韓國海岸·海洋工學會誌
第 13 券 第 2 號, pp. 149~157, 2001年 6月

급변수심에의 적용을 위한 약 비선형 파동방정식의 확장

Extension of Weakly Nonlinear Wave Equations for Rapidly Varying Topography

윤성범* · 최준우** · 이종인***

Sung Bum Yoon*, Jun Woo Choi**, and Jong In Lee***

要 旨 : Nadaoka *et al.*에 의해 유도된 약 비선형 완경사 파동방정식을 급경사 지형에 적용할 수 있도록 바닥경사 곡률항과 바닥경사 제곱항을 포함하는 확장형 파동방정식을 유도하였다. 유도된 확장형 파동방정식의 선형식에 대해 일차원 유한차분 수치모형을 구성하고, 다양한 경사를 가지는 평면 경사지형에 의한 파의 반사에 대해 유도된 식과 수치모형을 검사하였다. 본 연구의 수치해와 기존의 여러 수치모형의 결과를 비교하여 본 결과, 급변수심에 대한 바닥경사 곡률항과 바닥경사 제곱항을 완전히 포함하여 원래의 Nadaoka *et al.* 식보다 정도가 상당히 개선되었다.

핵심용어 : 비선형 완경사 방정식, 급변수심, 확장형 파동방정식, 반사파

Abstract □ From the weakly nonlinear mild-slope wave equations introduced by Nadaoka *et al.*(1994, 1997), a set of weakly nonlinear wave equations for rapidly varying topography are derived by including the bottom curvature and slope-squared terms ignored in the original equations of Nadaoka *et al.* To solve the linear version of extended wave equations derived in this study one-dimensional finite difference numerical model is constructed. The performance of the model is tested for the case of wave reflection from a plane slope with various inclination. The numerical results are compared with the results calculated using other numerical models reported earlier. The comparison shows that the accuracy of the numerical model is improved significantly in comparison with that of the original equations of Nadaoka *et al.* by including a complete set of bottom curvature and slope-squared terms for a rapidly varying topography.

Keywords : nonlinear mild-slope wave equations, rapidly varying topography, extended wave equations, wave reflection

1. 서 론

선형분산을 가정한 Berkhoff(1972)의 완경사방정식은 단일주기파(monochromatic wave)에 대해 심해로부터 천해까지 수심에 제한 없이 파랑의 변형을 해석할 수 있으나, 식의 유도과정 중 바닥이 완경사($|\nabla h/kh| \ll 1$)라는 가정을 도입함으로써, 바닥곡률항($\nabla^2 h$)과 바닥경사의 제곱항($|\nabla h|^2$)으로 대표되는 고차수심효과를 무시하였다. 최근에 급변수심에서 보다 정확한 해를 얻기 위해 이들 급변수심항을 포함하는 확장형 완경사방정식이 유도되었다. Massel(1993)은 Galerkin-eigenfunction 기법을 이용하여 급변수심영역에 적용할 수 있는 확장형 방정식을 유도하였으며, Chamberlain and Porter(1995), Chandrasekera and Cheung(1997)도 완경사방정식을 급변수심해역에 적용할 수 있도록 확장하였다. Suh *et al.*(1997) 및 Lee *et al.*(1998)은 확장형 쌍곡선형 완경사방정식을 유도하고 이를 바닥형상이 정현파형상으로 변하는 영역에 적용하여 Bragg 반사현상을 해석하였으며, 수치해석결과를 Davies

*한양대학교 토목·환경공학과(Department of Civil and Environmental Engineering, Hanyang University, Ansan, Kyunggi 425-791, Korea)

**미국 델라웨어대학교 토목공학과(Department of Civil Engineering, University of Delaware, Newark, Delaware 19716, USA)

***한국건설기술연구원 수자원(환경연구부(Water Resources & Environmental Research Division, Korea Institute of Construction Technology, Ilsan-ku, Goyang, Kyunggi 411-712, Korea)

and Heathershaw(1984)의 수리실험결과와 비교하여 바닥경사의 제곱항과 바닥곡률항의 중요성을 입증하였다.

Nadaoka *et al.*(1994, 1997)은 심해로부터 천해까지 넓은 주파수 폭(broad-banded spectrum)을 가지는 비선형 불규칙 파랑의 전파를 해석할 수 있는 새로운 형태의 다성분 파동방정식을 제안하였다. 이 방정식은 아직 2차원 수치모형의 적용성 검토가 미흡하기는 하지만, Smith and Sprinks(1975)의 시간의존형 완경사방정식이 가지는 입사파 주파수 스펙트럼 폭의 적용한계 및 천해역에서의 비선형효과를 고려할 수 없는 단점과 Boussinesq 방정식의 깊은 수심에 대한 적용한계를 극복할 수 있다는 가능성을 가지고 있다. Nadaoka *et al.*(1994)이 유도한 약비선형 분산파 방정식은 완경사가정을 도입하여 바닥곡률항($\nabla^2 h$)과 바닥경사의 제곱항($|\nabla h|^2$)을 무시하였다. 그러나 Nadaoka *et al.*의 약비선형 분산파 방정식 내에는 이미 급변수심항의 역할을 하는 항들이 일부 포함되어 있기 때문에 완경사가정을 도입하여 다른 일부의 급변수심항만을 무시하는 것은 일관성이 결여되어 있다. 국내에서는 이(1998)와 윤 등(1999)이 Nadaoka *et al.*의 다성분 파동방정식에 급변수심항을 추가한 확장형 다성분 파동방정식을 유도한 바 있으나, 급변수심항의 형태가 매우 복잡하고, 그 검증이 아직 이루어지지 않았다.

