

불규칙 지반 가진력을 받는 탄성진자계의 비선형진동응답

조덕상*

Nonlinear Vibration Responses of a Spring-Pendulum System under Random Base Excitation

Duk Sang Cho*

ABSTRACT

An investigation into the response statistics of a spring-pendulum system whose base oscillates randomly along vertical and horizontal line is made. The spring-pendulum system with internal resonance examined is known to be a good model for a variety of engineering systems, including ship motions with nonlinear coupling between pitching and rolling motions. The Fokker-Planck equation is used to generate a general first-order differential equation in the dynamic moment of response coordinates. By means of the Gaussian closure scheme the dynamic moment equations for the random responses of the system are reduced to a system of autonomous ordinary differential equations. In view of equilibrium solutions of this system and their stability, the response statistics is examined. It is seen that increase in horizontal excitation level leads to a decreased width of the internal resonance region.

Key Words : Internal resonance(내부공진), Spring-pendulum system(탄성진자계), Random base excitation(불규칙 지반 가진), white noise(백색잡음), Gaussian closure scheme(가우스 절사법)

1. 서론

기존의 선형해석으로는 어떤 구조물의 동적거동을 충분히 설명할 수 없을 만큼 복잡한 특성을 경험할 수 있다. 이러한 복잡한 응답특성은 그 계가 가지고 있는 고유의 비선형성에서 기인된다. 비선형 다자유도계의 경우 내부공진(internal resonance)은 정규모드들의 고유진동수 (ω_i) 사이에 $\sum \lambda_i \omega_i = 0$, ($\lambda_i = \text{정수}$)의 관계가 존재할 때 발생할 수 있으며, 이로 인하여 관련된 모드들 사이에서 모드상호작용(modal interaction)이 일어난다. 불규칙가진력을 받는 비선형계의 경우, 동역학계의

응답 및 안정성연구에는 확률과정(random process)과 확률미분방정식(stochastic differential equation)에 관한 수학적 이론을 필요로 할뿐만 아니라, 이 이론을 직접 공학문제에 적용하는 데는 많은 어려움이 따르고 있다. 그 이유는 어떤 계를 해석하기 위해 적용하는 방법이 다르면 해석결과도 판이하게 달라질 수 있기 때문이다. 이러한 어려움에도 불구하고 불규칙가진력을 받는 비선형 다자유도계의 응답특성에 미치는 내부공진효과에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다⁽¹⁻⁹⁾. Ibrahim과 Roberts⁽⁵⁾는 동흡진기 모델의 연구에서 감쇠비가 증가함에 따라 안정영역이 축소될 수도 있음(destabilizing

* 영남대학교 공업기술연구소

effect)을 발견하였다. 나중에 Lee와 Cho⁽⁶⁾는 감쇠비가 증가함에 따라 안정영역이 축소될 수도 있다는 Ibrahim과 Roberts⁽¹¹⁾의 연구가 정규화조건에 기인한 착오임을 밝혔다. 이원경·조덕상^(7,8)은 스프링 끝에 매달려 있는 질량에 스프링방향으로 광대역 불규칙가진력이 작용하는 탄성진자계의 내부공진 효과에서 확정적 비선형계에 존재하였던 포화현상은 비확정적 비선형계에서는 발견할 수 없었음을 밝혔고, 분기점을 예측하는데 있어서 가우스 절사법(Gaussian closure scheme)에 의한 결과와 Monte Carlo 시뮬레이션 결과가 잘 일치함을 확인하였다.

본 연구의 목적은 탄성진자계의 지반에 수직 및 수평방향의 광대역 불규칙가진력을 받는 경우에 내부공진효과로 인한 비선형현상을 조사하는 것이다. 탄성진자계의 운동방정식으로부터 유도된 Fokker-Planck 방정식으로부터 모멘트방정식을 얻은 후 가우스 절사법을 이용하여 14개의 자율상미분방정식을 구하고 이 방정식을 수치적분 함으로써 응답의 통계적 특성을 조사하고, 이 방정식의 평형해와 그 안정성을 조사하였다.

