 결국은 전체의 합은 0이 되는 관계를 의미하는데 이를 Fig. 3에 나타내었다. s^p는 SSO에서 r_k^p와 t_k^p계수 중에서 한가지만을 SSO과정에서 사용하도록 표현하기 위한 스위치 파라미터(switch parameter)이다.

2.5 최적민감도해석

SSO에서는 최적화문제의 구속조건이 r_k^p 또는 t_k^p로 표현되므로 새로운 최적점이 이러한 파라미터에 의존하게 된다. 최적민감도해석(OSA)은 라그란지 승수에 기초한 Kuhn-Tucker condition으로 정의되는데, 수학적 표현은 다음과 같다.

$$\nabla F(X^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(X^*) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_{k+m} \nabla h_k(X^*) = 0 \quad (14)$$

$$\lambda_j g_j(X^*) = 0 \quad j = 1, m \quad \text{and} \quad \lambda_j \geq 0$$

여기서, λ_j와 λ_{k+m}은 각각 등식 구속조건과 부등식 구속조건에 관계된 라그란지 승수이며, X^*는 구속최적설계해(constrained optimum design)를 나타낸다. 부등식 구속조건만을 고려하고 식(5)를 이용하면 식 (14)는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dF}{dX_k^*} + \lambda_k \frac{dC}{dX_k^*} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dF}{dX_k^*} + \sum_{p=1}^{\xi} \lambda_k^p \frac{dC^p}{dX_k^*} = 0 \quad (16)$$

식 (16)의 결과로부터 라그란지 승수는 식 (17)과 같다.

$$[\lambda_k] = -\left[\left[\frac{dC}{dX^k}\right]^T \left[\frac{dC}{dX^k}\right]\right]^{-1} \left[\frac{dC}{dX^k}\right]^T \left[\frac{dF}{dX^k}\right] \quad (17)$$

$$[\lambda_k] = [\lambda_k^1, \lambda_k^2, \cdots, \lambda_k^\xi]^T$$

$$[dC/dX^k] = [dC^1/dX^k, dC^2/dX^k, \cdots, dC^\xi/dX^k]^T$$

라그란지 승수를 구한 후 목적함수 F의 최적민감도(optimum sensitivity)는 식 (18)과 같은데, 여기서 z_i는 r_k^p 또는 t_k^p를 나타내는 변수이다.

$$\frac{dF}{dz_i} = \sum_p \lambda_k^p \frac{dC^p}{dz_i} \quad (18)$$

2.6 중재통합 최적화문제

최적민감도해석의 결과인 식 (18)은 전체설계문제에 대한 연관관계를 나타내는 r_k^p, t_k^p를 통합화하여 얻은 결과이다. 이를 이용하여 중재통합 최적화문제(COP)를 구성하는데 다음과 같다.

$$\text{Minimize } F(r_k^p, t_k^p) \quad (19)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_k r_k^p = 1$$

$$\sum_k t_k^p = 0$$

$$0 \leq r_k^p \leq 1$$

$$r_{kL}^p \leq r_k^p \leq r_{kU}^p \quad \text{and} \quad t_{kL}^p \leq t_k^p \leq t_{kU}^p$$

COP에서 계수를 개선한 후에 CSSO가 수렴될 때까지 반복되는데, 설계과정의 흐름도를 도식적으로 나타내면 Fig. 4와 같다.

3. 자동미분

3.1 기본 개념

자동미분은 계산과정에 필요한 독립변수 및 종속변수의 연쇄적 관계를 이용하여 반응함수의 미분을 자동으로 계산하는 수치적 도구이다. 자동미분의 기본 원리는 크게 두 가지로 나누어지는데, 독립변수와 종속변수간의 연쇄법칙을 이용하