본 연구에서는 완전한 확장형 다성분 파동방정식을 얻기 위한 기초 단계로 우선 단일성분 파동방정식에 고차수심항을 포함시킨 확장형 단일성분 파동방정식을 유도·제시한다. 또한 본 연구에서 유도된 확장형 단일성분 파동방정식의 선형식을 이용하여 입사파가 2가지의 일정한 수심을 이어주는 경사지를 통과하는 경우에 대해 수치모의하고 완경사방정식, 확장형 완경사방정식, 그리고 기존 Nadaoka *et al.*의 파동방정식의 결과 및 Suh *et al.*(1997)의 연직2차원 유한요소해와 비교한다.

2. 완경사 약비선형 파동방정식

원점이 정수면(still water level)상에 위치하고 상향을 z축의 양의 방향으로 하는 3차원 오른손 Cartesian 좌표계(x, y, z)에서 비압축성, 비점성 유체의 지배방정식은 다음과 같다.

연속방정식 :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

운동방정식 :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + w\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)w + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{2b}$$

비회전조건 :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = \nabla w, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

여기서 $\boldsymbol{u}$: 수평방향 유속벡터, $\boldsymbol{u} = (u, v)$

w : 연직방향 유속성분

∇ : 수평방향 미분연산자, $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$

p : 압력

ρ : 유체의 밀도

g : 중력가속도

자유수면 경계조건과 바닥경계조건은 다음과 같다.

$$p = 0, \qquad \text{at} \quad z = \zeta(\boldsymbol{x}, t) \tag{4}$$

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \zeta, \quad \text{at} \quad z = \zeta(\boldsymbol{x}, t) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla h + w = 0, \quad \text{at} \quad z = -h(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

여기서 $\zeta(\boldsymbol{x}, t)$: 자유수면변위, $\boldsymbol{x} = (x, y)$

$h(\boldsymbol{x})$: 정수면으로 부터 잰 국부수심

연속방정식 (1)을 수심적분하고 Leibnitz법칙을 적용한 다음, 자유수면 경계조건식 (5)와 바닥경계조건식 (6)을 이용하여 정리하면 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{-h}^{\zeta} \boldsymbol{u}\, dz\right) = 0 \tag{7}$$

식 (7)에서 $\boldsymbol{u}$에 대해 Taylor급수 전개한 후 가장 낮은 차수만을 취하면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{-h}^{0} \boldsymbol{u}\, dz + \zeta \boldsymbol{u}_0\right) = 0 \tag{8}$$

여기서 $\boldsymbol{u}_0$는 정수면($z = 0$)에서의 수평방향 유속벡터이다. 그리고 수심적분형태의 운동방정식 을 얻기 위해 비회전조건식 (3)을 운동방정식 (2a)와 (2b)에 대입한 후 정리하고, 연직방향 운동방정식으로부터 압력 p를 얻은 다음 수평방 향 운동방정식에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla\left[g\zeta + \int_z^0 \frac{\partial w}{\partial t} dz + \zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0 + w_0^2)\right] = 0 \tag{9}$$

임의수심에서의 수평유속 $\boldsymbol{u}$를 연직분포함수 $F(z, kh)$와 정수면상에서의 수평유속 $\boldsymbol{u}_0(x, t)$를 곱하여 표시한다.

$$\boldsymbol{u}(x,z,t) = F(z,kh)\boldsymbol{u}_0(x,t)$$
$$F(z,kh) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \tag{10}$$

선형 분산관계식 $\omega^2=gk\tanh kh$를 이용하면 F의 수심적분은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{-h}^{0} F dz = \int_{-h}^{0} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz = \frac{\tanh kh}{k} = C_p^2/g \tag{11}$$

따라서 연속방정식은 식 (10)과 식 (11)을 이용하여 식 (8)로부터 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_p^2}{g} + \zeta \right) \boldsymbol{u}_0 \right] = 0 \tag{12}$$

식 (12)는 비선형성에 있어 $O(\varepsilon^2)$의 정확도를 가진다.

연직속도성분은 식 (10)을 식 (1)에 대입하고 바닥($z = -h$)에서 임의수심 z까지 적분하여 얻는다.

$$w(x,z,t) = -\nabla \cdot \left[\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \boldsymbol{u}_0(x,t) \right] \tag{13}$$

그리고 운동방정식을 유도하기 위해 먼저 식 (9)의 적분항에 Leibnitz법칙과 식 (13)으로 표현되는 연직속도성분을 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_z^0 \frac{\partial w}{\partial t} dz = -\frac{\partial}{\partial t} \int_z^0 \nabla \cdot \left[\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \boldsymbol{u}_0 \right] dz$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\left(\frac{1-F}{k^2} \right) (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) \right] + \left[\nabla \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \cdot \boldsymbol{u}_0 \right] \right\} \tag{14}$$

식 (14)에 ∇(gradient)를 취하면 식 (15)와 같다.

$$\nabla \left[\int_z^0 \frac{\partial w}{\partial t} dz \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \left[\left(\frac{1-F}{k^2} \right) (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) \right] \right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \left[\nabla \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \cdot \boldsymbol{u}_0 \right] \right\} \tag{15}$$

식 (15)의 우변의 첫째항을 정리하면,

$$\nabla \left[\left(\frac{1-F}{k^2} \right) (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) \right] = \nabla \left(\frac{1-F}{k^2} \right) (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) + \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) \tag{16}$$

이다.

