

압축력으로 인한 균열표면의 마찰접촉 해석

김방원*, 김영권*, 이기수**

Frictional Contact Analysis of the Crack Surfaces Under the Compressive Loading

Bang Won Kim*, Young Kweon Kim*, and Ki Su Lee**

ABSTRACT

When a body including a crack inside is subjected to the compressive forces, the crack is closed and sliding occurs on the crack surfaces. In this work, a subsurface crack subjected to a static compressive load is analyzed with the finite element method considering friction on the crack surface. The friction on the crack surface is assumed to follow the Coulomb friction law, and a numerical method based on the finite element method and iterative method is applied in this work. The result is compared with those of ANSYS and references.

Key Words : crack closure (균열 닫힘), frictional contact (마찰접촉), iterative method (반복계산법)

1. 서론

강철 바퀴 외륜과 레일, 로울러와 볼베어링, 캠과 중동부 등의 기계 요소는 구름접촉을 일으켜 표면상에서 주기적인 접촉하중을 받게 된다. 이러한 접촉하중을 받는 표면에서는 피팅(pitting)과 같은 표면 부근에서의 균열이 발생한다. 이때에 물체의 표면상에서의 하중에 따라 균열 표면은 열리거나 또는 닫혀지고, 또한 서로 접촉하면서 미끄러지게 된다. 이러한 균열표면의 마찰 및 접촉현상은 기계 부품의 마모(wear)에서 뿐만 아니라 금속의 소성가공 등에서 광범위하게 발생하고, 특히 피로해석의 경우 중요한 과제이다¹⁾. 균일한 압축력과 집중하중을 받는 균열표면의 마찰접촉 현상은 물체 표면상에 적용된 하중의 방향, 균열표면상의 마찰계수 크

기 그리고 움직이는 하중 등 여러 조건을 고려하여 해석적 또는 수치해석적인 방법을 사용하여 그 해를 구하고 있다. 해석적 방법의 예로서, Melville²⁾는 압축하는 집중하중을 줄 경우에 균열표면이 서로 접촉하며 미끄러질 때 응력확대계수는 마찰계수의 크기에 따라서 결정됨을 보여주었다. Schmueser와 Comninou³⁾은 물체의 상면에 균일 분포하중을 주고, 접선방향으로 적용된 집중하중을 준 경우에 균열표면의 탄성층과 접촉기면사이의 마찰적인 미끄러움을 다루는 방법을 이론식으로 표현하고 있다. 여기에서 접선방향 하중은 균열표면이 미끄러움이 일어나고 어떠한 분리도 일어나지 않는 하중크기로 제한하고 있다. Chang과 Comninou⁴⁾와 Sherrard와 Barber⁵⁾은 물체의 표면상을 움직이는 하중을 고려하여 해법을 제시하였다. 그러나 이상의 해석적

2000년 12월 8일 접수

* 전북대학교 대학원 기계공학과

** 전북대학교 기계공학과, 자동차신기술연구소

방법들은 비교적 간단한 균열에 의한 계산이 가능하며, 복잡한 문제의 경우 유한요소법을 사용하는 것이 일반적이다. 접촉하는 두 표면 사이의 마찰접촉 문제를 해석하기 위하여는 Penalty method, Lagrange multiplier method 등 여러 가지 해석방법이 있지만, 균열 닫힘 문제와 같이 표면에서 마찰력의 방향을 사전에 알지 못하는 문제의 경우 적용이 곤란한 경우가 많다. 예로서 Kotsovos와 Spiliopoulos⁶⁾, Maiti⁷⁾, Kwon⁸⁾, Fawaz⁹⁾ 등은 유한요소법을 사용하여 균열 표면의 닫힘 현상을 계산하고 있지만 마찰 접촉 해석을 위한 정확한 알고리즘은 제시하지 않고 있다. 본 논문에서는 Lee¹⁰⁾의 반복계산법에 의하여 균열 표면에서의 마찰 접촉력 및 그 방향을 정확히 구하는 계산방법을 사용하였다. 본 논문에서 사용된 방법은 접촉 오차를 연속적으로 감소시켜 간다는 점에서 Lee와 Jinn¹¹⁾의 방법과 비슷하다. 그러나 Lee와 Jinn¹¹⁾의 경우에는 기본적으로 block Gauss-Seidal method에 준하는 반복 계산법을 사용하는데 반하여 본 논문의 경우에는 Richardson's method에 준하는 반복 계산법을 사용하였다. 특히 본 논문의 계산 방법은 Lee¹⁰⁾에 설명된 계산 가속 기법에 의하여 block Gauss-Seidal method보다 대단히 빠른 Chebyshev acceleration technique(Young¹²⁾ 참조) 수준의 수렴 속도를 얻을 수 있다. 또한 참고문헌에 소개된 문제의 예제 계산을 통하여 본 논문의 반복계산법에 의한 계산의 정확도 및 경제성을 ANSYS 및 참고문헌의 결과와 비교 점검하였다.

