

# 유한요소-전달행렬의 혼합법을 이용한 3차원 구조물의 진동해석

이 동 명\*

## Vibration Analysis of 3-Dimensional Structure by using Mixed Method of Finite Element-Transfer Matrix

Dong-Myung Lee\*

### Abstract

In this study, for reduction degree of freedom of dynamic model, a mixed method to combined finite element method and transfer matrix method is presented. This offers the advantages of an automatic reduction in the size of the eigenvalues problem and of a straightforward means of dynamic substructuring. The analytical procedure in this method for dynamic analysis of 3-dimensional cantilevered box beam are described. The result of numerical example is shown to demonstrate the efficiency and accuracy of this method. The result from this example agree well those obtained by ANSYS. By using this technique, the number of nodes required in the regular finite element method is reduced and therefore a smaller computer can be used.

**Key Words :** Finite Element-Transfer Matrix(유한요소-전달행렬), State Vector(상태벡터), Overall Transfer Matrix(전체 전달행렬), Mode Shape(모드형상)

### 1. 서 론

일반적으로 구조해석에서 유한요소법은 임의의 기하학적 형상을 갖는 계의 해석에 용이하고 해석용도가 다양하여 광범위하게 사용되고있는 강력한 도구이다. 하지만, 유한요소법은 구조물이 복잡할 경우 많은 절점수로 대규모 행렬을 필요로 하고, 계 전체의 자유도에 비례하는 선형 연립방정식의 해법으로 귀착되어 해석시 많은 계산용량으

로 대용량 컴퓨터가 필요하며 계산시간도 많이 소요된다. 특히, 구조물의 동적인 해석에서는 자유도에 따라 계산용량이나 시간이 가중되기 때문에 자유도 저감을 위해 Guyan의 정축소나 모드합성법과 같은 동강성 축소법이 이용되거나 또는 유한조각법<sup>(1)</sup>, 전달행렬법<sup>(2)</sup> 및 유한요소와 전달행렬의 결합법이 응용<sup>(3-6)</sup>되기도 한다. 전달행렬법은 행렬의 규모가 계의 부구조의 수에 의존되는 것이 아니고 계의 거동을 나타내는 미분 운동방정식 차수에 의존

\* 경민대학(ldong@kyungmin.ac.kr)

되며, 상태벡터의 수만큼의 차수를 갖는 전달행렬의 곱셈만으로 이루어지기 때문에 방정식의 크기가 작고, 빠른 계산시간과 작은 계산용량으로 소형 컴퓨터에서도 계산이 가능하다.<sup>17)</sup> 하지만, 전달행렬법은 자유도를 줄이는데 이점은 있지만, 특정조건의 단순 구조물에만 성공적으로 응용될 수 있고 복잡한 구조물에는 문제의 공식을 유도하는데 어려움이 있으며, 구조물이 복잡할 경우 모델링에 따른 부정확성으로 고차 모드계산에서 정확도가 떨어진다. 유한요소와 전달행렬의 결합법으로 해석이 가능한 구조물에 대해 유한요소법보다 효율적임을 입증하였지만, 기존의 연구들은 대부분 단일 평판요소로 2차원 평면진동 중 면내진동이나 면외진동에 대한 각각의 관심되는 mode만을 해석하였다. 그리고 기존 연구들은 2차원 문제에 국한되어 3차원 공간상에서의 각 방향의 자유도를 고려하지 못했고 m개의 조각으로 나눈 구조물이 3차원일 경우 기존의 결합방법을 적용할 수 없으며, 보간법에 의한 고유치 결정으로 고차 모드를 결정하는데 어려움이 있다.