또한 식 (15)의 두번째 항을 정리하면,

$$\nabla \left[\nabla \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \boldsymbol{u}_0 \right] = \nabla \left(\frac{1-F}{k^2} \right) (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) + \nabla^2 \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \boldsymbol{u}_0$$
$$+ \boldsymbol{u}_0 \times \left\{ \nabla \times \left[\nabla \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \right] \right\} + \nabla \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \times (\nabla \times \boldsymbol{u}_0) \tag{17}$$

이다. 식 (17)의 우변 셋째항은 벡터항등식(vector identity)에 의해서 0이고, 넷째항은 지배방정식이 비회전흐름 조건하에서 유도되므로 0이다. 그리고 둘째항은 Nadaoka *et al.*(1994)에 의해 해저경사가 완만하다는 가정하에서 무시되었던 2차 공간미분항이다. 여기서 Nadaoka *et al.*은 이 항을 무시함으로써 완경사방정식이라 하였다. 이 절에서는 이 2차 공간미분항을 무시한 식 (17)과 식 (16)을 이용하여 식 (15)를 다음과 같이 정리하였다.

$$\nabla \left[\int_z^0 \frac{\partial w}{\partial t} dz \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1-F}{k^2} \right) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) + 2 \nabla \left(\frac{1-F}{k^2} \right) (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) \right]$$
$$= -\left[\left(\frac{1-F}{k^2} \right) \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} \right) \right] + 2 \nabla \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \left(\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} \right) \tag{18}$$

식 (9)에 식 (10), 식 (13) 및 식 (18)을 대입하고 연직분포함수 $F(z, kh)$을 곱한 후 수심에 대해 적분하여 다음과 같은 완경사 단일성분 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$As \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} + Bs \nabla \left[g\zeta + \zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0 + w_0^2) \right]$$
$$= Cs \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} \right) + \boldsymbol{Ds} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} \right) \tag{19}$$

여기서,

$$As = g \int_{-h}^{0} F^2 dz = g \left(\frac{h}{2\cosh^2 kh} + \frac{\tanh kh}{2k} \right) = C_p C_g \tag{20a}$$

$$Bs = g \int_{-h}^{0} F dz = g \left(\frac{\tanh kh}{k} \right) = C_p^2 \tag{20b}$$

$$Cs = g \int_{-h}^{0} \frac{F(1-F)}{k^2} dz$$
$$= \frac{g}{k^2} \left(\frac{\tanh kh}{2k} - \frac{h}{2\cosh^2 kh} \right) = \frac{C_p (C_p - C_g)}{k^2} \tag{20c}$$

$$\boldsymbol{Ds} = g \int_{-h}^{0} 2F \nabla \left[\frac{(1-F)}{k^2} \right] dz$$
$$= g \frac{\nabla k}{k^3} \left\{ 3 \left(\frac{\tanh kh}{2k} - \frac{h}{2\cosh^2 kh} \right) - h \tanh^2 kh \right\}$$
$$= \nabla \left[\frac{C_p (C_p - C_g)}{k^2} \right] = \nabla Cs \tag{20d}$$

이 완경사 단일성분 운동방정식은 Nadaoka *et al.*이

유도한 다성분 파동방정식에서 단일성분만을 추출하여 얻을 수 있다.

3. 급변수심을 고려한 약비선형 파동방정식

본 연구에서는 Nadaoka *et al.*(1994)의 연구를 확장하여 운동방정식 유도에서 완경사가정에 의하여 무시된 바닥곡률항($\nabla^2 h$)과 바닥경사의 제곱항($|\nabla h|^2$)을 포함하는 방정식을 유도한다. Nadaoka *et al.*이 유도한 약비선형 분산파 방정식은 2절의 식 (15)의 둘째 항을 정리하면서 완경사가정 ($|\nabla h|/kh \ll 1$)을 도입하여 바닥곡률항($\nabla^2 h$)과 바닥경사의 제곱항($|\nabla h|^2$)을 무시하였다. 그러나 Nadaoka *et al.*의 약비선형 분산파 방정식 내에 이미 급변수심항의 역할을 하는 항들이 일부 포함되어 있기 때문에 완경사가정을 도입하여 다른 일부의 급변수심항만을 무시하는 것은 문제가 있는 것으로 판단된다. 무시되었던 항을 추가하여 급변수심항, 바닥곡률항과 바닥경사의 제곱항을 완전히 포함시켜 주어 제 역할을 할 수 있게 함으로써 급변수심에 대한 파동방정식을 유도한다.

2절의 식 (15)의 두번째 항은 식 (17)로 제시된 바와 같다.

$$\nabla\left[\nabla\left(\frac{1-F}{k^2}\right)\cdot\boldsymbol{u}_0\right]=\nabla\left(\frac{1-F}{k^2}\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)+\nabla^2\left(\frac{1-F}{k^2}\right)\boldsymbol{u}_0 \quad (21)$$

2절에 기술된 것처럼 식 (17)의 우변 셋째항과, 넷째항은 0이므로 생략하였다. 우변의 둘째 항이 Nadaoka *et al.*에 의해 해저경사가 완만하다는 가정에 의해 무시되었던 2차 공간미분항이다. 이 절에서는 이 항을 무시하지 않고 전개한다.