2. 기본 방정식 및 해법

2.1 접촉(Contact)

물체 A의 접촉 가능한 표면상에서, \mathbf{u} 를 표면에서의 변위, \mathbf{w} 를 외력에 의한 변위, \mathbf{p} 를 마찰접촉력이라 하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\mathbf{u}^A = \mathbf{C}^A \mathbf{p} + \mathbf{w}^A \quad (1)$$

물체 B에 접촉 가능한 표면에서, 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\mathbf{u}^B = -\mathbf{C}^B \mathbf{p} + \mathbf{w}^B \quad (2)$$

식(1)와 (2)로부터, 가능한 접촉 표면 사이에서

다음의 상대 변위를 얻는다.

$$\mathbf{u}^A - \mathbf{u}^B = \mathbf{C} \mathbf{p} + \mathbf{w}^A - \mathbf{w}^B \quad (3)$$

여기서, 행렬 \mathbf{C} 는 positive definite로서 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^A + \mathbf{C}^B \quad (4)$$

이들 두 물체의 접촉점의 초기(변형 전) 거리를 \mathbf{d} 라고 하면 변형 후의 상대위치(침입거리) \mathbf{s} 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{s} = \mathbf{u}^A - \mathbf{u}^B - \mathbf{d} \quad (5)$$

또한 접촉 표면에서 쿨롱의 마찰법칙을 적용시키는 경우, 접촉 가능한 점 i 에 관한 마찰접촉 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{in} &\leq 0 \\ s_{in} &\leq 0 \\ p_{in} &= 0 \quad \text{if } s_{in} < 0 \\ s_{it} &= 0 \quad \text{if } |p_{it}| < \mu |p_{in}| \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, μ 는 마찰계수를 나타내고 하첨자 n 과 t 는 표면의 법선과 접선방향을 나타낸다. 접촉하는 표면에 대해서, 침입거리 \mathbf{s} 와 마찰접촉력 \mathbf{p} 에 의해서 오차벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} v_{in} &= s_{in} \quad \text{if } p_{in} < 0 \quad \text{or} \quad \text{if } s_{in} > 0 \\ &= 0 \quad \text{if } p_{in} \geq 0 \quad \text{and} \quad s_{in} \leq 0 \\ v_{it} &= s_{it} \quad \text{if } |p_{it}| < \mu |p_{in}| \\ &\quad \text{or} \quad \text{if } \text{sign}(p_{it}) = \text{sign}(s_{it}) \quad \text{and} \quad \mu |p_{in}| > 0 \\ &= 0 \quad \text{if } |p_{it}| \geq \mu |p_{in}| \\ &\quad \text{and} \quad \text{sign}(p_{it}) = -\text{sign}(s_{it}) \quad \text{or} \quad \text{if } \mu |p_{in}| > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

그러면, 마찰접촉 조건 (6)은 다음의 조건으로

변환된다.

$$\begin{aligned}
 p_{in} &\leq 0 \\
 |p_{it}| &\leq \mu |p_{in}| \\
 v &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

2.2 반복계산법(Iterative Scheme)

본 논문에서는 균열표면에서의 접촉력 \mathbf{p} 의 값을 반복계산법에 의하여 계산하여 모든 접촉 가능 점에서의 오차벡터 \mathbf{v} 을 향하여 단조감소하게 만드는 방법을 사용한다. 즉 접촉력 \mathbf{p} 는 다음과 같은 반복계산법(Lee¹⁰)에 의하여 계산한다.

