

넓은 수평 환형 공간에서의 혼돈 열 대류 : Pr=0.1

유 주 식[†], 엄 용 균^{*}

안동대학교 기계공학교육과, ^{*}안동대학교 기계공학과

Chaotic Thermal Convection in a Wide-Gap Horizontal Annulus : Pr=0.1

Joo-Sik Yoo[†], Yong-Kyoon Eom^{*}

[†]Department of Mechanical Engineering Education, Andong National University, Andong, 760-749, Korea

^{*}Department of Mechanical Engineering, Andong National University, Andong, 760-749, Korea

(Received September 8, 2000; revision received November 8, 2000)

ABSTRACT: Transition to chaotic convection is investigated for natural convection of a fluid with $Pr=0.1$ in a wide-gap horizontal annulus. The unsteady two-dimensional stream-function-vorticity equation is solved with finite difference method. As the Rayleigh number is increased, the steady 'downward flow' bifurcates to a time-periodic flow with a fundamental frequency, and afterwards a period-doubling bifurcation occurs. As the Rayleigh number is increased further, the chaotic flow regime is reached after a sequence of successive Hopf bifurcation to quasi-periodic and chaotic flow regimes. The route to chaos shows the Ruelle-Takens-Newhouse scenario. The flow of chaotic regime displays complex coalescence and separation of eddies in the side and lower region of the annulus.

Key words: Oscillatory convection(진동 대류), Period-doubling bifurcation(주기 배가 분기), Periodic flow(주기적인 유동), Quasi-periodic flow(준주기적인 유동), Chaos(혼돈)

기 호 설 명

<p>$C(\tau)$: correlation function</p> <p>D_i : 안쪽 실린더의 지름</p> <p>f : 주파수</p> <p>f_1 : 기본 주파수</p> <p>f_2 : 두번째 기본 주파수</p> <p>g : 중력 가속도</p> <p>L : 환형의 폭, $R_o - R_i$</p> <p>P : 진동 주기</p>	<p>$P(f)$: autospectral density function</p> <p>Pr : Prandtl 수, ν/α</p> <p>Ra : Rayleigh 수, $ag(T_i - T_o)L^3/\nu\alpha$</p> <p>$r$: 반경 방향의 좌표</p> <p>r_i : 무차원 안쪽 실린더 반경</p> <p>r_o : 무차원 바깥쪽 실린더 반경</p> <p>t : 시간</p> <p>Δt_S : 데이터의 sampling time step</p> <p>T_i : 안쪽 실린더의 온도</p> <p>T_o : 바깥쪽 실린더의 온도</p> <p>u : 반경 방향의 속도 성분</p> <p>$u(t)$: $(r_c, \pi/2)$에서의 반경 방향의 속도</p> <p>v : 원주 방향의 속도 성분</p>
--	---

[†] Corresponding author

Tel.: +82-54-820-5671; fax: +82-54-841-1624

E-mail address: jsyoo@andong.ac.kr

그리스 문자

- α : 열 팽창 계수
- η : 확장된 반경 방향의 좌표
- θ : 무차원화된 온도
- x : 열 확산 계수
- ν : 동점성 계수
- τ_d : 지연 시간(delay time)
- ρ_0 : 밀도
- ϕ : 원주 방향의 좌표
- Ψ : 유선 함수
- ω : 와도