식 (16)과 식 (21)을 이용하여 식 (15)를 다음과 같이 정리하였다.

$$\begin{aligned}\nabla\left[\int_z^0\frac{\partial w}{\partial t}dz\right]&=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{1-F}{k^2}\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)\right.\\&\left.+2\nabla\left(\frac{1-F}{k^2}\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)+\nabla^2\left(\frac{1-F}{k^2}\right)\boldsymbol{u}_0\right]\\&=-\left(\frac{1-F}{k^2}\right)\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}\right)+2\nabla\left(\frac{1-F}{k^2}\right)\left(\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}\right)\\&+\nabla^2\left(\frac{1-F}{k^2}\right)\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}\Big]\end{aligned} \quad (22)$$

운동방정식은 2절에서와 같은 방법으로 식 (9)에 식 (10), 식 (13) 및 식 (22)를 대입하고 연직분포함수를 곱한 후 수심에 대해 적분하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\int_{-h}^0 F\left\{F\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}+\nabla\left[g\zeta+\zeta\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{u}_0+w_0^2)\right]\right\}dz\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^0 F\left\{\frac{(1-F)}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)+2\nabla\left[\frac{(1-F)}{k^2}\right](\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)\right.\\&\left.+\nabla^2\left(\frac{1-F}{k^2}\right)\boldsymbol{u}_0\right\}dz\end{aligned} \quad (23)$$

다시 식 (23)을 정리하면,

$$\begin{aligned}&\int_{-h}^0 F^2dz\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}+\int_{-h}^0 Fdz\nabla\left[g\zeta+\zeta\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{u}_0+w_0^2)\right]\\&=\int_{-h}^0\frac{F(1-F)}{k^2}dz\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}\right)+\int_{-h}^0 2F\nabla\left[\frac{1-F}{k^2}\right]dz\left(\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}\right)\\&+\int_{-h}^0 F\nabla^2\left(\frac{1-F}{k^2}\right)dz\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}\end{aligned} \quad (24)$$

여기서 w_0는 수표면유속의 연직방향성분으로 식 (13)에서 $z=0$을 대입하여 얻는다. 식 (24)의 적분을 수행하면 파동방정식의 운동방정식 (25)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&As\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}+Bs\nabla\left[g\zeta+\zeta\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{u}_0+w_0^2)\right]\\&=Cs\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}\right)+\boldsymbol{Ds}\left(\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}\right)+Es\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial t}\end{aligned} \quad (25)$$

여기서 A_s, B_s, C_s 및 $\boldsymbol{D}_s$는 각각 식 (20a), (20b), (20c) 및 (20d)와 같고, E_s는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}Es&=g\int_{-h}^0 F\left[\nabla^2\left(\frac{1-F}{k^2}\right)\right]dz\\&=g\left[\frac{2}{k^3}\nabla^2 k\int_{-h}^0 F(F-1)dz-\frac{6}{k^4}(\nabla k)^2\int_{-h}^0 F(F-1)dz\right.\\&\left.+\frac{4}{k^3}\int_{-h}^0 F(\nabla F\cdot\nabla k)dz-\frac{1}{k^2}\int_{-h}^0 F\nabla^2 Fdz\right]\\&=\frac{g\nabla^2 k}{8k^4\cosh^2 kh}(6kh-3\sinh(2kh)-4kh\sinh^2 kh)\\&+\frac{g(\nabla k)^2}{24k^5\cosh^2 kh}\{60kh\sinh^2 kh-6(kh)^2\sinh(2kh)\\&-42kh+21\sinh(2kh)-4(kh)^3\}\end{aligned} \quad (26)$$

본 연구에서는 급변수심항을 $\nabla^2 h$와 $(\nabla k)^2$으로 나타내었다. 그러나 Chandrasekera and Cheung(1997)에서와 같이 바닥곡률항($\nabla^2 h$)과 바닥경사의 제곱항($|\nabla h|^2$)으로 나타낼 수 있다. 이를 위해 ∇F와 $\nabla^2 F$를 Chain

Rule을 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial h}\nabla h + \frac{\partial F}{\partial k}\nabla k \tag{27}$$

$$\nabla^2 F = \frac{\partial F}{\partial h}\nabla^2 h + \frac{\partial F}{\partial k}\nabla^2 k + \frac{\partial^2 F}{\partial h^2}(\nabla h)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial h \partial k}(\nabla h \cdot \nabla k) + \frac{\partial^2 F}{\partial k^2}(\nabla k)^2 \tag{28}$$

여기서,

$$\nabla k = \frac{\partial k}{\partial h}\nabla h \tag{29}$$

$$\nabla^2 k = \frac{\partial k}{\partial h}\nabla^2 h + \frac{\partial^2 k}{\partial h^2}(\nabla h)^2 \tag{30}$$

또한 $\partial k/\partial h$ 와 $\partial^2 k/\partial h^2$ 은 선형 분산관계식 $\omega^2 = gk\tanh kh$ 을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial k}{\partial h} = \frac{-2k^2}{2kh + \sinh(2kh)} \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial h^2} = \frac{8k^3[2kh + 2\sinh(2kh) + \sinh(2kh)\sinh^2(kh)]}{[2kh + \sinh(2kh)]^3} \tag{32}$$

따라서 식 (29)와 (30)을 이용하면 식 (26)을 쉽게 수심의 항으로 표현할 수 있다.