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{p}}^j &= \mathbf{p}^{j-1} - \alpha \mathbf{s}^{j-1} \\
 p_{in}^j &= \min(0, \bar{p}_{in}^j) \\
 p_{it}^j &= \text{sign}(\bar{p}_{it}^j) \min(|\bar{p}_{it}^j|, \mu |p_{in}^j|) \\
 &\text{if } v_{it}^{j-1} = s_{it}^{j-1} \\
 &= \text{sign}(\bar{p}_{it}^j) \mu |p_{in}^j| \text{ if } v_{it}^{j-1} = 0 \neq s_{it}^{j-1}
 \end{aligned} \tag{9}$$

여기서, j 는 반복계산의 카운터이고 α 는 수렴 및 계산시간 절감을 위한 양의 상수로서 계산가속기법을 사용하지 않는 한 $1.9 / \|\mathbf{C}\|_\infty$ 라고 정의하여 계산을 시작한다. 마찰 접촉력 \mathbf{p} 를 위 반복계산법에

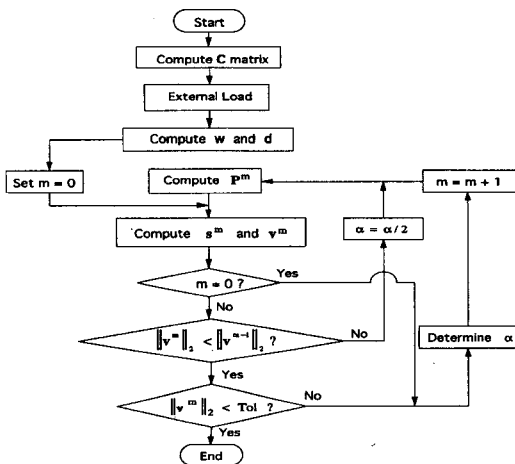


Fig. 1 Flow chart for the iteration scheme

의하여 계산하는 경우 식 (7)에 의하여 정의된 오차 벡터 \mathbf{v} 가 0이 되면 마찰접촉 조건 식 (6)은 완전히 만족됨을 증명할 수 있으며 이러한 것에 대한 증명은 참고논문 Lee¹⁰에 자세히 설명되어 있다.

정확한 마찰접촉력 \mathbf{p} 를 구하기 위한 반복계산법의 계산 과정은 Fig. 1과 같으며, 정확한 해로의 수렴은 참고문헌 Lee¹⁰에 의하여 증명된다.

2.3 ANSYS에서의 접촉해석

본 논문에서는 ANSYS를 사용하여 계산결과를 점검하였으며, 이 경우 ANSYS의 Contact 12요소를 사용하였다. 본 요소를 선택한 이유는 두 개로 정의된 노드들 사이의 접선 미끄럼 마찰을 갖는 압축적인 접촉을 묘사할 수 있으며, 접촉점을 사전에 알고 있고 변형할 접촉표면이 변하지 않을 때 유용하기 때문이다. Contact 12요소는 2차원 점과 점의 접촉을 해석하는 요소로서, 물리적인 접촉을 멈추거나 유지하는 그리고, 서로의 면이 상대적으로 미끄러지는 두 표면에 표현한다. 요소는 수직방향에서 압축력만 지탱하고 수평방향으로 전단력(Coulomb friction)을 유지할 수 있다. Fig. 2에서 볼 수 있듯이 요소는 각각의 노드에 2개의 자유도를 가진다(절점 x 와 y 방향에서 변위). 요소는 초기에 수직방향에서 전하중(preload)을 가해질 수 있거나 특정 틈새값(gap specification)을 줄 수 있다. 특정한 강성(specified stiffness)은 틈새가 닫혀지고 미끄러지지 않을 때 수직과 수평방향에 작용한다.