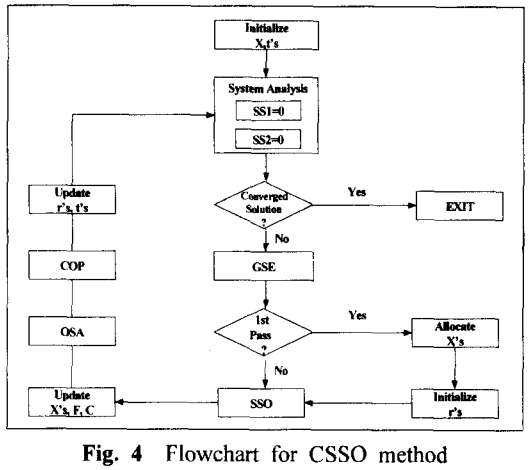

Fig. 4 Flowchart for CSSO method

여 미분이 전개되는 방향에 따라 전진모드(forward mode)와 후진모드(reverse mode)로 구분된다.[9] 전진모드에서는 독립변수에 대한 중간변수(intermediate variables)의 미분 계산 과정을 거쳐 최종적인 종속변수의 미분치를 계산하며, 후진모드는 중간변수에 대한 종속변수의 변화량 계산을 시작으로 미분 과정을 전개하는 방법이다. 이러한 기본적인 자동미분의 개념을 이용하여 각 프로그램 언어에 적합한 자동미분용 프로그램들이 개발되어 왔으나, 현재 널리 쓰이고 있는 자동 미분은 Fortran 및 C 언어 환경에서의 프로그램이며 본 논문에서는 Fortran 언어용 자동미분 수치해석 프로그램인 ADIFOR를 적용하였다.

ADIFOR(Automatic Differentiation in Fortran)는 Fortran 언어로 작성된 수치해석 프로그램(source code)이 1차 미분의 값을 계산할 수 있도록 자동변환시켜주는 프로그램으로써, Argonne National Lab과 Rice University 의 Parallel Computation Research Center에서 공동으로 개발하였다.[12] ADIFOR 시스템은 다음의 3가지 주요 성분으로 구성되어 있다.

- ADIFOR 선행처리기(Preprocessor)
- 자동미분 내장함수 시스템(ADIntrinsics system)
- 분산 선형결합 라이브러리(SparsLinC library)

선행처리기는 코드정규화, 변수지정, 코드생성의 3가지 메커니즘으로 구성되어 있으며, Fortran 소스코드를 자동으로 미분코드로 바꿔주게 된다. 즉, 소스코드내에 정의된 설계파라미터에 해당하는 입력변수 및 미분함수에 해당하는 출력변수를 지정하면 선행처리기능을 통하여 자동으로 미분계산을 위한 새로운 프로그램을 생성한다. 이후, 자동미분을 위한 내장함수 시스템은 exception handling macro를 포함하고 있고 있으며 이를 이용하여 ADIFOR가 컴파일 및 링크과정을 수행하는데, 링크과정에서 내장함수시스템과 분산선형결합 라이브러리는 최종적으로 미분계산용 실행파일(execution file)을 생성하는데 필요한 라이브러리를 제공한다. 이러한 ADIFOR의 전반적인 실행과정을 Fig. 5에 나타내었다.

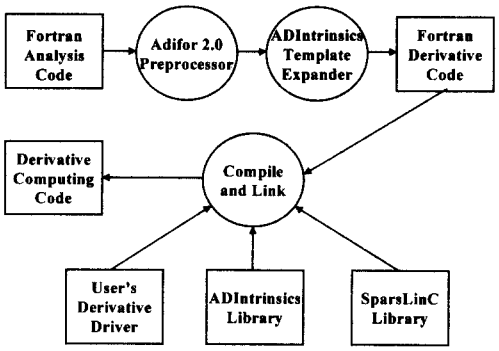

Fig. 5 ADIFOR execution process

3.2 ADIFOR에 의한 CSSO

앞서 살펴본 CSSO는 전역민감도해석, 설계변수의 할당을 위한 영향계수의 계산, 하부시스템 최적화로부터의 최적민감도해석 등에서 1차 미분의 계산을 요구한다. 이러한 계산과정을 자동미분(ADIFOR)에 의해 대치함으로써, 유한차분법에 의한 민감도 오차를 줄이고 신뢰성있는 통합된 최적설계해를 얻기 위해 민감도기반 분리시스템 동시최적화기법을 개선한다. 본 연구에서는 하부시스템최적화과정에 대하여 CONMIN[13]을 사용하였으며, 탐색방향결정(direction finding)과정에서 요구하는 미분계산에 있어서는 자동미분을 사용하지 않았다. ADIFOR를 적용한 CSSO의 순서도는 Fig. 6과 같다.