2. 운동방정식

수직 및 수평방향으로 광대역 불규칙 지반 가진을 받는 탄성진자계가 Fig. 1에 나타나 있다. 선형 점성감쇠력 $c_1 dx^*/dt^*$ 와 $c_2 d\theta/dt^*$ 가 각각 스프링 운동과 진자운동에 존재한다고 고려하면, 평면운동으로 구속되어 있는 이 계의 운동방정식은 다음과 같이 Lagrange의 방정식으로부터 유도할 수 있다.

$$M\ddot{x}^* + c_1 \dot{x}^* + kx^* - M(l+x^*)\dot{\theta}^2 + Mg(1 - \cos \theta) - M\dot{y}(t^*) \cos \theta - M\dot{z}(t^*) \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$M(l+x^*)^2 \ddot{\theta} + c_2 \dot{\theta} + 2M(l+x^*)\dot{x}^* \dot{\theta} + Mg(l+x^*) \sin \theta - M(l+x^*)\dot{z}(t^*) \cos \theta + M(l+x^*)\dot{y}(t^*) \sin \theta = 0 \quad (2)$$

여기서 x^* 와 θ 는 각각 스프링운동과 진자운동이며 $y(t^*)$ 은 수직방향의 지반 변위 그리고 $z(t^*)$ 은 수평방향의 지반 변위를 나타낸다. 다음과 같은 표현을 이용하여

$$x = \frac{x^*}{l}, \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{2M\omega_1}, \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2Ml^2\omega_2}, \quad (3)$$

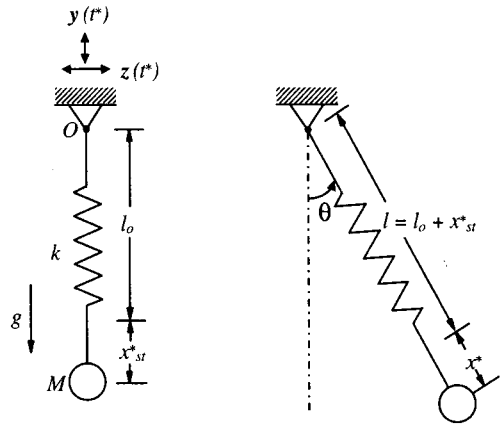


Fig. 1 A randomly excited spring-pendulum system

$$t = \omega_1 t^*, \quad r = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{M}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l},$$

$$W_y(t) = \frac{\dot{y}(t/\omega_1)}{l\omega_1^2}, \quad W_z(t) = \frac{\dot{z}(t/\omega_1)}{l\omega_1^2},$$

식 (1)과 (2)를 무차원화하면 다음을 얻는다.

$$x'' + 2\zeta_1 x' + x - (1+x)\theta'^2 + r^2(1 - \cos \theta) - W_y(t) \cos \theta - W_z(t) \sin \theta = 0, \quad (4)$$

$$(1+x)^2 \theta'' + 2\zeta_2 r \theta' + 2(1+x)x' \theta' + r^2(1+x) \sin \theta + (1+x)[W_y(t) \sin \theta - W_z(t) \cos \theta] = 0 \quad (5)$$

위의 식들에서 $\dot{}$ 과 $\dot{}$ 은 각각 t^* 와 t 에 대한 미분을 나타낸다. 근사해석을 위하여 이 계가 약비선형계라고 가정하기로 한다. 즉 식 (4)와 (5)에서 비선형 관성항을 제거하고 4차이상의 비선형항을 무시하면 다음을 얻는다.