1. 서 론

가열되고 있는 수평 환형 공간에서 일어나는 자연 대류 현상은, 흥미로운 유동의 형태와 열에너지 저장 시스템, 케이블의 냉각 등의 넓은 응용 분야로 인해 많은 관심을 받아 왔다.^(1,2) 그런데 환형 공간의 자연 대류 문제에 대한 지금까지의 대부분의 연구들은 거의 정상 상태의 열전달 특성에 관심을 두고 수행되었으며 유동장의 천이 현상이나 진동 대류에 대해서는 거의 연구를 수행하지 않았다. 특히 Prandtl 수가 유동 형태에 미치는 영향에 대한 연구는 매우 적다. 최근 Yoo⁽³⁻⁵⁾는 여러 가지의 Prandtl 수에 따른 대류 현상과 분기 현상을 체계적으로 조사하여 환형에서 일어나는 열적 및 수력학적 불안정성은 Prandtl 수와 환형의 형태(D_i/L)에 따라 매우 다양한 형태의 유동과 천이 현상을 일으킨다는 것을 보였다. 한편 유주식 등⁽⁶⁾은 일정 열유속으로 냉각되는 수평 환형 공간에서의 공기(Pr=0.7)의 자연 대류에서 서로 다른 이중해(dual solutions)의 존재를 보였다.

그런데 기존의 연구들⁽¹⁻⁶⁾은 모두 유동장의 공간적 특성에 관심을 두고서 진동 대류의 시간적 특성은 더 이상 조사하지 않았다. 그러나 진동하는 대류는 유동의 시간적 거동에 따라 단순 주기적인 운동, subharmonic frequency를 갖는 주기적인 운동, 2개 혹은 3개의 incommensurable frequency를 갖는 준주기적인 운동 등으로 나눌 수 있으며 최종적으로는 불규칙적인 혼돈 유동

(chaotic flow)으로 발전된다.

이와 같은 시간적인 혼돈(temporal chaos)으로의 천이 경로는 아주 흥미 있는 현상으로서 유체 역학뿐만 아니라 여러 분야의 비선형 시스템에 걸쳐 광범위하게 연구되어 왔다.⁽⁷⁾

Gollub and Benson⁽⁸⁾은 Rayleigh-Bénard 대류에서 네 가지의 서로 다른 경로를 실험적으로 발견하였으며, McLaughlin and Orszag⁽⁹⁾는 수치 실험을 통하여 주기적인 운동, 준주기적인 운동, 혼돈 운동을 보였다.

그리고 Yoo and Kim⁽¹⁰⁾은 공간 주기적인 온도 분포를 갖는 수평 유체층 내의 자연 대류에서 주기 배가 분기 현상(period-doubling bifurcation)이나 준주기적인 상태를 거친 후에 혼돈 운동이 일어난다는 것을 보였다. 한편 Vittori and Blondeaux⁽¹¹⁾는 둥근 실린더 주변의 2차원 유동에서 준주기 상태와 phase locking 경로를 관찰하였다. 그리고 Mukutmoni and Yang⁽¹²⁾은 직육면체 공간 내의 Rayleigh Benard 대류에서 혼돈 상태 사이에 존재하는 주기 4의 창을 발견하였다.

지금까지 수평 환형 공간의 자연 대류에 대해 많은 연구가 수행되었지만 비교적 최근까지 혼돈 대류에까지는 연구가 수행되지 않았는데 최근에 Labonia and Guj⁽¹³⁾와 Yoo⁽¹⁴⁾에 의해 혼돈 대류로의 분기현상이 조사되었다.

Labonia and Guj⁽¹³⁾는 $D_i/L=1.47$ 인 환형 공간에서의 공기의 자연 대류에서 일어나는 혼돈 대류로의 천이 경로를 실험을 통하여 연구하여 Curry-Yorke scenario를 관찰하였다.

그리고 Yoo⁽¹⁴⁾는 $D_i/L=2$ 인 환형 공간에서 Pr=0.1인 유체의 혼돈 열 대류로의 분기 현상을 조사하여 주기 3배(period-tripling) 분기 현상을 보였다.

진동하는 대류에 있어서 혼돈 상태로의 천이 현상을 조사하기 위해서는 매우 긴 시간 동안 아주 정확한 계산을 수행해야 한다. 본 연구에서는 비정상 상태의 방정식을 매 시간마다 빠르고 정확하게 풀 수 있는 수치적인 방법을 사용하여 혼돈 대류로의 천이 경로를 조사한다. 고려하는 환형은 $D_i/L=0.5$ 의 넓은 폭을 갖는 환형이며 Pr=0.1인 중간 Prandtl 수 유체에 대해 진동 대류의 분기 현상을 조사한다.