4. 수치예제

4.1 다분야통합기계요소설계

본 예제에서는 Fig. 7과 같이 감속기(speed reducer)

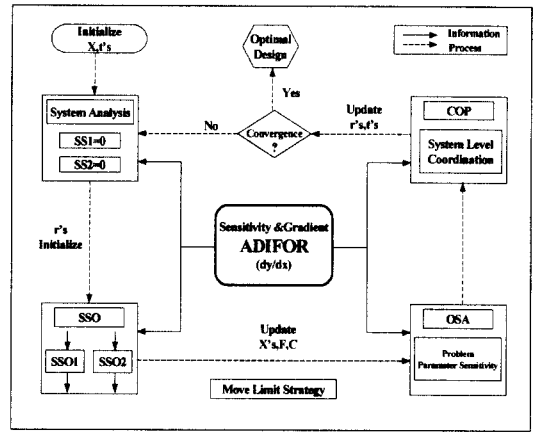

Fig. 6 Use of ADIFOR in CSSO

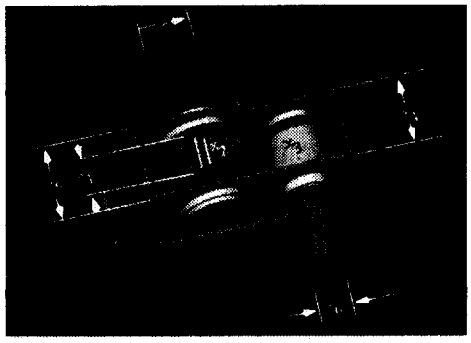

Fig. 7 Speed Reducer model[14]

설계에 있어서 기어 휠과 전달축의 전체 체적을 최소화하는 문제를 고려하였다. CSSO를 적용하기 위해 비수직적 연성관계를 고려한 2개의 하부시스템(기어와 축)으로 분리되었으며, 각 하부시스템간의 연성은 Fig. 1과 같은 관계로 표현된다. 전체 설계시스템은 7개의 설계변수와 11개의 구속조건으로 구성되며 최적화 문제의 수학적 표현은 다음과 같다.[14,15]

Minimize (20)

$$f(x)=0.7854x_1x_2^2(3.333x_3^2+14.9334x_3-43.0932)$$
$$-1.5079(x_6^2+x_7^2)x_1+7.4769(x_6^3+x_7^3)+0.7854(x_4x_6^2+x_5x_7^2)$$

subject to

$$g_1=\frac{[x_1x_2^2x_3]}{27.0}-1.0 \qquad g_6=\frac{[x_2x_3x_6^4]}{[1.925x_4^3]}-1.0$$

$$g_2=\frac{[x_1x_2^2x_3^2]}{397.5}-1.0 \qquad g_7=\frac{[x_1x_3x_7^4]}{[1.925x_5^3]}-1.0$$

$$g_3=\frac{x_1}{[5x_2]}-1.0 \qquad g_8=\frac{[1100.B_1]}{A_1}-1.0$$

$$g_4=\frac{[12.0x_2]}{x_1}-1.0 \qquad g_9=\frac{[850.B_2]}{A_2}-1.0$$

$$g_5=\frac{40.0}{[x_2x_3]}-1.0 \qquad g_{10}=\frac{x_4}{[1.5x_6+1.9]}-1.0$$

$$g_{11}=\frac{x_5}{[1.5x_7+1.9]}-1.0$$

$$A_1=\left[\left(\frac{745.x_4}{x_2x_3}\right)^2+16.91\times10^6\right]^{0.5} \qquad B_1=0.1x_6^3$$

$$A_2=\left[\left(\frac{745.x_5}{x_2x_3}\right)^2+157.5\times10^6\right]^{0.5} \qquad B_2=0.1x_7^3$$

Table 1 Design variables and their bounds

Part name	Bounds
$x_1=b$=face width of the gear teeth	$2.6\le x_1\le4.4$
$x_2=m$=teeth module	$0.6\le x_2\le0.8$
$x_3=Z$=number of pinion teeth	$17.\le x_3\le28.$
$x_4=l_1$=shaft length 1	$6.6\le x_4\le8.3$
$x_5=l_2$=shaft length 2	$7.3\le x_5\le8.3$
$x_6=d_1$=shaft diameter 1	$2.9\le x_6\le3.9$
$x_7=d_2$=shaft diameter 2	$5.0\le x_7\le5.5$

Table 2 Initial designs for speed reducer problem

Case	initial designs						
	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	X(6)	X(7)
I	2.8	0.7	25	7.9	7.6	3.0	5.0
II	4.3	0.6	17	6.9	7.7	3.3	5.5
III	3.0	0.8	20	7.0	7.3	2.9	5.3

또한, 비수직적으로 분리된 2개의 하부시스템에서의 설계변수와 반응함수는 식 (21)과 같다.

$$\{x_g\}^T=\{x_1,x_2,x_3\}$$
$$\{y_g\}^T=\{f,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\} \qquad (21)$$
$$\{x_s\}^T=\{x_4,x_5,x_6,x_7\}$$
$$\{y_s\}^T=\{f,g_6,g_7,g_8,g_9,g_{10},g_{11}\}$$

여기서, 식 (21)의 하첨자 g 및 s는 각각, 기어 및 축을 의미하며 Fig. 7의 각 설계변수의 표현은 Table 1 에 나타내었다.