본 연구에서는 산업기계류의 진동특성을 규명하기 위한 기초 연구로 기존의 연구들에서 구조물이 3차원일 경우 구조물의 방향이 변하는 부분에서 발생하는 각 방향의 자유도의 연성관계를 고려치 못했던 연성과 각 방향의 자유도를 모두 고려하였고, 계산량과 시간을 현저하게 줄일 수 있는 자유도 저감법으로 유한요소-전달행렬의 혼합법을 이용하였다. 이때 각 요소의 강성과 질량행렬을 유한요소 해석의 변위법과 같은 방법으로 결정하였고, 진동특성 해석은 전달행렬법을 이용하여 계산량과 계산을 줄였다. 또한 3차원 구조물의 계산량을 줄이기 위한 방법으로 구조물을 부구조로 나누고 연쇄형태(chain-like)로 결합하였으며, 고차 모드결정에서 부정확성을 줄이기 위해 Newton-Raphson법을 이용하였다. 본 연구의 해석 및 고유치 계산 프로그램의 타당성을 확인하기 위해 상용프로그램인 ANSYS와 비교 검토하였다.

## 2. 혼합법에 의한 구조물 모델링

유한요소-전달행렬의 혼합법에 의한 구조물을 모델링하기 위해 Fig. 1에 나타낸바와 같이 전달행렬기법으로 구조물을 m개의 부구조로 나누고, 다시 유한요소기법으로 각 부구조를 임의 개수의 유한요소로 세분한다. 세분된 유한요소로부터 강성과 질량행렬을 구성하고, 구성된 행렬은 m개의 부구조에 대한 전달행렬로 재구성되고 자유도도 줄이게 된다.

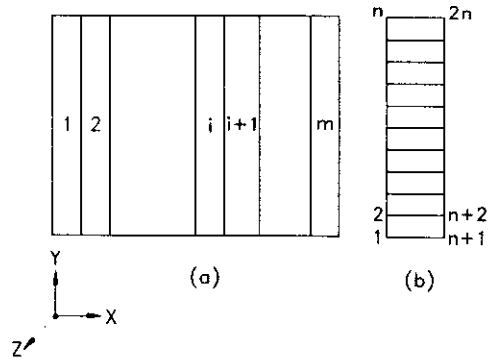


Fig. 1 Subdivision of plate into substructure and finite elements

Fig. 1의 (a)에서 1~m은 전달행렬법에서 각 부구조마다 상태량(변위, 힘, 모멘트)을 나타내는 상태벡터의 번호를 의미하고, (b)에서 1~2n은 각 부구조마다 유한요소로 나눈 요소의 절점번호를 의미한다. 만약 구조물의 고유진동수가  $\omega$  라면, 부구조 i에서 절점에 대한 평형방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.<sup>18)</sup>

$$\begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix}_i = \{ [K]_i - \omega^2 [M]_i \} \begin{Bmatrix} \delta_L \\ \delta_R \end{Bmatrix}_i \quad (1)$$

여기서  $\{ \delta \}_i$ 와  $\{ F \}_i$ 는 부구조 i에서 각 절점에 대한 변위벡터와 힘벡터이고,  $[K]_i$ 와  $[M]_i$ 는 임의 유한요소로 나눈 부구조 i의 최종 축소된 강성행렬과 질량행렬이며, 아래 첨자 L과 R은 부구조 i의 왼쪽과 오른쪽을 의미한다.

혼합법에서 진동해석에 이용될 전달행렬은 각 부구조의 유한요소로부터 구해지는 동강성행렬이 요구된다. 동강성행렬을  $[S]=[K]-\omega^2[M]$ 라고 정의하면, 식(1)은 다음과 같이 다시 나타낼 수 있고

$$\begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix}_i = [S]_i \begin{Bmatrix} \delta_L \\ \delta_R \end{Bmatrix}_i \quad (2)$$

또한 식(3)의 행렬  $[S]_i$ 는 4개의 정방행렬로 나누어 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta_L \\ \delta_R \end{Bmatrix}_i \quad (3)$$

약간의 대수처리로 식(3)을 재배열함으로써 부구조  $i$ 를 전달행렬법의 형태로 좌·우 상태벡터의 관계식으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta_R \\ -F_R \end{Bmatrix}_i &= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{Bmatrix}_i \\ &= [T]_i \begin{Bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{Bmatrix}_i \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } [T]_{11} &= -[S_{12}]_i^{-1}[S_{11}]_i \\ [T]_{12} &= [S_{12}]_i^{-1} \\ [T]_{21} &= -[S_{21}]_i \\ &\quad + [S_{22}]_i[S_{12}]_i^{-1}[S_{11}]_i \\ [T]_{22} &= -[S_{22}]_i[S_{12}]_i^{-1} \end{aligned}$$