$$x'' + 2\zeta_1 x' + x + \frac{r^2}{2} \theta^2 - (1+x)\theta'^2 - (1 - \frac{\theta^2}{2})W_y(t) - \theta W_z(t) = 0, \quad (6)$$

$$\theta'' + 2\zeta_2 r \theta' + r^2 \theta - r^2 x \theta - 4\zeta_2 r x \theta' + 2x' \theta' - \frac{1}{6} r^2 \theta^3 + r^2 x^2 \theta + 6\zeta_2 r x \theta' - 2x x' \theta' + (1-x)\theta W_y(t) - (1-x+x^2 - \frac{1}{2} \theta^2)W_z(t) = 0. \quad (7)$$

3. Fokker-Planck 방정식

불규칙과정 $W_y(t)$ 와 $W_z(t)$ 는 자기상관함수 (autocorrelation function)가 다음과 같이 표시되고 평균이 0인 비상관(uncorrelated) 백색잡음(white noise)으로 가정한다.

$$R_{W_y W_y}(\Delta t) = E[W_y(t)W_y(t+\Delta t)] = 2D_y \delta(\Delta t) \quad (8)$$

$$R_{W_z W_z}(\Delta t) = E[W_z(t)W_z(t+\Delta t)] = 2D_z \delta(\Delta t)$$

여기서 $2D_y$ 와 $2D_z$ 는 진동수를 $f(=\omega/2\pi)$ 로 표현할 때의 스펙트럼밀도이고 $\delta(\Delta t)$ 는 Dirac delta 함수이다. 이때 계의 응답과정은 다음과 같은 좌표변환을 이용하여

$$\{x, \theta, x', \theta'\}^T = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}^T = \mathbf{X}$$

Markov 벡터로 전환할 수 있으며, 또한 불규칙과정 $W_y(t)$, $W_z(t)$ 를 브라운과정(Brownian process)의 도함수(formal derivative), 즉 $W_y(t) = dB_y/dt$ 와 $W_z(t) = dB_z/dt$ 로 나타내면 식 (6)과 (7)은 다음과 같은 Ito방정식으로 표시된다.

$$dX_1 = X_3 dt, \quad dX_2 = X_4 dt, \quad (9)$$

$$dX_3 = (-2\xi_1 X_3 - X_1 - \frac{r^2}{2} X_2^2 + X_4^2 + X_1 X_4^2) dt + (1 - \frac{X_2^2}{2}) dB_y + X_2 dB_z,$$

$$dX_4 = (-2\xi_2 r X_4 - r^2 X_2 + r^2 X_1 X_2 + 4\xi_2 r X_1 X_4 - 2X_3 X_4 + \frac{1}{6} r^2 X_2^3 - r^2 X_1^2 X_2 - 6\xi_2 r X_1^2 X_4 + 2X_1 X_3 X_4) dt - (1 - X_1) X_2 dB_y + (1 - X_1 - \frac{X_2^2}{2} + X_1^2) dB_z$$

이 Markov 벡터에 대한 응답의 확률밀도함수는 다음과 같이 Fokker-Planck 방정식으로 표시된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) = - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_j} [a_j(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)] \quad (10)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} [b_{jk}(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)]$$

여기서 $p(\mathbf{x}, t)$ 는 결합확률밀도함수(joint probability density function) 이고 $a_j(\mathbf{x}, t)$ 와 $b_{jk}(\mathbf{x}, t)$ 는 각각 Markov 과정 $\mathbf{X}(t)$ 의 1차 및 2차 증가모멘트(incremental moment)이다. 이러한 증가모멘트는 다음과 같이 정의된다⁽¹¹⁾.

$$a_j(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} E\{X_j(t+\delta t) - X_j(t) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}\} \quad (11)$$

$$b_{jk}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} E\{[X_j(t+\delta t) - X_j(t)] \times [X_k(t+\delta t) - X_k(t)] \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}\} \quad (12)$$