연속방정식 (12)와 운동방정식 (25)로 구성되는 단일성분 파동방정식은 규칙파 또는 입사파의 주파수 스펙트럼 폭이 좁은 경우에 파랑의 전파변형을 해석할 수 있는 약비선형 파동방정식이다. 그리고 운동방정식 (25)의 유도과정 중 수심변화에 대한 2차 공간미분항 즉, 바닥곡률항($\nabla^2 h$)과 바닥경사의 제곱항($|\nabla h|^2$)을 무시하지 않고 유도하였으므로 확장형 완경사 방정식이라 할 수 있다.

4. 기존 단일성분 완경사 파동방정식의 고차수심효과

천해인 경우 식 (12)와 식 (25)에서 Airy의 장파방정식을 얻을 수 있다. 즉, $C_p \approx C_g \approx \sqrt{gh}$ 이고, 급변수심항과 연직속도성분이 포함된 비선형항을 제거하면 식 (33)과 식 (34)로 이루어지는 장파방정식이 된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h+\zeta)\boldsymbol{u}_0] = 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} + \nabla\left[g\zeta + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0)\right] = 0 \tag{34}$$

식 (33)과 식 (34)에서 보는 바와 같이 천해일 경우 수평유속은 연직방향으로 변화가 없고, 정수면상 에서의 유속 $\boldsymbol{u}_0$는 Airy의 방정식을 유도하는데 사용된 수심평균유속과 동일함을 알 수 있다.

Nadaoka *et al.*(1994)은 해저경사가 완만하다는 가정에 의해 식 (17)에서 우변 둘째항의 2차 공간미분항을 무시하고, 식 (18)을 얻었으며, 2절에서 기술한 것처럼 식 (9)에 식 (10), 식 (13) 및 완경사가정을 도입하여 유도한 식 (18)을 대입하고, 연직분포함수 $F(z, kh)$를 곱한 후 수심에 대해 적분하여 운동방정식 (19)를 얻을 수 있었다. 그러나 식 (19)는 급변수심효과를 일부 가지고 있다. 이를 보이기 위해 식 (19)의 우변 첫번째 항을 완경사($|\nabla h|/kh \ll 1$)가정을 도입하여 자유수면변위의 정의와 비선형항을 무시한 천수에서의 장파방정식 (34)를 이용하여 전개해 보자.

자유수면변위의 정의는 식 (35)와 같고 자유수면변위를 공간미분하면 식 (36)을 얻으며, 또한 Laplacian을 취하면 식 (37)과 같이 쓸 수 있다.

$$\zeta = A\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) - \omega t] \tag{35}$$

$$\nabla\zeta = i\boldsymbol{k}\zeta \tag{36}$$

$$\nabla^2\zeta = \{i(\nabla\cdot\boldsymbol{k}) - |\boldsymbol{k}|^2\}\zeta \tag{37}$$

천수에서의 운동방정식 (34)에서 비선형항을 무시하면,

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} + g\nabla\zeta = 0 \tag{38}$$

이다. 식 (38)에 식 (36)을 대입하여 전개하면 정수면($z=0$)에서의 수평방향 유속벡터의 시간미분항을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} = -g\nabla\zeta = -ig\boldsymbol{k} \tag{39}$$

이 수평방향 유속벡터의 시간미분항을 공간에 대한 $\nabla\cdot$ (divergence)를 취하면,

$$\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} = -g\nabla^2\zeta \tag{40}$$

이고, 식 (37)을 이용하여 전개하면,

$$\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t} = -g\{i\zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{k}) - |\boldsymbol{k}|^2\zeta\} \tag{41}$$

이다.

식 (19)의 우변 첫째항을 계수 C_s를 제외하고 전개하면 다음과 같다.

$$\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t}\right)=-g[(\nabla\cdot\boldsymbol{k})\nabla(i\zeta)+(i\zeta)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{k})-\nabla|\boldsymbol{k}|^2\zeta] \tag{42}$$

또한

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{k})=\nabla^2\boldsymbol{k}+\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{k} \tag{43}$$

이며 파수벡터의 비회전성에 의해 $\nabla\cdot\boldsymbol{k}=0$ 이므로 $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{k})=\nabla^2\boldsymbol{k}$ 이다. 이를 이용하면 식 (42)는 다음과 같다.

$$\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t}\right)=-g[i(\nabla\cdot\boldsymbol{k})\nabla\zeta+i\zeta\nabla^2\boldsymbol{k}-\nabla(|\boldsymbol{k}|^2\zeta)] \tag{44}$$

식 (44)를 운동방정식 (19)에 대입하여 정리하면 해저경사가 완만하다는 가정에 의해 유도된 Nadaoka *et al.*(1994)의 운동방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$As\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t}+Bs\nabla\left[g\zeta+\zeta\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{u}_0+w_0^2)\right]$$
$$=-igCs\nabla^2\boldsymbol{k}\zeta-gCs\left[i(\nabla\cdot\boldsymbol{k})\nabla\zeta-\nabla(|\boldsymbol{k}|^2\zeta)+Ds\left(\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t}\right)\right] \tag{45}$$

여기서

$$\nabla^2k=\frac{\partial k}{\partial h}\nabla^2h+\frac{\partial^2k}{\partial h^2}(\nabla h)^2 \tag{46}$$