한편, 인접한 요소간의 변위적합조건과 힘의 평형조건은

$$\begin{aligned} \{\delta_R\}_i &= \{\delta_L\}_{i+1} \\ \{F_R\}_i &= \{F_L\}_{i+1} = \{F_{ext}\}_i \end{aligned} \quad (5)$$

와 같고,  $\{F_{ext}\}_i$ 는  $i$ 번째 부구조의 절점에 작용하는 외력벡터로서 고유진동수 해석에서는 null 벡터이므로 식(4)와 식(5)로부터 인접요소간의 상태벡터식은 연쇄형태로 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{Bmatrix}_{i+1} = [T]_i \begin{Bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{Bmatrix}_i \quad (6)$$

또는

$$\{Z_L\}_{i+1} = [T]_i \{Z_L\}_i \quad (7)$$

로 표현된다. 식(7)에서  $\{Z_L\}_i$ 는 구조물의 상태벡터이고,  $[T]_i$ 는 구조물의 탄성, 운동, 그리고 관성특성을 포함하며 유한요소-전달행렬의 혼합법에 의한 구조물의 진동특성 해석에 사용될 부구조  $i$ 번째의 전달행렬에 해당된다.  $m$ 개의 부구조로 나누어진 구조물 전체에 대한 전달행렬은 다음과 같다.<sup>(2,7)</sup>

$$\begin{aligned} \{Z\}_m &= [T]_m [T]_{m-1} \dots [T]_1 \{Z\}_1 \\ &= [U] \{Z\}_1 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $\{Z\}_i$ 과  $\{Z\}_m$ 은 Fig. 1에서 구조물의 양 끝단 즉, 왼쪽과 오른쪽의 경계조건에 해당하는 상태벡터이고,  $[U]$ 는 구조물의 전체 전달행렬이 된다.

동강성행렬을 구성하는데 사용될 식(1)의 최종 축소된 강성행렬  $[K]$ 과 질량행렬  $[M]$ 은 잘 알려진 유한요소법에 의해 쉽게 구할 수 있으며, 본 연구에서는 Fig. 2와 같이 삼각형 박판요소<sup>(8)</sup>를 유한요소로 사용하였다. 또 이 과정은 다른 모든 부구조에 대해서도 반복적으로 구할 수 있다.

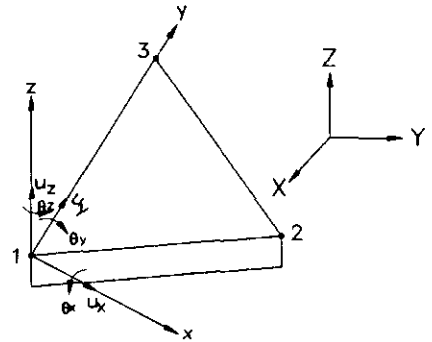


Fig. 2 Triangular plate element showing displacement at the nodal points

Fig. 2에서  $x, y, z$ 는 국부좌표계이고,  $X, Y, Z$ 는 전체 좌표계이다. 유한요소의 각 절점에는  $u_x, u_y, u_z$ 개의 직선변위와  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 개의 회전변위로 6개의 자유도를 갖고, 요소 하나에는 18개의 자유도를 갖는다. 절점의 변위는 면내와 면외변위로 구분되고, 이들 변위 중  $u_z, u_y, \theta_z$ 가 면내변위에 해당되고  $u_x, u_y, \theta_x$ 가 면외변위에 해당된다.  $u_x, u_y$ 를 식(9)과 같다고 가정하고,  $u_z$ 가 식(10)과 같다면  $u_z$ 와  $\theta_x, \theta_y$ 의 관계는 식(11)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ u_y &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_z &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 \\ &\quad + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2 + \alpha_{13} x^3 \\ &\quad + \alpha_{14} (x^2 y + xy^2) + \alpha_{15} y^3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \theta_x &= -\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \theta_y &= \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (11)$$

식(9)~(10)에서  $\alpha_i (i=1,2,K 15)$ 는 임의 상수이고, 이들 식을 유한요소의 절점변위  $\{u\}$ 로 다시 나타낼 수 있다.