4. 가우스 절사법

Fokker-Planck 방정식 (10)으로부터 완전해 $p(\mathbf{x}, t)$ 를 구하는 것은 불가능하지만^(10,11), 임의의 차수 $n(=\alpha+\beta+\gamma+\eta)$ 에 대한 $p(\mathbf{x}, t)$ 의 모멘트 방정식은 식 (10)에 $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta$ 를 곱하고 전 상태공간 $(-\infty < x_i < \infty)$ 에 대해서 적분함으로써 얻을 수 있다. 다음과 같은 표현

$$m_{\alpha, \beta, \gamma, \eta}(t) = E[X_1^\alpha X_2^\beta X_3^\gamma X_4^\eta] = \iiint \int_{-\infty}^{\infty} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta p(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

을 사용하면 n 차에 대한 모멘트방정식은 다음과 같다.

$$m'_{\alpha, \beta, \gamma, \eta} = \alpha m_{\alpha-1, \beta, \gamma+1, \eta} + \beta m_{\alpha, \beta-1, \gamma, \eta+1} - \gamma m_{\alpha+1, \beta, \gamma-1, \eta} - 2\gamma \xi_1 m_{\alpha, \beta, \gamma, \eta} - \eta r^2 m_{\alpha, \beta+1, \gamma, \eta-1} - 2\eta \xi_2 r m_{\alpha, \beta, \gamma, \eta} + \gamma m_{\alpha, \beta, \gamma-1, \eta+2} - \frac{1}{2} \gamma r^2 m_{\alpha, \beta+2, \gamma-1, \eta} - 2\eta m_{\alpha, \beta, \gamma+1, \eta} + \eta r^2 m_{\alpha+1, \beta+1, \gamma, \eta-1} + 4\eta \xi_2 r m_{\alpha+1, \beta, \gamma, \eta} + \gamma m_{\alpha+1, \beta, \gamma-1, \eta+2} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\eta m_{a+1, \beta, \gamma+1, \eta} - \eta \gamma^2 m_{a+2, \beta+1, \gamma, \eta-1} \\
 &+ \frac{1}{6} \eta \gamma^2 m_{a, \beta+3, \gamma, \eta-1} - 6\eta \zeta_2 r m_{a+2, \beta, \gamma, \eta} \\
 &+ (D_y - D_z) \gamma m_{a, \beta+2, \gamma-2, \eta} \\
 &- (D_y - D_z) \gamma^2 m_{a, \beta+2, \gamma-2, \eta} \\
 &+ 3D_z \eta (\eta - 1) m_{a+2, \beta, \gamma, \eta-2} \\
 &- (D_y - D_z) \eta m_{a, \beta+2, \gamma, \eta-2} \\
 &+ (D_y - D_z) \eta^2 m_{a, \beta+2, \gamma, \eta-2} \\
 &+ 2(D_y - D_z) \gamma \eta m_{a+1, \beta+1, \gamma-1, \eta-1} \\
 &- 2(D_y - D_z) \gamma \eta m_{a, \beta+1, \gamma-1, \eta-1} \\
 &- 2D_z \eta (\eta - 1) m_{a+1, \beta, \gamma, \eta-2} \\
 &+ D_y \gamma (\gamma - 1) m_{a, \beta, \gamma-2, \eta} \\
 &+ D_z \eta (\eta - 1) m_{a, \beta, \gamma, \eta-2}
 \end{aligned}$$

방정식 (13)은 연성된 모멘트방정식이 무한 조(infinite set)로 구성되어 있다. 따라서 확률적 응답 특성을 구하기 위하여 이 계를 약비선형계라고 가정할 경우 계의 응답의 확률밀도함수는 가우스분포로 근사할 수 있다. 따라서 모멘트와 cumulant 관계식에서 3차 및 4차 cumulant를 0으로 놓음으로써 3차 및 4차 모멘트들은 1차 또는 2차 모멘트로 표시할 수 있다.^(10,12) 이 경우 식(13)은 $n=1, 2$ 에 대해서 미분방정식을 전개할 수 있다. 따라서 14개의 모멘트(4개의 1차 모멘트와 10개의 2차 모멘트) 미분방정식을 얻을 수 있다.