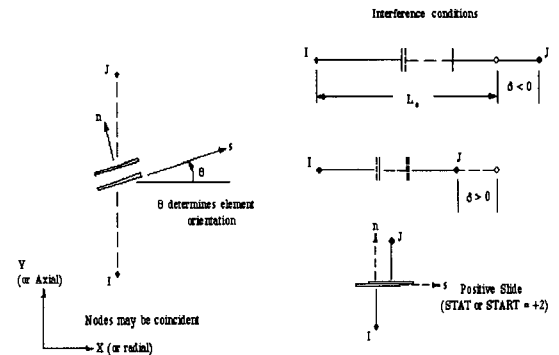


Fig. 2 CONTACT12 element

ANSYS에서는 접촉요소를 사용하기 전에, 기본적으로 접촉강성(KN)을 정의해야만 한다. 접촉강성은 아래의 식에 의해서 구할 수 있다.

$$KN \approx f \times E \times h \quad (10)$$

여기서, f 는 접촉 적합성을 제어하는 계수로서 보통 1로서 시작한다. E 는 접촉하는 물체의 탄성계수이며, h 는 특정한 접촉길이로서 2차원 평면 응력 및 평면 변형률에서는 1로 정의될 수 있다. 이외에도 요소속성으로서 Elastic Coulomb Friction 상수(KT) 값, Penetration Tolerance(TOLN)값들을 정의할 필요가 있다. 그러나, 위의 값들을 고려하여도 수렴하는데 주요한 요소로서 작용하는 것은 KN값이다. 여기서, 난해한 점은 위의 식에서 정의한 대로 조절된 KN값이라 하더라도 수렴에 필요한 값을 찾기는 어렵다. 그래서, KN값을 찾는데 많은 시행오차를 겪어야 하는 어려움이 있다.

3. 예제계산

3.1 균일한 압축하중과 수직방향 집중하중을 가한 경우

본 모델은 Chang과 Sheppard등¹³⁾이 사용한 모델로서 압축력이 작용하는 물체의 표면에 매우 가까이 균열이 존재하는 경우의 문제이다. 또한 그 유한 요소 모델은 Fig. 3과 같다. 여기서, 평판의 폭(W)은 200mm, 높이(H)는 100mm이며 균열길이(L)는 30mm이고 균열깊이(a)는 10mm로 하여 해석하였다. 본 논문의 반복계산법의 경우 424개의 4절점요소를 사용했고 총 절점수는 505개이다. ANSYS에서는 총 요소수가 443개이며 절점수는 543개인데, 이것은 Contact 12요소를 사용하여 요소 수와 절점수가 증가했기 때문이다. 본 예제에 적용한 수치는 Table 1과 같다.

Table 1 Applied numerical values for example 1

Concentrated Load(P)	82.2 N
Uniform Pressure(p_0)	1.0 N/mm ²
Young's Modulus(E)	1.0e7 N/mm ²
Poisson's Ratio(ν)	0.3
Coefficient of Friction	0.5

Fig. 4는 균열표면에서의 본 논문의 반복계산법으로 구한 수직 접촉응력을 Chang과 Sheppard등¹³⁾이

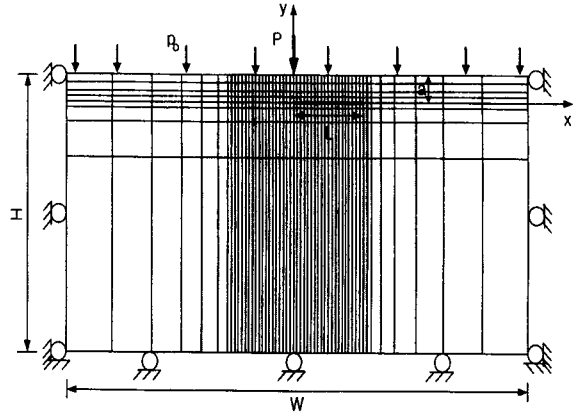


Fig. 3 Finite element model of example 1

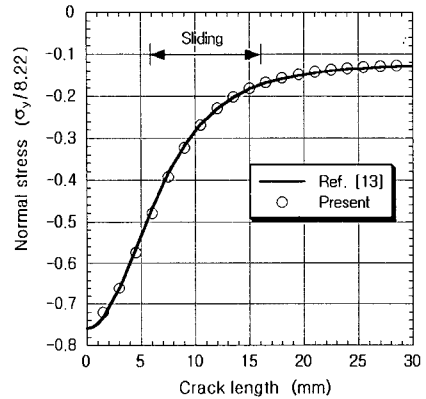


Fig. 4 Normal stress distribution on the crack surface of example 1 by the present iterative scheme