2. 해 석

고려하는 시스템의 구조와 좌표계는 Fig. 1과 같다. 일정한 표면 온도를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 유체가 있다. Boussinesq 근사 하에서 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화는 무시하며, 그 외의 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다.

유선함수(streamfunction) Ψ 와 와도(vorticity) ω 에 대한 무차원 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega - Pr Ra \left[\sin(\phi) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos(\phi) \frac{\partial \theta}{r \partial \phi} \right] \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (3)$$

여기에서 와도(ω)와 유선함수(Ψ) 및 Jacobian은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial}{r \partial r} (rv) - \frac{\partial}{r \partial \phi} (u), \\ u &= \frac{\partial \Psi}{r \partial \phi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (4) \\ J(f, g) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

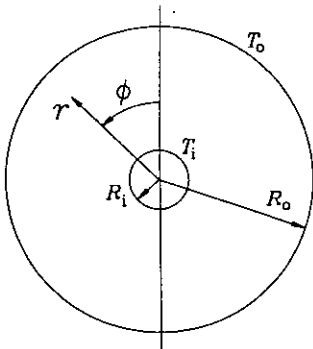


Fig. 1 A sketch of an annulus.

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \\ \theta = 1 \quad \text{at} \quad r = r_i \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \\ \theta = 0 \quad \text{at} \quad r = r_o \end{aligned} \quad (6)$$

각도 방향으로는 다음과 같은 대칭 조건을 적용한다.

$$\Psi = \omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad \text{at} \quad \phi = 0, \pi \quad (7)$$

식(1)~(7)의 방정식은 Yoo⁽⁵⁾에서 사용한 것과 같은 유한차분법을 사용하여 푼다. 식(1)과 (3)을 차분화시키는 데 있어서는 시간 미분 항과 확산 항에 대해 Dufort-Frankel의 leap-frog 방법⁽¹⁵⁾을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분을 사용한다. 그리고 차분화된 Poisson 방정식은 Buzbee et al.⁽¹⁶⁾의 순환적인 짝홀 제거 방법을 사용하여 반복 계산을 하지 않고 바로 푼다. 이 방법은 매우 빠르고 정확하다. 공간 주기적인 자연 대류에서도 Yoo and Kim⁽¹⁰⁾은 이와 같은 방법을 사용하여 chaos로의 천이 경로를 잘 규명한 바가 있다. 각 방향으로는 균일 격자를 이용하고 반경 방향으로는 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$\begin{aligned} r = r_i + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)} \right] \\ \text{with } C = 1.5, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

본 연구에서 사용한 $(r \times \phi)$ 격자계는 (45×65) 이며 time step은 $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ 이다.

진동하는 대류를 관찰하기 위하여 계산 기간 동안에 다음과 같이 환형의 중심에서의 반경 방향의 속도를 기록한다.

$$u(t) = u(r_c, \pi/2, t) \quad (9)$$

여기에서 $r_c = (r_i + r_o)/2$ 이다.

그리고 $u(t)$ 의 Power spectrum을 분석하여 대

류의 시간적인 거동 특성과 분기 현상(bifurcation phenomena)을 조사한다. Power spectrum은 다음과 같이 정의된다.⁽⁷⁾

$$u(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \exp(i2\pi ft) u(t) dt \quad (10)$$