이므로 완경사($|\nabla h|/kh\ll 1$)가정을 도입하여 급변수심항 즉 바닥곡률항(∇^2h)과 바닥경사의 제곱항($|\nabla h|^2$)을 무시하고 유도되었다는 Nadaoka *et al.*(1994)의 약비선형 분산파 방정식 내에는 여전히 급변수심항의 역할을 하는 항들이 일부 포함되어 있음을 알 수 있다. 따라서 이 방정식은 완경사방정식으로서 일관성이 결여 되어 있다. Nadaoka *et al.*의 약비선형 분산파 방정식을 완경사를 갖는 조건에 적용할 경우, $|\nabla h|/kh=O(\varepsilon)\ll 1$ 이기 때문에 $O(\varepsilon^2)$가 되는 바닥곡률항(∇^2h)과 바닥경사의 제곱항($|h|^2$)의 영향이 무시될 수 있다. 그러나 완경사가정을 도입할 수 없는 급경사를 포함한 조건에 적용할 경우 바닥곡률항(∇^2h)과 바닥경사의 제곱항($|h|^2$)의 항들은 해에 무시할 수 없는 영향을 주게 된다. 따라서 Nadaoka *et al.*의 방정식을 급변수심이 있는 조건에 적용할 경우 방정식내의 완전하지 못한 일부의 급변수심항은 해에 적절하지 못한 영향을 줄 것으로 판단된다.

5. 유한차분수치모형

본 연구에서는 앞에서 유도한 확장형 비선형 단일성분 파동방정식에서 새로 추가된 급변수심항의 역할을 분석하는 것을 목적으로 하므로 비선형항을 무시한 1차원 선형 파동방정식만을 고려한다. 식 (12)와 식 (25)의 비선형항을 무시하고 각 항을 Fig. 1과 같은 교호격자상에서 유한차분화하고 정리하면 각각 다음과 같다.

$$\zeta_i^{k+1}=\zeta_i^k-\frac{\Delta t}{g\Delta x}\left\{\frac{Bs_{i+1}+Bs_i}{2}u_i^k-\frac{Bs_i+Bs_{i-1}}{2}u_{i-1}^k\right\} \tag{47}$$

$$\left[-\frac{Cs_i+Cs_{i+1}}{2\Delta x^2}+\frac{Cs_{i+1}-Cs_i}{2\Delta x^2}\right]u_{i-1}^{k+1}$$
$$+\left[-\frac{As_i+As_{i+1}}{2}+\frac{Cs_i+Cs_{i+1}}{2\Delta x^2}-E_{si}\right]u_i^{k+1}$$
$$+\left[-\frac{Cs_i+Cs_{i+1}}{2\Delta x^2}-\frac{Cs_{i+1}-Cs_i}{2\Delta x^2}\right]u_{i+1}^{k+1}$$
$$=\frac{As_i+As_{i+1}}{2}u_i^k-g\frac{Bs_i+Bs_{i+1}}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\zeta_{i+1}^k-\zeta_i^k)$$
$$-\frac{Cs_i+Cs_{i+1}}{2\Delta x^2}(u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k)$$
$$-\frac{Cs_{i+1}-Cs_i}{2\Delta x^2}(u_{k+1}^k-u_{i-1}^k)-Es_iu_i^k \tag{48}$$

식 (47)은 양해법으로, 식 (48)은 음해법으로 차분식이 구성된다. 이는 운동방정식 (25)의 우변 분산항에 시간미분항이 존재하기 때문이며, 유한차분식은 3중 대각행렬로 구성되므로 Thomas 알고리즘으로 해를 얻을 수 있다. 경계조건으로는 Lee and Suh(1998)의 에너지 전달관점에 의한 영역내 조파기법과 Larsen and Dancy (1983)의 흡수층 기법을 사용하여 영역경계에 의한 파의 반사를 최소화 하였다.

6. 평면경사를 통과하는 파의 반사

본 연구에서 수립한 수치모형의 적용성을 검토하기 위해 서로 다른 일정수심의 영역이 평면경사로 연결되어 있는 지형을 진행하는 파의 반사율을 수치해석하고 이를 같은 경우의 완경사방정식(mild slope eqution), 확장형 완경사방정식(extended mild slope eqution), 그리고 기존 Nadaoka *et al.*의 파동방정식의 결과와 비교하였고, 또한 연직2차원 유한요소해(Suh *et al.*, 1997)와