가우스 절사법으로 얻어진 14개의 자율 상미분방정식(autonomous ordinary differential equations)으로 구성된 계를 다음과 같이 나타낸다.

$$m' = f(m), \quad m \in \mathbb{R}^{14} \quad (14)$$

여기서 $m = \{m_{1.0.0.0}, m_{0.1.0.0}, \dots, m_{0.0.1.1}\}^T$ 는 모멘트 벡터이며 $f(m) = \{f_1(m), f_2(m), \dots, f_{14}(m)\}^T$ 는 이 계의 벡터장(vector field)이다.

우선 계 (14)의 평형해 m_0 는 다음의 식

$$f(m_0) = 0 \quad (15)$$

으로부터 구해지며 이 평형해의 안정성을 판별하기 위하여 $m = m_0 + \delta m$ 으로 두고 평형해의 작은 교란 δm 에 대한 미분방정식으로 바꿔 쓴 후 δm 의 비선형항을 무시하면 다음과 같은 선형 상미분방정식을 얻는다.

$$\delta m' = \frac{\partial f}{\partial m} \Big|_{m=m_0} \delta m \quad (16)$$

이 Jacobian 행렬의 모든 고유치의 실수부가 음이면 그 평형해 m_0 는 점근적으로 안정하다고 판단된다. 이 평형해는 스프링모드와 진자모드가 내부공진영역을 벗어날 때의 값이다. 이 평형해가 안정성을 잃을 경우는 두 모드가 내부공진영역에 있는 때이다.

5. 수치결과

수치예를 위하여 우선 대수방정식 (15)를 수치적으로 풀어서 평형해를 얻은 후, 이 평형해의 안정성을 판별하였으며, 이 평형해가 안정성을 잃는 경우에는 상미분방정식 (14)를 수치적으로 적분함으로써 모멘트들의 거동을 조사하였다.

Fig. 2는 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$ 일 때 수직가진력만 작용하는 경우와 수평가진력만 작용하는 경우에 진동수비 $r = \omega_2/\omega_1$ 에 따라 정상상태에서의 운동의 제곱평균값을 보여주고 있다. Fig. 2(a)는 스펙트럼밀도가 $2D_y = 0.0001, 2D_y = 0$ 인 경우인데 이 그림에서 내부공진영역 ($r \approx 0.5$)을 벗어나 있는 두 수평선은 각각 스프링운동과 진자운동의 제곱평균값이 r 뿐만 아니라 t 에 무관하므로 운동이 정상과정(stationary process)임을 말해 주고 있다. 정상가진(stationary excitation)에 의한 응답이 정상과정임을 보여 주고 있으므로 선형계의 응답특성과 일치한다. 이 사실은 비록 두 운동이 비선형항으로 연성되어 있다 하더라도 내부공진영역을 벗어나면 이 계는 전혀 연성되어 있지 않은 선형계나 다름이 없음을 보여 주고 있다. 평형해의 안정성해석에 따르면 r_{b1} 과 r_{b2} 에서 Hopf 분기에 의해 이 해가 안정성을 잃는 것으로 확인되었다. 이 그림에서는 두 제곱평균값들의 변동의 상한(upper limit)과 하한(lower limit)을 나타내었다. 이 결과는 스프링운