$$P(f) = |u(f)|^2 \quad (11)$$

Power spectrum을 구하는 데 있어서는 Cooley-Tukey의 FFT algorithm⁽¹⁷⁾을 이용하며, 데이터의 유한한 시간 간격 $T = (\text{Number of data}) \times \Delta t_s$ 에서 일어나는 side lobe를 제거하기 위해 Hanning window를 씌운다. 이때의 주파수 해상도(frequency resolution)는 $1/T$ 이 되는데 aliasing error를 없애기 위해 FFT를 하기 전에 저주파 대역 필터(low pass filter)를 거침으로써 주파수(frequency)의 범위를 제한한다. anti-aliasing filter cut off frequency는 Nyquist frequency $f_N = 1/2\Delta t_s$ 의 70%로 택하였다. 하나의 Rayleigh 수에 대해 5×10^4 time step을 계산한다. 분기 현상을 조사하는 데에는 여러 가지의 Rayleigh 수에 대해 총 2×10^6 time step 정도의 계산이 소요되었다. 데이터의 sampling time step을 $\Delta t_s = 2 \times 10^{-4}$ 으로 하여 데이터를 축적한 다음 축적된 데이터의 후반부에 있는 2^{13} 개의 연속된 데이터로써 Power spectrum을 구하였다.

3. 결과 및 논의

작은 Rayleigh 수에서는 Fig. 2(a)와 같이 콩팥

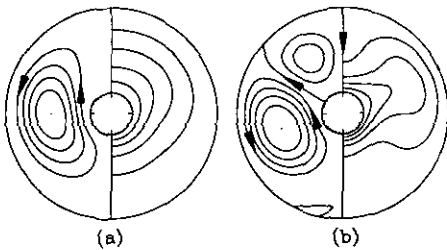


Fig. 2 Steady-state streamlines and isotherms of 'upward' and 'downward' flows: (a) $Ra=10^3$ ('upward flow'); (b) $Ra=10^4$ ('downward flow').

모양(kidney-shaped)의 셀(cell)을 갖는 정상 상태의 대류가 유지된다. 이 경우 유체는 따뜻한 안쪽 실린더 벽면을 따라 위로 올라가서 차가운 바깥쪽 실린더를 타고 흘러내린다. 그러나 큰 Rayleigh 수에서는 환형의 위 부분에 반대 방향으로 회전하는 하나의 셀이 형성됨에 따라 환형의 꼭대기 부근의 유체가 아래로 내려오는 '내려가는 유동(downward flow)'이 확립된다. Fig. 2 (b)에는 $Ra=10^4$ 에서의 '내려가는' 유동을 도시하였다. $Ra=10^5$ 까지는 이와 같은 형태의 정상 상태의 유동이 유지된다. 그러나 $Ra=2 \times 10^5$ 에서는 진동하는 대류가 일어난다.

진동 대류가 일어난 후에 혼돈 대류로 천이하는 경로를 보여주는 $u(t)$ 의 시간 기록과 Power spectrum을 Fig. 3에 도시하였다. 관측된 현상은 다음과 같다.

(1) $2 \times 10^5 \leq Ra \leq 6 \times 10^5$: 하나의 기본 주파수(fundamental frequency) f_1 을 갖는 단순 주기적인 운동이 일어난다(Fig. 3(a)). 가장 큰 peak는 f_1 에 있으며 다른 주파수들은 모두 f_1 의 정수배($f = mf_1$; $m=1, 2, 3, \dots$)로 표시된다. 주기적인 영역에서의 기본 주파수는, $Ra=2 \times 10^5, 3 \times 10^5, 4 \times 10^5, 5 \times 10^5, 6 \times 10^5$ 에서 각각 $f_1 \approx 33.57, 40.59, 46.69, 51.57, 56.15$ 이다. 즉, Rayleigh 수가 증가함에 따라 진동은 점점 빨라진다.