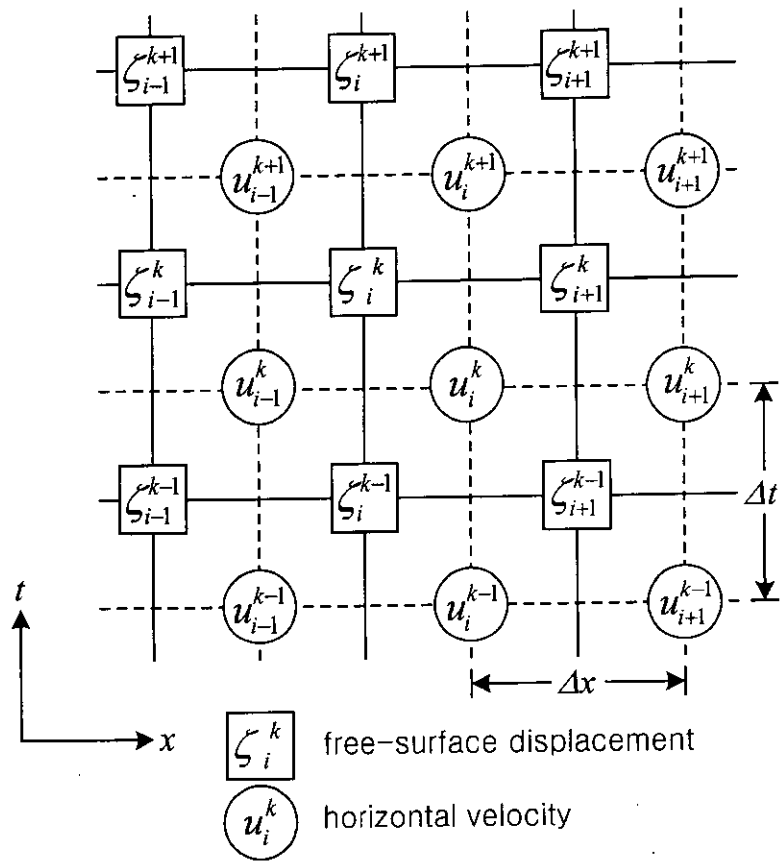

Fig. 1. Staggered finite difference mesh for 1-dimensional numerical model.

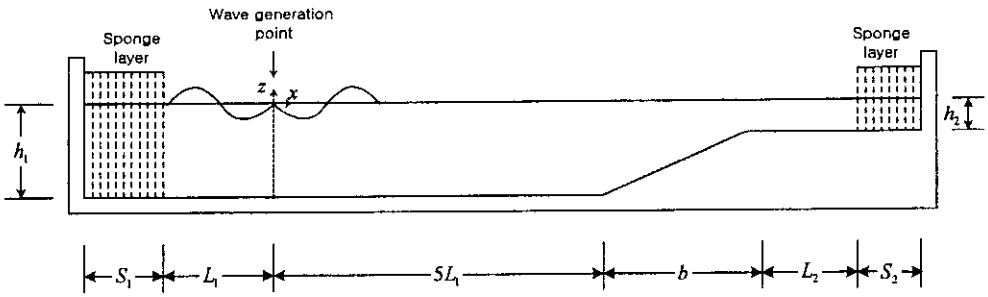

Fig. 2. Computational domain for wave reflection over a plane slope.

비교하였다. Fig. 2에서처럼 파는 수심 h_1=0.6 m로부터 일정 경사를 지나 수심 h_2=0.2 m로 진행하게 되며, 경사는 경사폭의 변화로 다양하게 변경하였다. 주기는로 정하고, 는 충분한 공간분해능을 확보하기 위해 격자에 대한 파장비와 $L_1/\Delta x$와 $L_2/\Delta x$를 각각 약 80과 20으로 하였다. 최초 파를 발생시킨 후 30주기가 지난 다음 반사율을 계산하였다.

Fig. 3에서는 단면경사폭에 대한 반사율을 본 연구의 수치모형의 완경사방정식, 확장형 완경사방정식, 그리고 기존 Nadaoka *et al.*의 파동방정식의 반사율 과 비교하

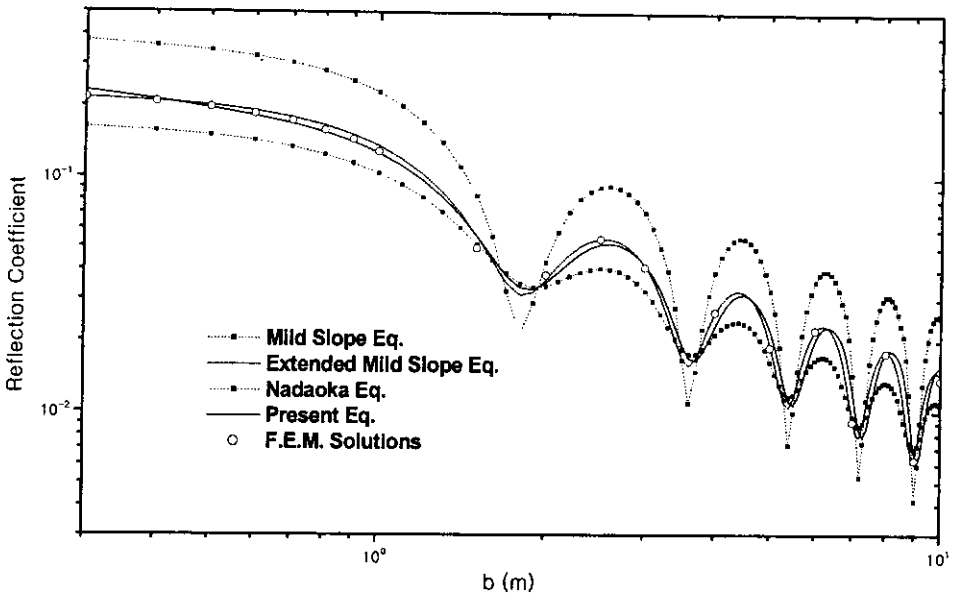

Fig. 3. Reflection coefficient calculated using various wave models.