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad (12)$$

여기서  $[N]$ 은 유한요소의 형상함수이고  $\{q\}$ 는 유한요소의 변위벡터이다. 또한 변형률-변위와 응력-변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= [B]\{q\} \\ \{\sigma\} &= [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{q\} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $\{\epsilon\}$ 는 변형률 벡터,  $[B]$ 는 변형률-변위 행렬,  $\{\sigma\}$ 는 응력 벡터,  $[D]$ 는 탄성행렬이다. 식(12)을 시간에 대해 미분한 후 Lagrangian 식에 적용시키고, 식(13)을 이용하면 다음과 같이 유한요소의 강성행렬  $[K]_e$ 와 질량행렬  $[M]_e$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} [K]_e &= \iiint_V [B]^T [D] [B] dv \\ [M]_e &= \iiint_V \rho [N]^T [N] dv \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $\rho$ 는 요소의 밀도이다. 식(14)의 강성행렬과 질량행렬 그리고 면내변위  $\theta_z$ 에 대한 강성과 질량행렬은 참고문헌 8에 제시되어 있다.

또한 식(8)에서 구조물의 진동특성 해석에 사용될 구조물 전체에 대한 전달행렬  $[U]$ 는 식(14)로부터 조합되어진 최종 축소된 부구조  $i$ 의 강성과 질량행렬에 의해 식(15)과 같이 재구성할 수 있고, 식(8)에서 위치  $i$ 의 각 절점에 대한 상태벡터  $\{Z\}$ 를 무차원화하면 식(16)과 같다.

$$[U] = \begin{bmatrix} [U_{xx}] & & & \\ & [U_{xy}] & & \\ & & [U_{xz}] & \\ & & & [U_{ix}] \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \{Z\}_i &= \left\{ \frac{U_x}{l} \frac{F_x}{AE} \frac{U_y}{l} \theta_z \frac{M_z}{EI} \right. \\ &\left. \frac{F_y l^2}{EI} \frac{U_z}{l} \theta_y \frac{M_y l}{EI} \frac{F_z l^2}{EI} \theta_x \frac{M_x l}{GJ} \right\}_i^T \end{aligned} \quad (16)$$

식(15)과 (16)에서 아래 첨자  $x, y, z$ 는 계의 각방향을 의미하고,  $t$ 는 토크를 의미한다. 또 식(16)에서  $E$ 는 탄성계수,  $I$ 는 관성모멘트,  $J$ 는 극관성모멘트,  $F$ 는 힘,  $M$ 은 모멘트, 그리고  $l$ 은 부구조로 나눈 계의 길이를 의미한다.

### 3. 진동특성

유한요소-전달행렬의 혼합법을 이용한 진동특성은 식(15)의 전체 전달행렬  $[U]$ 에 구조물의 양 끝단의 경계조건에 따른 상태벡터와의 관계로부터 구할 수 있다. 구조물의 진동특성 중 고유진동수는 경계조건의 차수에 따라 결정되고, 구조물의 운동상태에 따라 행렬식의 차수가 결정된다. 따라서 구조물의 왼쪽 경계조건 행렬  $[R_L]$ 과 오른쪽 경계조건 행렬  $[R_R]$ 을 적용하면 식(8)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.<sup>(2)</sup>

$$\begin{aligned} \{0\} &= [F_R]\{U\} = [F_L]\{Z\}_1 \\ &= [U_G]\{Z\}_1 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 상태벡터  $\{Z\}_1$ 은 영이 아닌 상태량으로 자유도를 나타내고, 행렬  $[U_G]$ 는 구조물의 특성값을 나타낸다. 또 행렬  $[U_G]$ 는  $\omega$ 의 함수로서 식(16)이 유용해(non-trivial solution)의 값을 갖기 위해서는