Fig. 4에는 $Ra=4 \times 10^5$ 에서의 한 주기 동안의 순간적인 유동장을 도시하였다. 진동하는 기간 동안에 $\psi=0$ 에 의해 분리되는 서로 반대 방향으로 회전하는 셀이 환형의 측면과 위 부분에 형성된다. 환형의 위 부분을 차지하고 있는 셀의 크기는 측면과 아래 부분을 차지하고 있는 것이 비해 작다. 그러나 소용돌이의 강도는 훨씬 크다. 그리고 진동하는 유동장은 큰 셀 내부에서 일어나는 같은 방향으로 회전하는 소용돌이들의 주기적인 분리와 합체 형상을 보여준다.

(2) $7 \times 10^5 \leq Ra \leq 8.3 \times 10^5$: 주기 배가 분기 현상(period-doubling bifurcation)이 $6 \times 10^5 < Ra < 7 \times 10^5$ 에서 일어나며 $7 \times 10^5 \leq Ra \leq 8.3 \times 10^5$ 에서는 $2/f_1$ 의 주기를 갖는 주기 2의 진동 대류가 일어난다. Power spectrum에서 나타나는 peak들의 주파수는 모두 $f_1/2$ 의 super harmonics에 있다

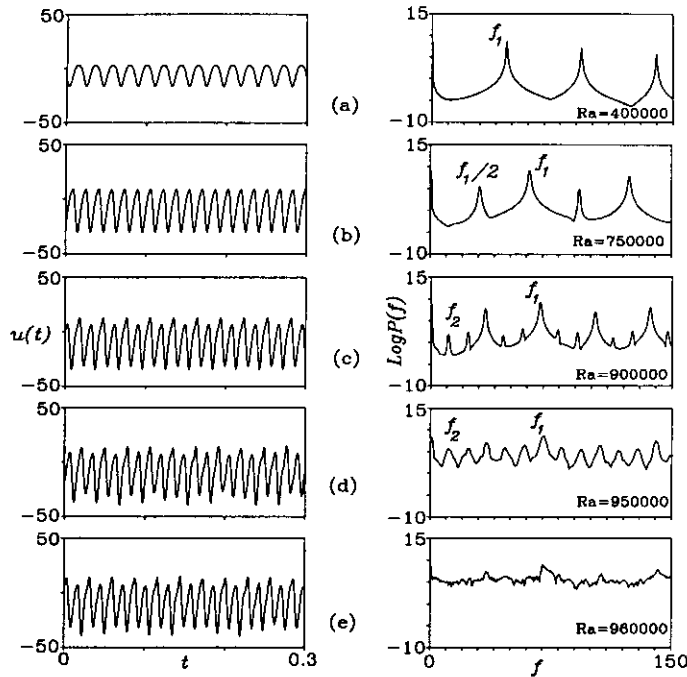


Fig. 3 Records of $u(t)$ and power spectra showing the bifurcation sequence to chaos: (a) $Ra=4 \times 10^5$; (b) $Ra=7.5 \times 10^5$; (c) $Ra=9 \times 10^5$; (d) $Ra=9.5 \times 10^5$; (e) $Ra=9.6 \times 10^5$.

(Fig. 3(b)). Fig. 5(b)에는 $Ra=8 \times 10^5$ 에서의 phase space를 도시하였다. 단순주기적인 운동인 경우 Fig. 5(a)와 같이 하나의 닫힌 궤도(closed orbit)를 보여준다. 이와는 달리 Fig. 5(b)는 두 개의 닫힌 궤도를 보여줌으로써 주기 2의 해를 잘 나타내고 있다.

(3) $8.4 \times 10^5 \leq Ra \leq 9.5 \times 10^5$: 두번째 Hopf bifurcation이 $8.3 \times 10^5 < Ra < 8.4 \times 10^5$ 에서 일어남으로 인해 $8.4 \times 10^5 \leq Ra \leq 9.5 \times 10^5$ 에서는 두 개의 incommensurable 주파수 f_1, f_2 를 갖는 준주기적인(quasi-periodic) 운동이 일어난다. Fig. 3(c)에는 $Ra=9 \times 10^5$ 에서의 $u(t)$ 와 power spectrum을 도시하였다. 준주기적인 운동이 일어나는 초기에는 두번째 주파수(f_2)의 강도는 f_1 에 비해 매우 약하다. 그러나 Rayleigh 수가 증가할수록 f_2 의 강도도 증가하며 $Ra=9.5 \times 10^5$ 에서는 충분히 발달된 준주기적인 운동을 나타내고 있다(Fig. 3(d)).