였고, 또한 연직 2차원 유한요소해와 비교하였다. 본 연구에서는 완경사방정식의 수치계산을 위해 Copeland (1985) 수치모형을 사용했으며, 확장형 완경사방정식의 수치계산을 위해서는 Chandrasekera and Cheung(1997)에서 유도한 급변수심항을 Copeland 모형에 대입하여 사용하였다. 우선 기존 Berkhoff(1972)의 완경사방정식을 수정한 Copeland(1985)의 시간의존형 완경사 방정식은 고차수심항을 무시하여 반사율이 엄밀해에 가까운 연직 2차원 유한요소모형의 결과보다 과소평가되고 있다. 반면 확장형 완경사방정식은 유한요소해와 거의 비슷한 반사율을 준다. Nadaoka *et al.*(1994)의 완경사 파동방정식은 고차수심항이 일부만 포함되어 거의 전구간에 걸쳐 반사파를 과대평가하고 있다. 본 연구에서 유도된 확장형 단일성분 파동방정식은 유한요소모형 및 확장형 완경사방정식 등과 비슷한 수준의 정도 높은 결과를 주고 있어, 본 연구에서 개발된 파동방정식과 수치모형이 기존의 Nadaoka 파동방정식이 가지고 있는 급변수심에 대한 과대평가를 상당히 개선시켜 줌을 확인하였다.

7. 결 론

파이론의 궁극적인 목적은 심해로부터 천해까지 여러 주기성분이 복합된 불규칙파를 파의 비선형성과 분산성을 정도높게 고려하면서 일괄해석할 수 있으면서도 경제적인 계산이 가능한 파동방정식을 유도하는 데 있다고 할 수 있다. 이러한 목적을 어느 정도 만족시키는 파동방정식으로 Nadaoka *et al.*(1994)의 다성분 파동방정식과 Madsen *et al.*(1991, 1992)의 확장형 Boussinesq 방정식을 들 수 있다.

본 연구에서는 Nadaoka *et al.*(1994)에 의해 유도된 다성분 파동방정식에 고차수심효과를 고려하는 확장형 다성분 파동방정식을 유도하기 위한 기초연구로, 우선 단일성분 방정식에 급변수심효과를 포함시킨 확장형 파동방정식을 유도하였으며, Nadaoka *et al.*(1994)의 단일성분 방정식에 포함된 일부 급변수심항에 대해 논하였다. 또한 본 연구에서 유도된 선형 확장형 단일성분 파동방정식을 이용하여 두 가지 서로 다른 일정수심을 연결하는 경사면 지형에 의한 파의 반사를 수치계산 하였다. 경사면의 경사에 따른 반사율을 기존 및 확장형 완경사방정식, 연직 2차원 FEM 모형, 완경사 Nadaoka 파동방정식 등의 수치해와 비교한 결과, 기존 완경사방정식은 고차수심효과가 무시되어 거의 모든 경사에 대해 작은 반사율을 주며, 완경사 Nadaoka 파동방정식은 불완전한 고차수심효과로 전반적으로 큰 반사율을 준다. 반면 본 연구의 확장형 단일성분 파동방정식은 엄밀해에 가까운 연직 2차원 FEM 모형 및 확장형 완경사방정식과 전반적으로 거의 일치하는 결과를 얻을 수 있어, 기존 Nadaoka 방정식의 급변수심에 대한 확장이

옳게 수행되었음이 확인되었다.

감사의 글

이 논문은 2000년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구 되었으며, 이에 사의를 표합니다.

참고문헌

이종인, 1998. 임의수심 해역을 전파하는 약비선형 분산파의 거동, 한양 대학교 대학원, 박사학위논문.

윤성범, 이종인, 이정규, 1999. 다성분 파동방정식의 확장과 분산특성, 대한 토목학회논문집, **19**(II-5): 615-625.

Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. of the 13th Coastal Engineering Conference*, pp. 471-490.

Chamberlain, P.G. and Porter, D., 1995. The modified mild slope equation, *J. of Fluid Mechanics*, **291**, pp. 393-407.

Chandrasekera, C.N. and Cheung, K.F., 1997. Extended linear refraction-diffraction model, *J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, **123**(5), pp. 280-286.

Copeland, G.J.M., 1985. A practical alternative to the mild-slope wave equation, *Coastal Engineering*, **9**, pp. 125-149.

Davies, A.G. and Heathershaw, A.D., 1984. Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography, *J. of Fluid Mechanics*, **144**, pp. 419-443.

Larsen, J. and Dancy, H., 1983. Open boundaries in short wave simulations - A new approach, *Coastal Engineering*, **7**, pp. 285-297.

Lee, C., Park, W.S., Cho, Y.S. and Suh, K.D., 1998. Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography, *Coastal Engineering*, **34**, pp. 243-257.

Lee, C. and Suh, K.D., 1998. Internal generation of waves for time-dependent mild slope equations, *Coastal Engineering*, **34**, pp. 285-297.

Madsen, P.A., Murray, R. and Sorensen, O.R., 1991. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Engineering*, **15**, pp. 371-388.

Madsen, P.A. and Sorensen, O.R., 1992. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics: Part 2. A slowly-varying bathymetry, *Coastal Engineering*, **18**, pp. 183-204.

Massel, S.R., 1993. Extended refraction- diffraction equation for surface waves, *Coastal Engineering*, **19**, pp. 97-126.

Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y., 1994. A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions, *Proc. of the 24th Inter. Conf. on Coastal Engineering*, ASCE, pp. 427-441.

Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y., 1997. A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **453**, pp. 303-318.

Smith, R. and Sprinks, T., 1975. Scattering of surface waves by a conical island, *J. of Fluid Mechanics*, **72**, pp. 373-384.

Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S., 1997. Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography, *Coastal Engineering*, **32**, pp. 91-117.