4.2 결과 분석

MDO문제의 효율성을 검증하기 위해 최적화문제를 하나의 설계시스템으로 고려한 비분리(non-decomposition, all-in-one)방법, 유한차분에 의한 CSSO 및 자동미분에 의한 CSSO를 비교하였다. 설계결과의 다양한 비교를 위해 Table 2와 같이 3가지의 서로 다른 초기설계를 이용하여 최적화를 수행하였다. Fig. 8 및 Table 3에 Case-I에 대한 3가지 최적화방법에 의한 최적화의 수렴과정 및 최종결과를 나타내었다. 결과에서 보여 주듯이, all-in-one방법보다는 설계문제를 분리하여 최적화를 수행하는 CSSO가 10회의 반복과정 동

안 더욱 개선된 설계결과를 생성하였다. 본 논문에서 적용한 감속기문제는 대부분의 구속조건이 posynomial의 형태로 표현되는 비선형함수이다. CSSO가 지닌 비수직적 시스템분리의 개념을 통해 설계문제의 연성정도를 줄일 수 있었으며 그 결과 설계해가 개선되었다. Table 3에서 all-in-one 방법을 통해 최적해를 CSSO의 초기치로 설정하여 재설계를 수행하였을 경우, CSSO의 결과와 일치하는 값을 얻었다. 또한, 유한차분법을 이용한 CSSO보다는 ADIFOR를 이용한 방법이 훨씬 빠른 최적결과를 나타내었으며 설계해의 효율도 향상되었다. 즉, 설계변수에 대해 비선형적인 특성을 갖는 구속함수의 계산에 있어서 유한차분법에 의한 수치누적에 의한 오차를 극복할 수 있었으며, 함수계산 수를 줄임으로써 수렴성을 개선하는 결과를 얻었다.

CSSO과정을 분리시스템간의 연성관계를 표현하는 계수인 r_k^p 및 t_k^p의 변화를 Table 4에 나타내었다. 앞에서 설명한 바와 같이 첫 번째 0-th cycle은 r_k^p의 초기화에 의한 값이고 두 번째부터 최적설계로 수렴하기까지의 결과를 보여준다. 각 하부시스템에서의 CMC인 C(1) 및 C(2)가 0보다 작은 경우에는 구속조건을 위배하지 않으므로 t_k^p의 값이 사용되었고(이 경우, $s^p=0$), CMC의 값이 0보다 커지게 되면 r_k^p(이 경우, $s^p=1$)가 사용되었다.

Fig. 9에는 설계변수의 설정에 대한 영향도를 나타내었는데, 각 설계변수의 값이 주어진 범위로 선정된 상한과 하한 사이에 위치하고 있다. 영향도에 대한 상한 및 하한의 표현은 다음의 식(22)-(24)로부터 얻어진다.

$$\bar{e} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i \tag{22}$$

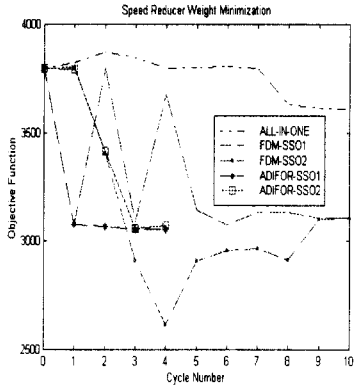

Fig. 8 Convergence history

Table 3 Optimization results for Case-I

Initial		Final		
		all-in-one	CSSO	
			FDM	ADIFOR
OBJ	3798.57	3609.62	3106.57	3053.86
X(1)	2.8	2.6	2.7976	2.7042
X(2)	0.7	0.6	0.60	0.601
X(3)	25.	28.	24.996	24.997
X(4)	7.9	7.5336	7.8993	7.8982
X(5)	7.6	7.9421	7.3	7.5497
X(6)	3.0	2.9	3.0637	3.0076
X(7)	5.0	5.0	5.0834	5.0041