준주기적인 영역에서는 두 개의 기본 주파수 f_1, f_2 를 가지며 다른 peak의 주파수들은 모두 f_1 과 $f_1/2$, 및 f_2 의 선형 조합으로 표현된다.

Fig. 3(c)에서 $f_1=68.36, f_2=10.99$ 이며 다른 peak의 주파수들은 $f_1/2 - f_2, f_1/2, f_1/2 + f_2, f_1 - f_2, f_1 + f_2 \dots$ 등이다. Fig. 3(d)에서는 $f_1=70.80, f_2=10.99$ 이며 다른 peak의 주파수들은 $2f_2, f_1/2, f_1/2 + f_2, f_1 - f_2, f_1 + f_2 \dots$ 등이다.

Fig. 5(c)에는 준주기적인 영역에 있는 $Ra=9.5 \times 10^5$ 에서의 $u(t)$ 의 phase space를 도시하였다. Fig. 5(c)는 하나의 T^2 torus를 나타냄으로써 두 개의 기본 주파수를 갖는 준주기적인 운동을 잘 보여주고 있다.

(4) $Ra \geq 9.6 \times 10^5$: $u(t)$ 의 요동은 매우 복잡하며(Fig. 3(e)) power spectrum이 광대역 잡음(broadband noise)을 보이는 비주기적인 혼돈 대류가 일어난다. Fig. 6에는 혼돈 영역에 있는 $Ra=2 \times 10^6$ 에서의 $u(t)$ 와 Autocorrelation function $C(\tau)$, phase space, 및 Poincare map을 도시하였다. $u(t)$ 의 요동은 매우 불규칙적이며 phase space는 복잡한 궤도를 보인다. 그리고 $C(\tau)$ 가 zero 근방의 값으로 접근함에 따라 강한 혼돈 상

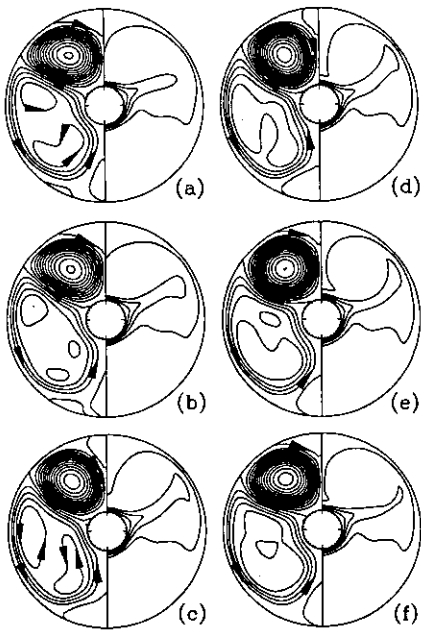


Fig. 4 Instantaneous streamlines and isotherms over one period of oscillation at $Ra=4 \times 10^5$: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value; (b) at $t=t_1+P/8$; (c) at $t=t_1+3P/8$; (d) at $t=t_1+4P/8$; (e) at $t=t_1+6P/8$; (f) at $t=t_1+7P/8$.