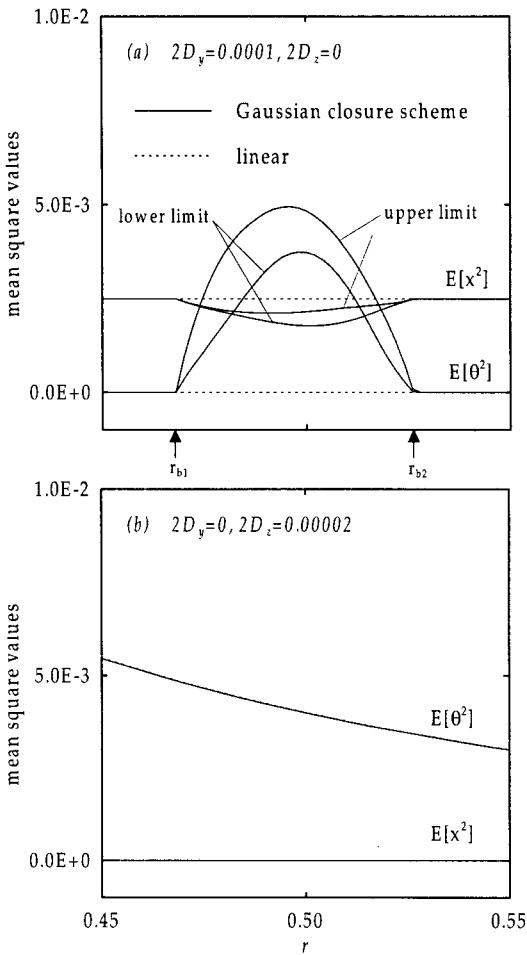


Fig. 2 Limits of mean square values as functions of the frequency ratio ($\zeta_1 = 0.01, \zeta_2 = 0.01$)

동은 안정한 영역에서의 스프링운동보다 작아지는 반면에, 큰 진자운동이 발생하여 내부공진을 통해 직접 가진되는 스프링운동으로부터 직접적으로 가진되지 않는 진자운동으로 에너지가 전달되었음을 보여주고 있다. 시간의 경과에 따라 이 운동의 제곱평균값이 두 한계 사이에서 변동하므로 응답이 비정상과정을 말해주고 있다. 결국 내부공진 조건이 비선형항들의 연성을 강화함으로써, 가진력이 정상과정이라 하더라도 응답이 비정상과정인 비선형계의 전형적인 응답특성을 보여주고 있다. Fig. 2(b)는 스펙트럼밀도가 $2D_y=0, 2D_z=0.00002$ 인 경우인데 이 경우는 선형계의 응답특성과 일치

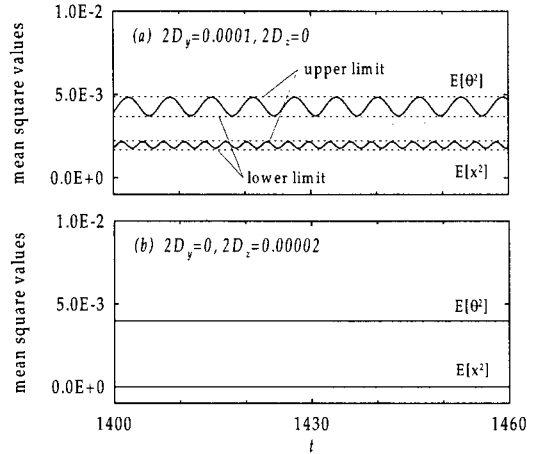


Fig. 3 Time histories of mean square responses $E[x^2]$ and $E[\theta^2]$ ($\zeta_1 = 0.01, \zeta_2 = 0.01, r = 0.50$)

하고 있다.

Fig. 3은 운동의 제곱평균값이 시간이 경과함에 따라 어떻게 변화하는지를 보여 주고 있는데 Fig. 3(a)와 3(b)는 각각 수직가진력만 작용하는 경우와 수평가진력만 작용하는 경우에 해당하는 것이다. Fig. 3(a)는 내부공진효과로 말미암아 이 들이 두 한계 사이를 변동하는 비정상과정이 되었음을 보여 주고 있으며 Fig. 3(b)는 두 제곱평균값이 일정한 정상과정을 보여 주고 있다.