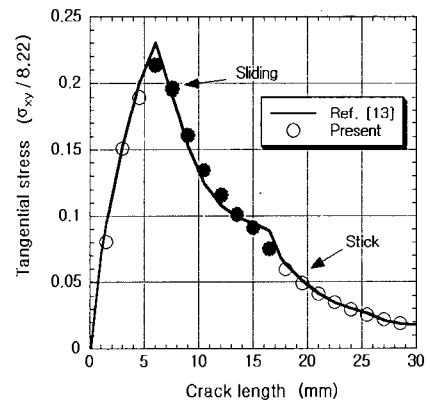


Fig. 5 Tangential stress distribution on the crack surface of example 1 by the present iterative scheme

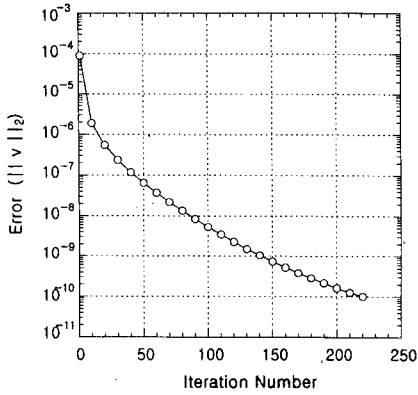


Fig. 6 Change of error norm of example 1

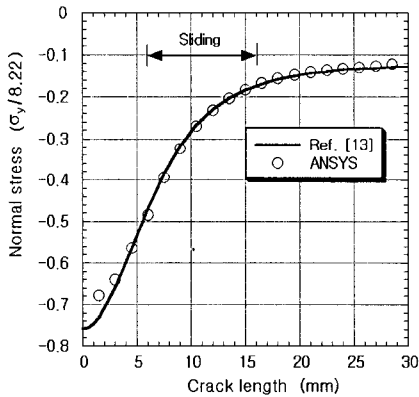


Fig. 7 Normal stress distribution on the crack surface of example 1 by ANSYS

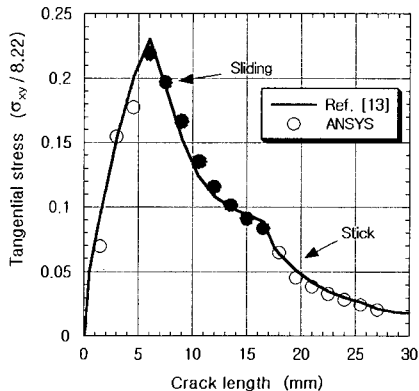


Fig. 8 Tangential stress distribution on the crack surface of example 1 by ANSYS

해석한 이론값과 비교한 것이다. 미끄럼이 일어나는 지역은 x방향으로 6mm~16mm까지로 10mm범위이다. Fig. 5는 균열길이에 대해 균열면의 마찰력을 표시한 것이다. Fig. 6는 본 해석에 이용된 반복계산법의 오차노름의 감소를 반복횟수에 대해서 나타내고 있다. Fig. 7과 Fig. 8은 같은 모델에 대해 ANSYS에서 해석한 결과이다. ANSYS에서 마찰접촉 해석을 위해서 사용된 방법은 Penalty method로서 접촉강성 KN을 적용하여 해석하였다. 접촉요소(Contact 12)를 이용하여 접촉요소가 갖는 접촉력을 구하여 각 접촉노드에서의 응력값을 구하였다. 여기에서 적용된 접촉 강성 KN은 $3.25e7 \text{ N/mm}^2$ 이며 만약 KN값이 달라지면 계산 결과도 달라진다.

3.2 균일한 압축하중과 접선방향 집중하중을 받는 균열표면의 마찰접촉해석

본 모델은 Schmueser와 Comninou등³⁾이 해석한 모델로서 유한요소 모델은 Fig. 9에 표시되어 있다. 좌표계의 설정과 경계조건 그리고 하중의 작용위치는 예제 1과 똑같다. 그리고 Schmueser와 Comninou등³⁾의 해석값과의 비교를 위해서 집중하중 Q는 균열표면이 미끄럼만이 일어나고 분리는 일어나지 않는 하중크기를 적용하였다.