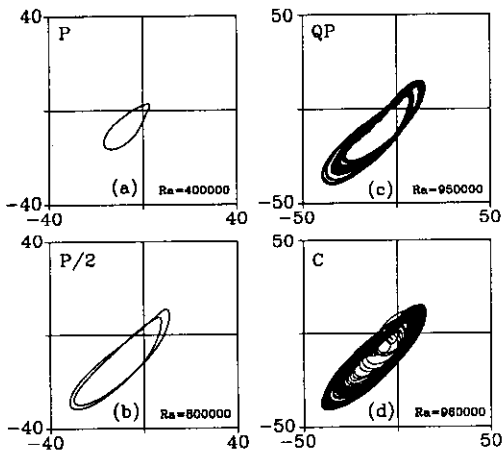


Fig. 5 Phase-space trajectories of $u(t)$ versus $u(t+\tau_d)$ with $\tau_d=0.0002$: (a) $Ra=4 \times 10^5$ (P); (b) $Ra=8 \times 10^5$ (P2); (c) $Ra=9.5 \times 10^5$ (QP); (d) $Ra=9.6 \times 10^5$ (C).

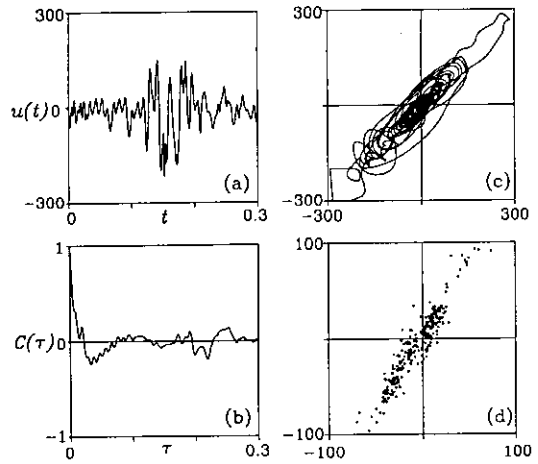


Fig. 6 Several signals showing a chaotic behavior at $Ra=2 \times 10^6$: (a) fluctuation of $u(t)$; (b) correlation function $C(\tau)$; (c) phase-space trajectory of $u(t)$ versus $u(t+\tau_d)$ with $\tau_d=0.0002$; (d) Poincare section of $u(t)$.

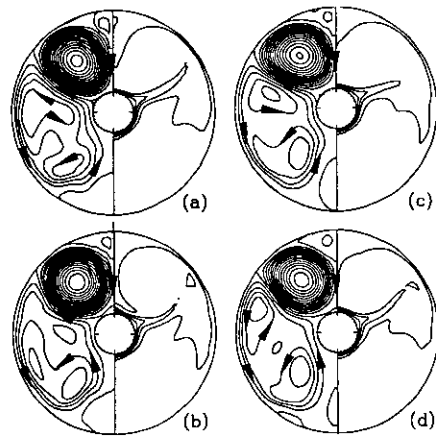


Fig. 7 Instantaneous streamlines and isotherms at $Ra=2 \times 10^6$ in the chaotic regime: (a) at an arbitrary time $t=t_1$; (b) at $t=t_1+\Delta t$; (c) at $t=t_1+2\Delta t$; (d) at $t=t_1+3\Delta t$ with $\Delta t=0.0125$.

태를 보여주고 있다. 또한 Poincare map에서는 여러 개의 점들이 흩어져서 나타남으로써 충분히 발달된 혼돈 상태를 잘 보여주고 있다.

끝으로 Fig. 7에는 혼돈 영역에 있는 $Ra=2 \times$

10⁶에서의 몇몇 순간적인 유동장을 도시하였다. 비록 $u(t)$ 의 진동 상태는 복잡하지만 환형의 위 부분에 있는 셀의 형상은 크게 변화하지 않는다. 이와는 달리 환형의 측면과 아래 부분을 차지하고 있는 큰 셀 내부에서 복잡한 소용돌이의 분리와 합체 과정을 보여주고 있다. 이와는 달리 상대적으로 좁은 환형⁽¹⁴⁾($D_i/L=2$)의 경우에는 두 개의 큰 셀들의 경계면에서 복잡한 유동장의 변화를 보여주었다.