$$\Delta(\omega) = \det[U_G] = 0 \quad (18)$$

되어야 한다.  $\Delta(\omega)$ 를 진동수방정식이라고 하며, 진동수방정식을 만족하는  $\omega$ 의 값이 계의 고유진동수가 된다. 구조물의 고유진동수가 결정되고 나면 구조물의 모드형상은 하나의 변수에 대한 비로 구할 수 있다. 이것은 하나의 진동수로부터 구조물의 한쪽 끝단에서 단위주기로 시작하여 다른 한쪽 끝단의 응답을 계산하게 된다. 즉, 경계조건을 고려한 식(16)으로부터 상태벡터 중 하나가 단일주기를 가진다고 가정하면, 한쪽 끝단의 자유도에 대한 모드형상을 구할 수가 있고, 부구조  $i$ 의 유한요소에 대한 각 절점의 모드형상은 왼쪽 자유도의 모드형상과 왼쪽 경계조건만을 고려한 전달행렬의 곱셈으로 구할 수 있다.<sup>(7)</sup>

### 4. 수치해석 및 고찰

진동특성 해석을 위해 해석모델로 cantilevered box beam<sup>(8)</sup>을 선택하였고, 형상은 Fig. 3과 같다. Fig. 3에서  $m$ 은 전달행렬의 구성을 위한 부구조의 수이고, 또 동강성행렬의 구성을 위해 각 부구조를 8개의 유한요소로 세분하였다. 해석모델의 기계적 성질은 탄성계수  $E=210\text{GPa}$ , 포아송 비  $\nu=0.3$ , 비중  $\rho=7,850\text{kg/m}^3$ 이다.

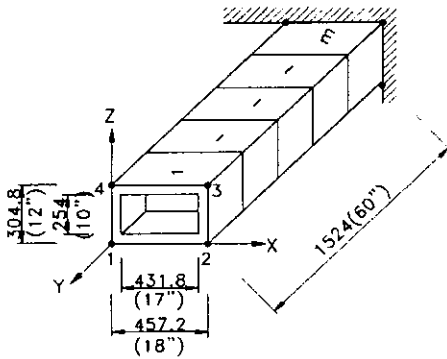


Fig. 3 Cantilevered box beam

각 부구조의 유한요소에 대한 강성과 질량행렬을 식 (14)에 의해 구하고, 이들 행렬은 부구조의 전 요소에 대한 강성과 질량행렬로 조합시킨다. 조합된 행렬을 이용하여 앞서 정의한 식(1)~(8)을 이용하여 식(15)의 전체 전달행렬 [U]를 구성한다. 해석모델의 경계조건과 상태벡터 {Z}<sub>1</sub>은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{좌측 경계조건: } U_x, U_y, U_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z &= 1 \\ F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{우측 경계조건: } U_x, U_y, U_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z &= 0 \\ F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z &= 1 \end{aligned}$$

$$\{Z\}_1 = \{U_x, U_y, U_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}_1^T$$

해석모델 Fig. 3의 경우 부구조 수에 따른 전달행렬법 (TMM)과 유한요소법(FEM) 그리고 혼합법을 이용한 본 연구의 자유도 수를 비교해보면, Table 1에 나타난 바와 같이 전달행렬법과 본 연구의 자유도가 유한요소법보다 현저하게 줄어들음을 알 수 있다. 유한요소법은 부구조 수의 증가에 따라 요소 수와 자유도가 증가하지만, 전달행렬법과 혼합법을 이용한 본 연구에서는 부구조의 수와 요소 수가 증가해도 자유도는 일정한 값을 갖는다. 이는 서론에서 언급한 바와 같이 행렬의 규모가 상태벡터 차수만큼의 전달행렬 곱셈만으로 이루어지기 때문이다. 본 연구에서 구성된 전달행렬 [U]는 유한요소의 각 절점의 각 방향에 대한 직선 회전변위, 힘, 모멘트로 표시되어 36x36이 되고, 진동특성을 계산하게 되는 행렬 [U<sub>0</sub>]는 양 끝단의 경계조건이 적용되어 18x18로 줄어들어 자유

도가 18이 된다.