Table 4 Behavior of coefficients and constraints

Cycle	Active Coefficients(ADFOR-CSSO)					
	C(1)	C(2)	R11	R12	T11	T12
0	-2.37	-2.14	0.474	0.526	-	-
1	0.14	0.14	-	-	-1.0	1.0
2	-0.17	-0.15	0.500	0.500	-	-
3	-0.05	-0.03	-	-	-1.0	1.0
4	-0.001	-0.001	-	-	-1.0	1.0

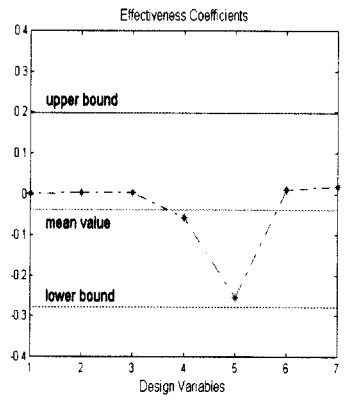

Fig. 9 Effectiveness space for initial designs

$$\sigma(e) = \left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(e_i-\bar{e})^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

$$e^u = \bar{e} + \sigma(e) \quad (24)$$
$$e^l = \bar{e} - \sigma(e)$$

여기서, N은 설계변수의 총 개수이며 $\bar{e}$는 평균 영향도, $\sigma(e)$는 표준편차, e^u 및 e^l은 각각, 영향도의 상한 및 하한을 나타낸다. 주어진 범위내에서 영향도가 유지된다는 것은 설계변수가 CSSO 과정 동안 동일한 하부시스템에 할당되고 있음을 나타낸다. 즉, MDO문제가 기어부분시스템과 축부분시스템으로 잘 분리되어 최적화가 진행되고 있음을 의미한다.

본 설계예제는 실제 비선형의 문제를 1차 민감도만을 이용하는 선형화 최적설계(linearized optimization)이므로 이동제한(move limit)을 고려해야한다. 식 (23),(24)로부터 이동제한에 대한 표현은 다음 식과 같다.

$$\mu\,\% = \frac{(e-e^l)}{2\sigma(e)}(\mu^u-\mu^l) + \mu^l \quad (25)$$

Fig. 10에는 설계변수 X_1, X_2, X_3에 대한 이동제한(move limit, μ)의 분포를 유한차분법을 이용한 CSSO 결과를 나타내었다. 이 결과에서 μ의 상한과 하한을 각각 90%, 10%로 주었는데 만약 하한의 값을 너무 적게 주면 계산량이 증가하여 최적설계에 수렴하기 위해 반복과정이 많아지게 되고, 상한을 너무 높게 주게 되면 선형화에 위배되어 OSA에서 활성구속조건(active constraint)이 비활성(inactive)으로 바뀌게 되는 결과를 초래하게 된다.

Table 5 및 Table 6는 각각 Case-II 및 Case-III에 대한 최적설계의 결과이며 이 경우에 있어서도 ADIFOR에 의한 MDO방법이 기존의 all-in-one 방법과 비교하여 개선된 설계해를 제공함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 다분야통합최적화의 분리기반설계방법론의 하나인 민감도기반 분리시스템동시최적화기법에 있어서 설계민감도의 해석시 발생하는 수치적 오차의 한계를 극복하고 신뢰성 있는 설계결과를 얻기 위해 자동미분의 개념에 의한 수치해석 프로그램인 ADIFOR를 사용하여 설계

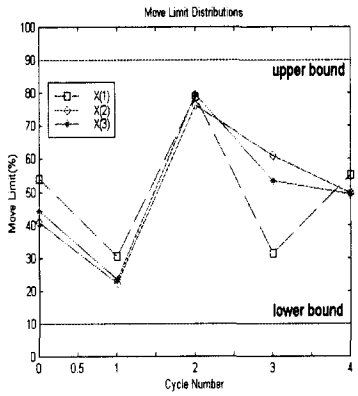

Fig. 10 Move limit distributions for X(1), X(2), X(3)

Table 5 Optimization results for Case-II

Initial		Final		
		all-in-one	CSSO	
			FDM	ADIFOR
OBJ	2915.23	2753.89	2456.39	2384.26
X(1)	4.3	4.34	2.6	2.5
X(2)	0.6	0.6	0.6	0.6
X(3)	17.0	18.0	17.0	16.6
X(4)	6.9	6.6	6.6	6.9
X(5)	7.7	8.3	7.48	7.3
X(6)	3.3	3.1	2.9	3.6
X(7)	5.5	5.0	5.0	5.0