Fig. 4는 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$ 이고 $2D_y = 0.0001$ 일 때 $2D_z$ 의 크기에 따라서 내부공진에 의한 제곱평균응답을 보여주고 있다. 이 그림에서 내부공진 영역에서의 제곱평균응답은 상한과 하한의 평균값을 취하였다. $2D_z = 0.00002$ 인 경우 Fig. 2와 비교하면 선형계에서나 적용 가능한 중첩의 원리가 전혀 적용되지 않는 전형적인 비선형 현상을 보이고 있다. 이 그림은 $2D_z$ 의 크기가 증가함에 따라서 내부공진영역이 줄어들고 있음을 나타내고 있다.

Fig. 5와 Fig. 6은 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$ 일 때 평형해가 안정성을 잃는 경계, 즉 평형해의 분기점을 나타낸다. Fig. 5는 이 분기점을 $r - 2D_y$ 평면에 나타낸 것이며 이 그림은 $2D_z$ 가 증가함에 따라 평형해가 안정성을 잃는 영역, 즉 내부공진영역이 축소됨을 보여주고 있다. Fig. 6은 분기점을 $r - 2D_z$ 평면에 나타낸 것이며 $2D_y$ 가 증가함에 따라서 평형해가

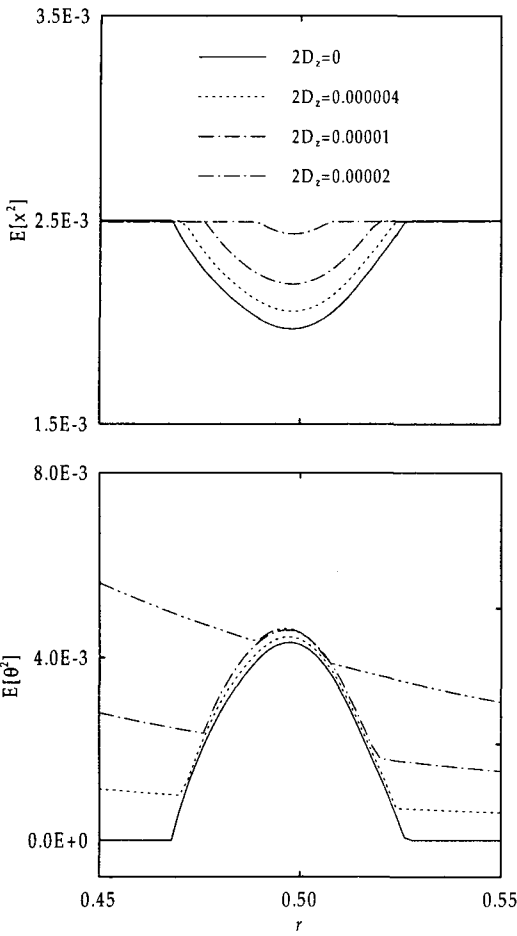


Fig. 4 Influence of Spectral Density $2D_z$ on limits of mean square values ($\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.01$, $2D_y = 0.0001$)

안정성을 잃는 영역이 증가함을 보여주고 있다.

6. 결론

본 연구에서는 많은 공학적계와 상사관계에 있는 탄성진자계가 지반에 수직 및 수평방향으로 광대역 불규칙가진력을 받는 경우에 대하여 내부공진효과로 인한 모드의 분기 및 응답특성을 조사하였다. 해석적 방법으로는 가우스 절사법이 사용되었다. 지반에 수직방향의 불규칙가진력이 가해진 경우에는 $r \approx 0.5$ 근처에서 내부공진에 의한 모드상호작용