이상에서 관찰한 분기 현상을 요약하면 다음과 같다: steady \rightarrow simple periodic (f_1) \rightarrow periodic with period 2 ($f_1, f_1/2$) \rightarrow quasi-periodic (f_1, f_2) \rightarrow chaos.

본 연구에서 나타나는 하나의 흥미 있는 현상은, 주기적인 운동으로부터 준주기적인 운동으로의 분기가 일어나기에 앞서서 주기 배가 분기 현상이 선행된다는 것이다. 그리고 다음에는 두 개의 incommensurable 주파수를 갖는 준주기적인 운동 상태를 경유한 후에 혼돈 대류가 일어난다. 따라서 본 시스템에서의 혼돈 대류로의 천이는 Ruelle-Takens-Newhouse scenario를 보여준다.

한편 상대적으로 좁은 환형⁽¹⁴⁾($D_i/L=2$)에서는 주기 3배 분기(period-tripling bifurcation) 현상과 주기 4의 창이 발견되었다. 그러나 $D_i/L=0.5$ 의 넓은 환형 공간에서는 첫번째 Hopf bifurcation 후에 주기 배가 분기(period-doubling bifurcation) 현상이 가장 먼저 일어나며 혼돈 영역 사이에 존재하는 주기적인 운동 영역은 발견되지 않았다.

4. 결 론

두 개의 수평 동심 실린더 사이의 넓은 환형 공간($D_i/L=0.5$)에서 일어나는 $Pr=0.1$ 인 유체의 혼돈 대류로의 천이 현상을 수치적으로 조사하였다. 유한 차분법을 이용하여 비정상 유선함수-와도 방정식을 풀었다. Rayleigh 수가 증가함에 따라 정상 상태의 '내려가는 유동'으로부터 주기적으로 진동하는 대류로의 Hopf bifurcation이 일어난다. 다음에는 주기 배가 분기 현상이 일어나며, 곧 이어서 두 번의 Hopf bifurcation을 거쳐서 불규칙한 혼돈 대류에 도달한다. 즉, 혼돈 대류로의

천이 경로는 Ruelle-Takens-Newhouse scenario를 보여준다. 진동하는 대류의 유동장은, 환형의 위 부분에 매우 강한 소용돌이가 일어나며 측면과 아래 부분에는 상대적으로 약한 셀이 형성된다. 그리고 혼돈 영역에서의 대류는 환형의 측면과 아래 부분을 차지하고 있는 큰 셀 내부에서 복잡한 소용돌이의 분리와 합체 과정을 보여준다. 이와는 달리 환형의 위 부분은 상대적으로 큰 변화를 보이지 않는다.

참고문헌

1. Kuehn, T. H. and Goldstein, R. J., 1976, An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders, *J. Fluid Mech.* Vol. 74, pp. 695-719.
2. Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L. and Sammakia, B., 1988, Buoyancy-induced flows and transport, Springer-Verlag, pp. 761-771.
3. Yoo, J.-S., 1998, Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 3055-3073.
4. Yoo, J.-S., 1999, Transition and Multiplicity of Flows in Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus: $Pr=0.4$, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 709-722.
5. Yoo, J.-S., 1999, Prandtl Number Effect on Bifurcation and Dual Solutions in Natural Convection in a Horizontal Annulus, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3275-3286.
6. Yoo, J.-S., Eon, Y.-K. and Kim, Y.-J., 2000, Natural Convection of Air in a Horizontal Annulus with the Inner Cylinder Cooled by Constant Heat Flux, *Korean Journal of Air-Conditioning and Refrigeration Engineering*, Vol. 12, No. 8, pp. 755-762.
7. Schuster, H. G., 1984, *Deterministic Chaos*, Physik-Verlag, pp. 1-136.
8. Gollub, J. P. and Benson, S. V., 1980, Many Routes to Turbulent Convection, *J. Fluid Mech.* Vol. 100, pp. 449-470.