Fig. 3의 고유진동수를 10차 모드까지 구하여 m=5일 때 상용프로그램인 ANSYS를 기준으로 하여 전달행렬법과 비교한 차이를 Table 2에 제시하였고, Table 3은 본 연구의 결과와 비교한 차이를 제시한 것이다. Table 2에 제시한 바와 같이 고차 모드로 갈수록 전달행렬법의 고유치가 현격하게 커짐을 알 수 있는데, 이것은 3차원 구조물의 경우 구조물의 방향이 변하는 부분에서 발생하는 각 방향의 자유도의 연성이 고려되지 못하는 전달행렬법의 단점 때문인 것으로 판단된다. Table 3은 ANSYS와 비교해볼 때 그 결과가 5% 이내의 차이로 잘 일치함으로써 본 연구의 해석 및 고유치 계산 프로그램의 타당성을 확인하였다. 또한 Table 3에서와 같이 고차 모드로 갈수록 그 차이가 현격히 줄어들었고 또 전달행렬법과 본 연구의 고유진동수를 비교해 보면 약 25%정도 개선되었는데, 이것은 유한요소법으로 전달행렬법의 단점을 보완한 혼합법의 장점이라고 할 수 있다. 따라서 혼합법을 이용하면 계산량이 줄어 개인용 컴퓨터로도 해석이 가능하고, 산업기계의 진동해석에서 이용되는 고차 모드의 계산에도 아주 유용하다.

Table 1 Comparison of Degree of Freedom

| No. of Substructure | No. of Node | No. of Element | Degree of Freedom |     |           |
|---------------------|-------------|----------------|-------------------|-----|-----------|
|                     |             |                | FEM               | TMM | Presented |
| m = 5               | 24          | 40             | 120               | 18  | 18        |
| m = 6               | 28          | 48             | 144               |     |           |
| m = 8               | 36          | 64             | 192               |     |           |
| m = 10              | 44          | 80             | 240               |     |           |

Table 2 Comparison of natural frequencies

| Mode No. | TMM (Hz) | ANSYS (Hz) | Difference (%) |
|----------|----------|------------|----------------|
| 1        | 164.89   | 153.74     | 7.3            |
| 2        | 259.41   | 245.14     | 5.8            |
| 3        | 275.33   | 257.03     | 7.2            |
| 4        | 361.86   | 348.26     | 3.9            |
| 5        | 377.45   | 361.86     | 4.3            |
| 6        | 411.28   | 372.54     | 10.4           |
| 7        | 473.83   | 409.53     | 15.7           |
| 8        | 492.02   | 428.59     | 14.8           |
| 9        | 547.61   | 433.58     | 26.3           |
| 10       | -        | 462.69     | -              |

Table 3 Comparison of natural frequencies

| Mode No. | ANSYS (Hz) | Presented (Hz) | Difference (%) |
|----------|------------|----------------|----------------|
| 1        | 153.74     | 146.98         | 4.4            |
| 2        | 245.14     | 234.11         | 4.5            |
| 3        | 257.03     | 247.26         | 3.8            |
| 4        | 348.26     | 337.46         | 3.1            |
| 5        | 361.86     | 351.00         | 3.0            |
| 6        | 372.54     | 361.36         | 3.0            |
| 7        | 409.53     | 398.20         | 2.7            |
| 8        | 428.59     | 416.59         | 2.8            |
| 9        | 433.58     | 422.74         | 2.5            |
| 10       | 462.69     | 455.29         | 1.6            |

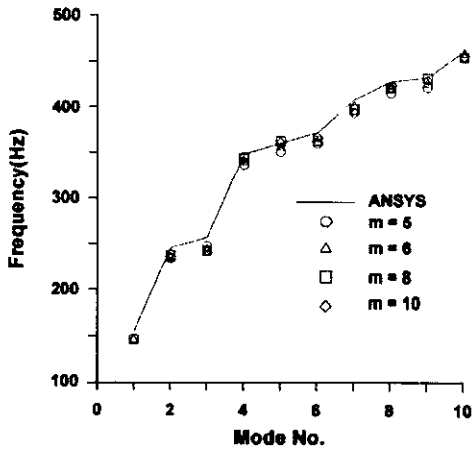


Fig. 4 Natural frequencies by number of substructure

Fig. 4는 Table 1의 부구조 수  $m$ 에 따라 고유진동수를 구하고 ANSYS와 비교한 것이다. 부구조 수에 따른 각 모드 값의 차이가 2% 이내로 부구조 수에 따른 고유진동수의 편차를 줄이는 데 큰 의미를 주지는 못했다. Fig. 5는 부구조 수  $m=5$ 일 때 1~6차 모드에 대한 해석모델의 모드형상으로 대부분 면내변위의 영향이 가장 큰 것으로 나타났다.

### 5. 결론

본 연구는 산업기계류의 진동특성을 규명하기 위한 기초 연구로 자유도를 줄이고 산업기계류의 진동해석에서

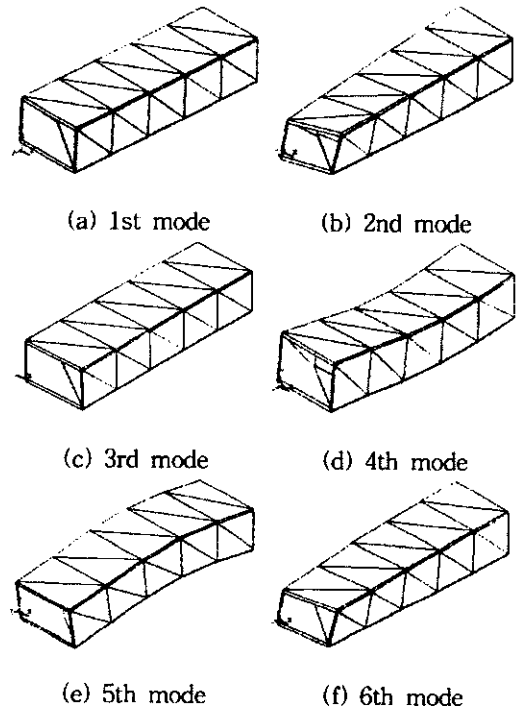


Fig. 5 Mode shape for each mode

이용되는 고차모드의 계산에서도 유용함을 입증하기 위해 3차원 cantilevered box beam을 해석모델로 선택하고, 해석방법으로 유한요소-전달행렬의 혼합법을 이용하여 진동해석을 실시한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

유한요소-전달행렬의 혼합법에 의한 모델링으로 자유도를 줄일 수 있었고, 컴퓨터의 메모리가 약 600kbyte 정도만 되어도 진동특성을 쉽게 구할 수 있다. 해석모델의 고유진동수를 상용프로그램인 ANSYS와 비교함으로써 본 연구의 해석 및 고유치 계산 프로그램의 타당성을 검증할 수 있었고, 전달행렬법의 단점인 고차 모드계산에서도 아주 유용함을 입증하였다.

### 참고 문헌

- (1) Y. K. Cheung, Finite Strip Method in Structural Analysis. Pergamon Press, Oxford, 1976.
- (2) E. C. Pestal and F. A. Leckie, Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, New York, 1963.
- (3) M. A. Dokainish, "A New Approach for Plate Vibra-

- tions: Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique", J. of Engineering for Industry, ASME, Vol.94, pp. 526~530, May, 1972.
- (4) S. Sankar and S. V. Hoa, "An Extended Transfer Matrix-Finite Element Method for Free Vibration of Plates", J. of Sound and Vibration, Vol.70, No.2, pp. 205~211, 1980.
- (5) M. Ohga, T. Shigematsu and T. Hara, "Structural Analysis by a Combined Finite Element-Transfer Matrix Method", Computer & Structures, Vol.17, No. 3, pp. 321~326, 1983.
- (6) Edward E. Degen, Mark S. Shephard and Robert G. Loewy, "Combined Finite Element-Transfer Matrix Method Based on a Mixed Formulation", Computer & Structures, Vol.20, No. 1-3, pp. 173~180, 1985.
- (7) 이동명, "전달행렬법을 이용한 3차원 파이프 계의 진동해석", 한국공작기계학회지, 제7권, 제6호, pp. 110~116, 1998.
- (8) S. S. Rao, The Finite Element Method in Engineering, Pergamon Press, pp. 303~395, 1982.