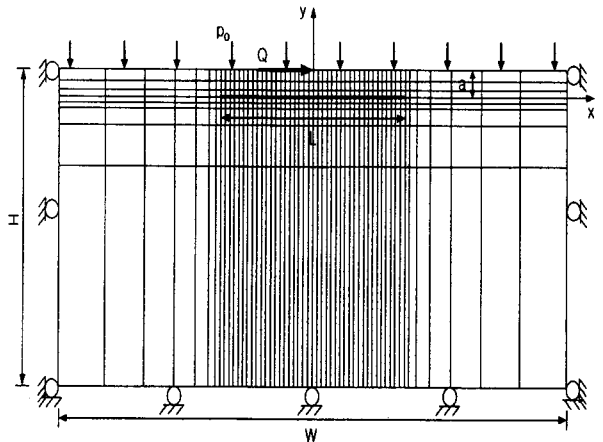


Fig. 9 Finite element model of example 2

균열길이(L)은 80mm, 균열깊이(a)는 10mm이고 평판의 높이(H)는 100mm이고 폭(W)은 220mm로 설정하여 해석하였다. 본 논문의 반복계산법에서는 432개의 4절점요소를 사용했고 총 절점수는 534개

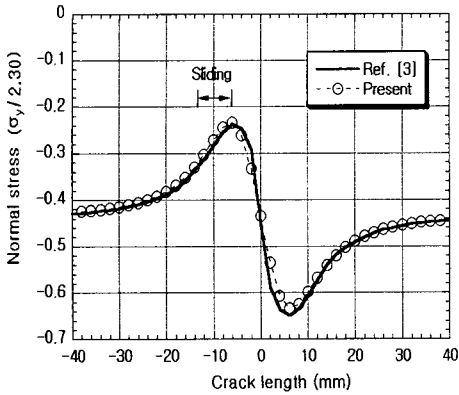


Fig. 10 Normal stress distribution on the crack surface of example 2 by the present iterative scheme

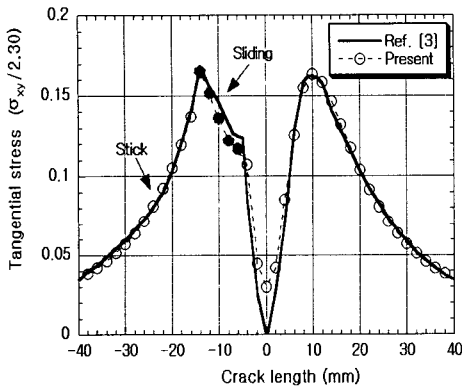


Fig. 11 Tangential stress distribution on the crack surface of example 2 by the present iterative scheme

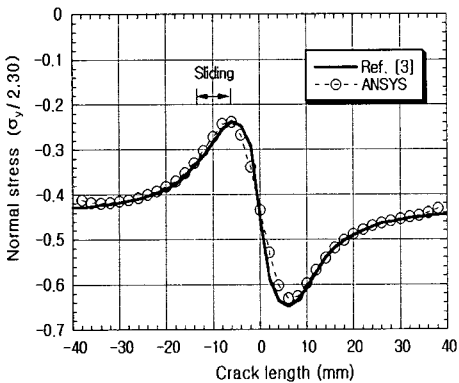


Fig. 12 Normal stress distribution on the crack surface of example 2 by ANSYS

이며 균열부분에서의 접촉가능한 절점수는 78개이다. 본 예제에 적용된 수치값은 예제 1과 같으며 접선방향 집중하중(Q)은 x축의 양의 방향으로 23N으로 하였다. 본 논문의 반복계산법에 의하여 계산된 균열 표면에서의 수직 및 마찰 접촉응력이 Fig. 10과 Fig. 11에 표시되어 있다. 또한 ANSYS에 의한 해석결과가 Fig. 12와 Fig. 13에 표시되어 있다. ANSYS에서의 Contact 12요소에 적용된 접촉강성 KN값은 $4.6e7 N/mm^2$ 이다.

본 모델의 해석시간은 Workstation (Solaris 2.4)에서 본 논문의 반복계산법으로는 1분 30여초가 소요되고 ANSYS로는 2분 40여초가 소요된다.