Table 6 Optimization results for Case-III

Initial		Final		
		all-in-one	CSSO	
			FDM	ADIFOR
OBJ	3733.49	3551.22	2663.41	2482.42
X(1)	3.0	3.0	2.6	2.6
X(2)	0.8	0.8	0.7	0.6
X(3)	20.0	20.0	18.0	17.0
X(4)	7.0	6.9	6.7	6.6
X(5)	7.3	7.3	7.4	8.3
X(6)	2.9	2.9	2.9	3.0
X(7)	5.3	5.12	5.0	5.0

해의 효율성을 제고하였다. ADIFOR는 해석용 프로그램(source code)이 제공되는 경우에 있어서 유한차분법에 비해 효율적인 민감도해석을 제공할 수 있으며, 감속기 설계문제의 적용 예를 통해 분리시스템동시최적화방법은 최적화문제를 하나의 설계시스템으로 고려하여 수행하는 경우보다 개선된 설계결과를 생성하였다. 또한, 본 논문에서 적용한 설계문제를 통해 자동미분에 의한 분리시스템동시최적화방법이 전통적으로 사용하는 유한차분법에 의한 방법보다 수렴성 및 설계결과에 대해 모두 개선된 결과를 얻었다. 비선형성이 강한 설계문제 및 설계공간이 불규칙적인 경우와, 다량의 설계변수 및 구속함수를 갖는 대규모의 다분야통합최적설계에 있어서는 1차 미분에 의한 민감도해석이 더욱 정확한 결과를 요구하므로 향후, 자동미분의 중요성이 강조될 것으로 판단된다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술연구센터(Center of Innovative Design Optimization Technology, iDOT)의 연구비 지원과 두뇌한국21(Brain Korea 21)사업의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Sobieski, J., 1993, "Multidisciplinary Design Optimization: An Emerging New Enigneering Discipline," World Congress on Optimal Design of Structural Systems, Rio de Janeiro, Brazil.

(2) Tolson, R. H., Sobieski, J., 1985, "Multidisciplinary Analysis and Synthesis: Needs and Opportunities," AIAA Paper No. 85-0584.

(3) Sobieski, J., 1982,"A Linear Decomposition Method for Large Optimization Problems - Blueprint for Development," NASA TM-83248.

(4) Sobieski, J., 1988, "Optimization by Decomposition: A Step from Hierarchic to Non-Hierarchic Systems," NASA CP-30301.

(5) Bloebaum, C. L., 1991, "Formal and Heuristic System Decomposition Methods in Multidicsplinary Synthesis," Ph.D Dissertation in Aerospace Engineering, the University of Florida, Gainseville, FL.

(6) Hajela, P., Bloebaum, C. L., and Sobieski, J., 1990, "Application of Global Sensitivity Equations in Multidisciplinary Aircraft Synthesis," the AIAA Journal of Aircraft, Vol. 27, No. 12, pp. 1002-1010.

(7) Iri, M., 1988, "Automatic Computation of Partial Derivatives and Rounding Error Estimates with Applications to Large-Scale Systems of Nonlinear Equations," *Journal of Computers and Applied Mathematics*, Vol. 24, pp. 365~392.

(8) Rall, L. B., 1981, "Automatic Differentiation: Techniques and Applications," Lecture Notes in Computer Science No. 120, Springer, New York.

(9) Barthelemy, J.-F. M., Hall, L. E., 1995, "Automatic Differentiation as a Tool in Engineering Design," *Structural Optimization*, Vol. 9, pp. 76~82.

(10) Walsh, J., and Young, K., 1995, "Automatic Differentiation Evaluated as a Tool for Rotorcraft Design and Optimization," proceedings of the American Helicopter Society National Technical Specialists' Meeting on Rotorcraft Structures, Williamsburg, VA.

(11) Bischof, C., Corliss, G., Green, L., Griewank, A., Haigler, K., Newman, P., 1992, "Automatic Differentiation of Advanced CFD Codes for Multidisciplinary Design," *Computing Systems in Engineering*, Vol. 3, No. 6, pp. 625~637.

(12) ADIFOR 2.0, 1998, User's Manual(Revision D), Rice University, Houston, Texas.

(13) Vanderplaats,G. N., 1973, "CONMIN-A FORTRAN Program for Constrained Function Minimization - User's Manual," NASA TM X-62282.

(14) NASA-MDOB Test Suite Problems, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, 1996.

(15) Arslan, M., 1998, "Domain Decomposition in Multidisciplinary Design: Role of Artificial Neural Networks and Intelligent Agents," Ph.D. Dissertation in Mechanical Engineering, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY.