

## ◆특집◆ 병렬기구

## 병렬형 기구의 강성행렬과 그 응용

최용제\*

## Stiffness Matrix of a Fully Parallel Manipulator and Its Applications

Yong Je Choi\*

**Key Words** : Fully Parallel Manipulator(병렬형 기구), Stiffness Matrix (강성행렬), Compliant Wrist (수동형 손목기구), Position/Force Hybrid Control(힘/위치 동시제어), Frequency Response(주파수응답).

## 1. 서론

최근에 이르기까지, 로봇공학에 관련하고 있는 많은 연구자들이 병렬형 기구(fully parallel manipulator)에 대한 이론적인 연구와 그 응용에 대하여 많은 관심을 갖아 온 것이 사실이다. 이는 병렬형 기구가 직렬형 기구(serial manipulator)에 대하여 갖고 있다고 생각해 온 장점들 때문일 것이다. 즉, 일반적으로, 병렬형 기구가 직렬형 기구에 비하여 상대적으로 높은 정밀도와 강성을 갖고 있다고 이해되어 왔으며, 이러한 보편적인 공학적 인식 하에서, 이 병렬형 기구를, 특히, 공작기계로 활용하기 위한 많은 연구를 수행하여 왔다. 그 결과로서 적지 않은 실험 모델들과 상용 모델들이 소개된 바 있다. 그러나 이러한 현실적 연구의 산물들과는 달리, 아직도 병렬형 기구의 성능, 그 중에서도 특히 정역학적, 동역학적 성능을 규정하고 평가할 수 있는 보편화된, 또는 표준화된 기술이 정립되어 있지 않은 것도 또한 사실이다. 이러한 기술의 필요성은, 이 것이 병렬형 기구의 설계에 중요한 정보를 제공함은 물론, 이 기구의 잠재적 활용도가 높다는 측면에서도 정립되어야

할 연구과제로 남아 있다 할 것이다.

여기서는, 병렬기구에 대한 많은 연구과제 중에서도, 특히, 이 기구의 강성을 이해하기 위한 한 가지의 방편으로서, 이제까지 연구되어 온 이 기구에 대한 강성행렬을 소개하고, 그와 관련된 연구결과를 간략히 소개하고자 한다. 복잡한 기하적 형상을 갖거나, 많은 부품으로 구성된 기계의 강성을 이해하고 살펴보기 위해서, 엔지니어들은 일반적으로, 유한요소법과 같은 방법에 의존할 것이다. 그러나, 병렬형 기구를 구성하고 있는 이동 플랫폼을 단일 강체로, 그리고, 다리(legs) 또는 컨넥터들을(connectors) 선형 스프링으로 단순화한 모델을 사용하여, 이로부터 이 기구의 강성 또는 그 특성에 대한 대략적인 이해를 시도해 볼 수도 있다. 이러한 단순화는, 각 다리의 개별적인 강성에 대한 이론적 단순화 내지는 실험적 결과에 근거할 수 있을 것이다.

이러한 단순화한 병렬형 기구의 강성행렬은, 직선의 기하학(line geometry)을 도구로 사용한 Duffy에 의하여 처음으로 소개되었다<sup>[1]</sup>. 3 차원 공간에서 탄성체로 지지된 단일 강체의 거동에 대한 기하적 접근 방법에 의한 체계적 연구는 Ball<sup>[2]</sup>에 의하여 시도된 이후로, Dimentberg<sup>[3]</sup>는 탄성적으로 지지된 이러한 단일 강체의 정역학적인 관계와 운동방정식을 나선을 사용하여 유도하였다.

강성행렬과 관련한 몇 가지의 연구 결과들을 간략히 살펴 보면 다음과 같다: 먼저, Griffis<sup>[4]</sup>는

\* 연세대학교 기계전자공학부 기계전공

Tel. 02-2123-2826, Fax. 02-362-2736

Email yjchoi@yonsei.ac.kr

나선이론의 연구와 그 응용에 관심을 갖고 있다.

이러한 3 차원 공간에서의 강성행렬을 유도하고 이를 이용한 수동형 손목기구로서 로봇의 힘/위치 동시제어를 시도하였다. Lipkin 과 Patterson<sup>[5]</sup>은 고유벡터를 사용하는 접근방법을 통하여 탄성적으로 지지된 단일 강체의 강성행렬이 갖는 기하적 특성을 연구하였으며, 단병주와 최용제<sup>[7]</sup>는 평면상에서 탄성체로 지지된 단일 강체의 진동 모우드의 기하적 해석, 그리고 공간상에서 강성의 대칭면 조건과 그의 응용<sup>[8]</sup>을 연구하였다.

## 2. 강성행렬

### 2.1 일반적인 강성행렬

병렬형 기구에 대한 강성행렬의 설명을 위하여 Fig. 1 과 같은 병렬기구를 생각하도록 한다. 앞서 언급한 바와 같이 이동 플랫폼은 단일 강체로 가정하고, 각각의 다리를 스프링 상수가  $k_i$  인 선형 스프링으로 가정한다. 그리고, 각 스프링의 현재 길이를  $l_i$  로, 자유길이(free length)를  $l_{oi}$  로 표현하면, 이와 같은 계의 정역학적인 관계, 즉, 외력  $\hat{w} = [f^T m_o^T]^T$  과 액츄에이터의 힘  $\tau$  의 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{w} = [j]\tau \quad (1)$$

여기서,  $[j]$  는 매니플레이터 자코비안이며,  $[j]$  의 열(column)은, 다리방향 단위벡터를  $s_i$ , 그리고 원점에서  $s_i$  까지의 위치벡터를  $r_i$  라 할 때에, 각 다리의 단위 선속박벡터 (unit line bound vector)  $\hat{s}_i = [s_i^T (r_i \times s_i)^T]^T$  를 나타낸다.

이제, 식 (1)의 전미분을 구하고  $\tau_i = k_i(l_i - l_{oi})$  의 관계를 이용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\delta \hat{w} = [K]\delta \hat{D} \quad (2)$$

여기서,  $\delta \hat{w}$  는 외력의 작은 변화량을, 그리고  $\delta \hat{D}$  는  $\delta \hat{D} = [\delta x^T \delta \theta^T]^T$  로 표현할 수 있으며, 이동 플랫폼의 미소 트위스트(infinitesimal twist)를 나타낸다. 강성행렬  $[K]$  는 평형점 근처에서

만 대칭행렬로 표현할 수 있는  $6 \times 6$  행렬로서 다음과 같다<sup>[4]</sup>.

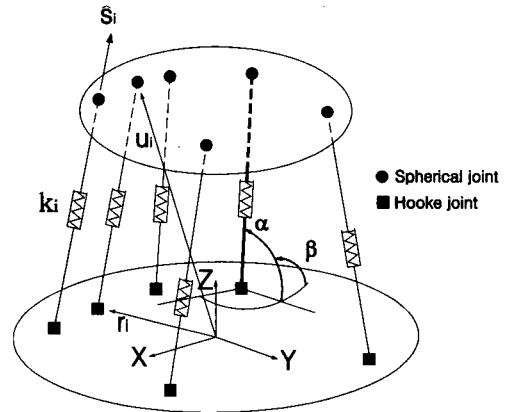


Fig. 1 Fully Parallel Type n-Spring System

$$[K] = [j][k_i][j]^T + [\delta j_\alpha][k_i(1 - \rho_i)][\delta j_\alpha']^T + [\delta j_\beta][k_i(1 - \rho_i)][\delta j_\beta']^T \quad (3)$$

여기서,  $[k_i]$  는 각 다리의 스프링 상수로 표현된 대각행렬이며  $\rho_i = l_{oi}/l_i$  이다.  $6 \times 6$  행렬  $[\delta j_\alpha]$  및  $[\delta j_\beta]$  의 행들은  $s_i$  를 각각  $\alpha$  와  $\beta$  에 대하여 편미분하여 얻은 것이며,  $[\delta j_\alpha']$  과  $[\delta j_\beta']$  은 행렬  $[\delta j_\alpha]$  및  $[\delta j_\beta]$  의 위치벡터  $r_i$  를  $u_i$  로 대체한 것이다(Fig. 1 참조).

만약, 스프링의 변위가 미소하여  $\rho_i = 1$  에 매우 가까운 값을 갖는다면 강성행렬  $[K]$  는 대칭행렬로 간주될 수 있을 것이다. 그러나, 이러한 조건을 만족하는  $\rho_i$  값의 범위에 대해서는 알려진 바가 없다.

이제, 식 (2)는 스프링으로 지지 되어 있는 병렬형 기구의 이동 플랫폼에 외력  $\delta \hat{w}$  가 가해질 때에 그 이동 플랫폼은  $\delta \hat{D}$ , 즉, 일정한 축을 따라 나타나는 병진 변위와, 그 축에 대하여 일정한 피치(pitch)를 갖는 회전 변위를 동시에 나타내는 나선변위(screw displacement)를 갖게 된다는 것을 설명하고 있다. 일반적으로는,  $\delta \hat{w}$  로 표현되는 힘의 작용 나선과  $\delta \hat{D}$  로 표현되는 변위의 나선은 일치하지 않는다.

이러한 병렬형 기구의 정역학적 관계에 대한 보다 심도 있는 연구는 참고문헌 [5, 6]에서 찾아 볼 수 있다. 식 (2)에 대한 연구로부터는 이 기구의 강성 설계에 관련한 보다 실제적인 정보를 기대할 수 있을 것이다.

### 2.2 강성행렬의 대각화

여기서는 먼저, 평면 병렬형 기구를 생각해 보기로 한다. 앞서와 마찬가지로, 각각의 다리는 선형 스프링으로 구성되어 있다고 보고, 나아가, 식 (3)으로부터, 각 스프링의 변위  $p_i = 1$  인 조건을 근사적으로 만족한다고 가정한다. 이제 이러한 평면 병렬형 기구에 대한  $3 \times 3$  강성행렬  $[K]$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[K] = [j][k_i][j]^T \quad (4)$$

여기서, 자코비안  $[j]$ 의 열을 구성하는 각각의 벡터는  $\hat{s}_i = [\cos\theta_i \quad \sin\theta_i \quad p_i]^T$ 로 표현되는데, 이 때에,  $\theta_i$ 는 각 직선의  $X$ -축에 대한 각을, 그리고  $p_i$ 는 원점으로부터 그 직선까지의 거리를 표현한다.

이제, 식 (4)로부터 강성행렬  $[K]$ 가 대칭행렬임은 명백하다.  $XY$  좌표계에서 표현된 강성행렬  $[K]$ 를 새로운  $X'Y'$  좌표계에서의 강성행렬  $[K']$ 으로 변환하기 위하여는 다음의 관계식을 사용한다.

$$[K'] = [E]^T [K] [E], \quad (5)$$

여기서, 변환  $[E]$ , 는

$$[E]_v = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & v_y \\ \sin\phi & \cos\phi & -v_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

으로 표현되며, 벡터  $\mathbf{v} = [v_x \quad v_y]^T$ 는 원래 좌표계에 대한 새로운 좌표계의 병진이동을 그리고  $\phi$ 는 회전각을 나타낸다. 이러한 강성행렬과 그 변환식의 유도는 독특한 것이며, 이들은 단일 강체의 진동현상을 기하적인 측면에서 연구함에 있어 매우 긴요히 사용된다.

이제, 이 강성행렬에 대한 한가지 흥미로운 관찰은 강성행렬의 대각화(diagonalization)에 관한 것이다. 우리는, 만약, 이 강성행렬이 항상 대각화가 가능한 행렬이라면 이를 매우 유용하게 활용할 수 있으리라는 것을 알고 있다. 우선적으로, 평면에서의 강성행렬에 대하여는 이를 비교적 쉽게 판정해 볼 수 있다. 즉, 식 (5)에서  $[K']$ 을 대각행렬로 놓고, 우변의 식에 식 (6)을 대입하여 전개한 후에 좌우변을 비교하면, 이 경우에 대해서는 항상 대각화가 가능하다는 사실을 입증할 수 있다.

이와 같이하여 강성행렬  $[K]$ 의 대각화를 가능하게 하는  $\mathbf{v} = [v_x \quad v_y]^T$ 와  $\phi$ 를 사용하여 얻을 수 있는 새로운  $X'Y'$  좌표계를 강성 주축(principal axes of stiffness)이라 부른다. 바꾸어 말하면, 이 병렬기구의 표현을 위한 좌표축을 강성 주축에 일치시켜 놓으면, 이 때에는, 이동 플랫폼에 가하는 외력의 방향과 같은 방향으로의 변위가 발생한다는 것을 의미하며, 따라서 이러한 경우의 기구의 정강성은 간단히 정의될 수 있을 것이다.

그러나, 공간상에서의 강성행렬  $[K]$ 의 경우에는, 식 (5)와 같은 변환에 의하여 대각화될 수 없다는 사실이 알려져 있다<sup>[9]</sup>. 이러한 사실은 비록 식 (2)의 강성행렬  $[K]$ 를 대칭행렬로 가정한다고 하더라도, 이와 같이 간편화한 식을 통한 병렬기구의 강성에 대한 이해를 어렵게 하는 근본적 원인이 되고 있다.

## 3. 강성행렬의 응용

### 3.1 수동형 손목기구

Duffy<sup>[11]</sup>는 로봇의 손목에, 평면 병렬기구의 형태를 갖으며 선형 스프링으로 구성된 수동형 손목기구를 장착하여, 로봇의 힘/위치 동시제어를 수행할 수 있다는 이론을 소개하였다. 그 이론적인 배경을 간단히 살펴 보면 다음과 같다: 일반적인 로봇의 작업은 구속 렌치  $\delta\hat{\mathbf{w}}_a = [\delta\mathbf{f}_a^T \quad \delta\mathbf{m}_a^T]^T$ 와 자유 트위스트  $\delta\hat{\mathbf{D}}_b = [\delta\mathbf{x}_b^T \quad \delta\theta_b^T]^T$ 로 표현할 수 있다. 먼저, 수동형 손목 기구의 이동 플랫폼에 부착되어 있는 작업물(workpiece)의 운동이 Fig. 2에서 보는 바와 같이 구속되어 있다고 가정한다. 요구되는 작업에 필요한 작업물에서의 렌치(wrench)는, 로봇을 조정함으로써 발생하는 손목기구 고정 플

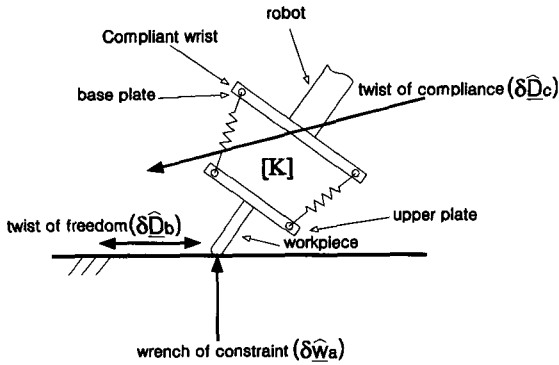


Fig. 2 Compliant Wrist and Twist of Compliance

랫폼(base plate)을 움직임으로서 조정할 수 있다. 만약, 식 (3)으로 주어진 이 기구의 강성행렬  $[K]$  를 알고 있다고 하면, 순응 트위스트  $\delta \hat{D}_c$  (twist of compliance)로 표현된 고정 플랫폼의 운동은 다음의 식으로 계산할 수 있다.

$$\delta \hat{D}_c = -[K]^{-1} \delta \hat{w}_a \quad (7)$$

이 식의 사용에 있어서 한가지 주목해야 할 점은 강성행렬  $[K]$ 는 대칭행렬이 아니라는 점이다. 이제, 여기서  $\delta \hat{D}_b^T [K] \delta \hat{D}_c = 0$ 로 주어지는 역관계(reciprocal relation)로부터 고정 플랫폼의 운동을 다음의 식과 같이 분해(decomposition)한다는 것이다.

$$\delta \hat{D}_g = G_b \delta \hat{D}_b + G_c \delta \hat{D}_c \quad (8)$$

여기서,  $G_b$  및  $G_c$ 는 각각 위치 및 힘의 오차에 대한 이득값들을 나타낸다. 보다 상세한 내용과 예제는 참고문헌 [1]에서 찾아 볼 수 있다.

최성원 등<sup>[10]</sup>과 왕희일<sup>[11]</sup>(Fig. 3 참조)은 평면 수동형 손목기구의 기본적인 개념을 그대로 활용하되 이를 공간 병렬기구로 확장하여, 공간상에서 힘과 모우멘트의 측정과 함께 이를 힘/위치 동시 제어에 사용할 수 있는 기구의 설계와 실험에 대한 연구결과를 소개한 바 있다.

### 3.2 단일 강체의 진동해석

먼저, Fig. 1에서와 같이, 한 개의 강체가 공간상에서 다리 대신 다수의 선형 스프링에 의하여 지지 되어 있다고 하고, 식 (3)과 같이

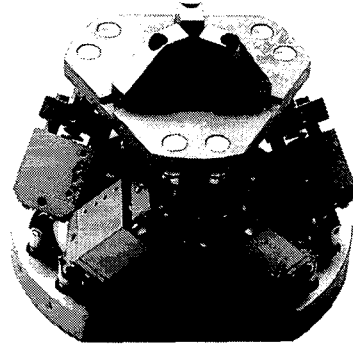


Fig. 3 Compliant Wrist with Force/Moment Sensing Capability

유도된 강성 행렬은 각 스프링의 변위가 미소하여 이를 대칭행렬로 간주할 수 있다고 가정한다. 만약,  $\hat{s}_f$ 로 표현되는 직선을 따라 강체에 가해지는 외력을

$$\mathbf{w} = f \hat{s}_f e^{j\Omega t} \quad (9)$$

로 표현할 수 있다고 하면, 원점을  $O$ 로 하는 임의의 좌표계에 대한 이 단일 강체의 운동 방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[M]_o \ddot{\mathbf{X}}_o + [K]_o \mathbf{X}_o = \mathbf{w} \quad (10)$$

여기서,  $[M]_o$  및  $[K]_o$ 는 각각  $6 \times 6$  관성행렬과 강성행렬을 나타내며, 일반적 변위를 나타내는 미소 트위스트는

$$\mathbf{X}_o = \hat{\mathbf{X}} e^{j\Omega t} \quad (11)$$

로 나타낼 수 있다. 만약, 이러한 계에 대하여 감쇠요소를 고려해야 하는 경우라면, 운동방정식은 다음과 같은 형태로 구하여 질 것이다.

$$[M]_o \ddot{\mathbf{X}}_o + [C]_o \dot{\mathbf{X}}_o + [K]_o \mathbf{X}_o = \mathbf{w} \quad (12)$$

식 (12)는, 정역학 관계를 나타내는 식 (2)와 마찬가지로, 반복적으로 가해지는 외력에 대하여 강체는 특정한 나선 축에 대한 나선변위를 반복적으로 발생하게 된다는 사실을 설명한다. 바꾸어 말하면,

식 (12)는, 실제적인 강체의 진동현상은, 각 좌표축 방향으로의 병진과 각 축에 대한 회전 모우드로 표현되기 보다는, 특정 나선 축에 대한 반복적인 미소한 나선 변위로서 진동하게 될 것임을 나타내고 있다.

이제, 만약, 식 (12)의 감쇄행렬  $[C]_0$  를 모우드 행렬(modal matrix)에 의하여 대각화 될 수 있다고 하면, 모우드 해석 방법(modal analysis)으로부터 간편한 해를 얻을 수 있을 것이다. 즉, 감쇄행렬  $[C]_0$  가  $[M]_0$  및  $[K]_0$  에 비례하는 소위 비례감쇄(proportional damping)의 형태로 표현될 수 있다고 가정하면 그 주파수응답은 다음과 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$\frac{\hat{\mathbf{x}}}{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\mathbf{x}}_i^T \hat{\mathbf{s}}_f}{k_i + j\Omega c_i - \Omega^2 m_i} \hat{\mathbf{x}}_i \quad (13)$$

여기서,  $\hat{\mathbf{x}}_i$  는 고유벡터(normalized eigenvector)를 나타내며,  $\hat{\mathbf{x}}_i$  를 열 벡터로 하여 모우드 행렬  $[S]$  를 구성하였다고 할 경우에,  $k_i$ ,  $c_i$  및  $m_i$  는 각각 대각화된  $[S]^T [K]_0 [S]$ ,  $[S]^T [C]_0 [S]$ , 및  $[S]^T [M]_0 [S]$  행렬들의  $i$ -번째 대각값들을 나타낸다.

식 (13)을 살펴보면, 주어진 가진력에 대한 주파수 응답은 분자항인  $\hat{\mathbf{x}}_i^T \hat{\mathbf{s}}_f \hat{\mathbf{x}}_i$  에 의하여 좌우됨을 알 수 있다. 여기서,  $\hat{\mathbf{x}}_i^T \hat{\mathbf{s}}_f$  는 스칼라량으로서 가진력  $\hat{\mathbf{s}}_f$  와  $i$ -번째 진동 모우드  $\hat{\mathbf{x}}_i$  사이의 역곱(reciprocal product)을 나타내고 있다. 진동 모우드를 나타내는  $\hat{\mathbf{x}}_i$  는 일반적으로는 나선으로 주어질 것이며, 계의 강성이 대칭면을 갖을 수 있는 조건<sup>8)</sup>을 만족하는 특별한 경우에는 대칭면에 수직인 직선과 그 위에 놓인 직선들을 나타내게 된다. 따라서 계가 갖고 있는 여러 설계 변수들의 적절한 조절에 의하여 역곱  $\hat{\mathbf{x}}_i^T \hat{\mathbf{s}}_f$  의 크기와  $\hat{\mathbf{x}}_i$  을 변화시킬 수 있다면 결과적으로 원하는 주파수 응답을 기대할 수 있을 것이다.

#### 4. 결론

병렬형 기구의 강성행렬과 관련한 정역학적,

동역학적인 관계를 간략히 살펴 보았다. 최근에 이르기까지 오랜 기간에 걸쳐 병렬형 기구가 많은 연구의 대상이 되어 온 사실에 비추어 보면, 이 기구의 강성에 대한 연구결과는 상대적으로 매우 미흡한 정도라 할 수 있을 것이다.

병렬형 기구의 강성에 대한 보다 심도 있는 연구로부터 이 기구의 정역학적, 동역학적 특성에 대한 이해는 물론, 보다 효율적인 설계기술의 획득과 성능평가를 위한 표준화한 기술적 방법의 정립을 기대할 수 있을 것이다.

#### 참고문헌

1. Duffy, J., Statics and Kinematics with Applications to Robotics, Cambridge University Press, 1996.
2. Ball, R. S., A Treatise on the Theory of Screws, Cambridge University Press, 1900.
3. Dimentberg, F. M., The Screw Calculus and Its Applications in Mechanics, U.S Department of Commerce, FTD-HT-23-1632-67, 1968.
4. Griffis, M., Duffy, J., "Kinestatic Control: A Novel Theory for Simultaneously Regulating Force and Displacement," Journal of Mechanical Design Vol.113, pp. 508~515, 1991
5. Lipkin, H., Patterson, T., "Geometrical Properties of Modeled Robot Elasticity: Part I -Decomposition," ASME 1992 Design Technical Conference, Scottsdale, DE-vol. 45 179~185, 1992.
6. Lipkin, H., Patterson, T., "Geometrical Properties of Modeled Robot Elasticity: Part II -Center of Elasticity," ASME 1992 Design Technical Conference, Scottsdale, DE-vol. 45 187~193, 1992.
7. Dan, B. J., Choi, Y. J., "Study on the Geometrical Characteristics in the Natural Modes of Vibrations of a Swing-Arm," Journal of Information Storage and Processing Systems, Vol. 1, pp. 339-349, 1999.
8. Dan, B. J., Choi, Y. J., "The Geometric Mode and Frequency Analyses of a Vibration System with Planes of Symmetry," Journal of Sound and Vibration, Vol. 241, No. 5, pp. 779-795, 2001.
9. Loncaric, J., Geometrical Analysis of Compliant Mechanisms in Robotics, Ph.D. Thesis Harvard University, 1985.
10. Choi, S. W., Choi, Y. J., Kim, S., "Using a Compliant

Wrist for a Teleoperated Robot," International Conference on Intelligent Robots and systems, Kyongju, Korea, 17-21 October, 1999.

11. 왕희일, 6 자유도 순응기구의 지수형 계인함수에 의한 위치/힘 동시제어, 연세대학교 기계공학과 석사학위논문, 1999.