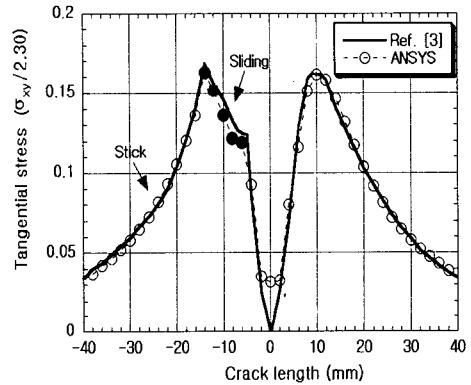


Fig. 13 Tangential stress distribution on the crack surface of example 2 by ANSYS

4. 결론

본 논문에서는 압축력으로 인한 균열 표면의 마찰 접촉력을 계산하기 위한 반복계산법을 설명하였다. 압축력에 의하여 균열 표면이 서로 접촉하여 마찰이 발생하는 경우 본 논문에서 사용된 반복계산법을 통하여 균열 표면의 마찰 접촉력을 정확히 계산할 수 있음을 예제 계산을 통하여 참고문헌 및 ANSYS의 결과와 비교 입증하였다. 또한 컴퓨터 계산에 소요되는 시간을 ANSYS에 의한 계산 시간과 비교하여 그 경제성을 입증하였다. 본 논문의 계산 방법은 임의의 균열 형상 및 임의의 하중 상태에서도 적용 가능한 것이며, 특히 접촉 표면에서 stick과 sliding의 구별 및 마찰력의 방향이 본 논문의 반복계산법에 의하여 항상 정확히 계산될 수 있으므로

임의의 복잡한 반복 하중이 작용하는 피로 해석의 경우에도 적용이 가능하리라고 예상되며 이에 대한 추후의 연구가 요망된다.

후기

본 연구는 전북대학교 자동차신기술연구소 지원에 의하여 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. R. Kumar, "Review On Crack Closure For Constant Amplitude Loading In Fatigue," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 42, No. 2, pp. 389-400, 1992.
2. P. H. Melville, "Fracture Mechanics of Brittle Material in Compression," *International Journal of Fracture*, Vol. 13, pp. 532-534, 1977.
3. D. Schmueser, M. Comninou, and J. Dundurs, "Frictional Slip Between Layer and Substrate," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 107, pp. 1103-1118, 1981.
4. F. K. Chang, M. Comninou, and J. R. Barber, "Slip between a Layer and a Substrate caused by a Normal Force Moving Steadily over the Surface," *Int. Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 25, No. 11, pp. 803-809, 1983.
5. S. Sheppard, J. R. Barber, and M. Comninou, "Short Subsurface Cracks Under Conditions of Slip and Stick Caused by a Moving Compressive Load," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, No. 12, pp. 811-817, 1985.
6. M. D. Kotsivos, K. V. Spiliopoulos, "Modelling of Crack Closure for Finite-Element Analysis of Structural Concrete," *Computers & Structures*, Vol. 69, pp. 383-398, 1998.
7. S. K. Maiti, "Finite Element Computation of Crack Closure Integrals and Stress Intensity Factors," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 41, No. 3, pp. 339-348, 1992.
8. Y. W. Kwon, "Analysis of Crack Closure in Unidirectional Composite Plates Subject to Bending Loads," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 42, No. 5, pp. 825-831, 1992.
9. S. A. Fawaz, "Application of the Virtual Crack Closure Technique to Calculate Stress Intensity Factors for through Cracks with an Elliptical Crack Front," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 59, No. 3, pp. 327-342, 1998.
10. K. Lee, "An Efficient Solution Method For Frictional Contact Problems," *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 1, pp. 1-11, 1989.
11. K. S. Lee, J. T. Jinn, and Y. Y. Earmme, "Finite Element Analysis of a Subsurface Crack on the Interface of a Coated Material Under a Moving Compressive Load," *Wear*, Vol. 155, pp. 117-136, 1992.
12. D. M. Young, "Iterative Solution of Large Linear Systems," Academic Press, New York, 1971.
13. F. K. Chang, M. Comninou, S. Sheppard, and J. R. Barber, "The Subsurface Crack Under Conditions of Slip and Stick Caused by a Surface Normal Force," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 6, pp. 311-316, 1984.