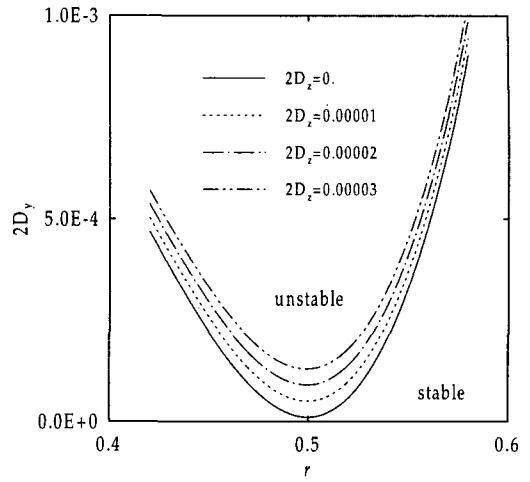


Fig. 5 Stability boundaries on $r-2D_y$ plane ($\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.01$)

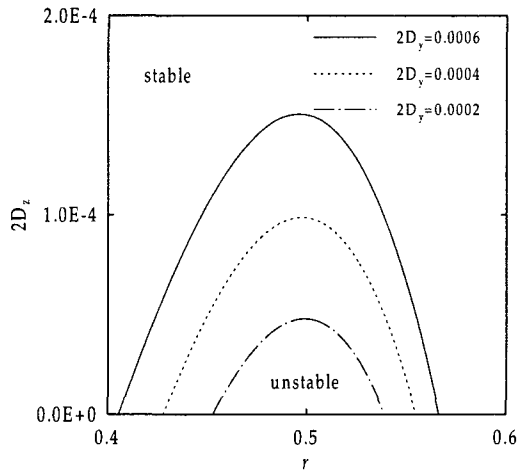


Fig. 6 Stability boundaries on $r-2D_z$ plane ($\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.01$)

이 관찰되었고 수평방향의 불규칙가진력만 가해진 경우에는 내부공진이 발생하지 않았다. 수직 및 수평방향의 불규칙가진력이 동시에 작용된 경우에는 수평방향 불규칙가진력의 크기의 증가가 내부공진 영역을 축소시킴을 확인하였다.

참고문헌

1. Ibrahim, R. A., "Recent results in random vibrations of nonlinear mechanical systems," ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 117, pp. 222~233, 1995.
2. Ibrahim, R. A. and Heo, H., "Autoparametric vibration of coupled beams under random support motion," ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 108, pp. 421~426, 1986.
3. Ibrahim, R. A., "Nonlinear random vibration: experimental results," Applied Mechanics Review, Vol. 44, pp. 423~446, 1991.
4. Roberts, J. W., "Random Excitation of a Vibratory System with Autoparametric Interaction," Journal of Sound and Vibration, Vol. 69(1), pp. 101~116, 1980.
5. Ibrahim, R. A. and Roberts, J. W., "Stochastic Stability of the Stationary Response of a System with Autoparametric Coupling," Zeitschrift für Angewandte Mathematik and Mechanik 57, pp. 643~649, 1977.
6. Lee, W. K. and Cho, D. S., "Damping Effect of a Randomly Excited Autoparametric System," Journal of Sound and Vibration, Vol. 236(1), pp. 23~29, 2000.
7. 이원경, 조덕상, "광대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계의 내부공진효과," 한국소음진동공학회지, 제 8권, 제 3호, pp. 399-407, 1998.
8. 조덕상, 이원경, "내부공진을 가진 탄성진자계의 불규칙 진동응답을 위한 두 해석해의 비교," 한국소음진동공학회지, 제 8권, 제 4호, pp. 715-722, 1998.
9. Cho, D. S. and Lee, W. K., "Modal Interactions of a Randomly Excited Hinged-Clamped Beam," Journal of Sound and Vibration, Vol. 237(3), pp. 377~393, 2000.
10. Ibrahim, R. A., "Parametric random vibration," NewYork: John Wiley, pp. 34~44 and 72~75, 1985.
11. Soong, T. T. and Grigoriu, M., "Random vibration of mechanical and structural systems," Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall International, Inc., pp. 127~130 and 217~218, 1993.
12. Lin, Y. K., "Probabilistic Theory of Structural Dynamics," Robert E. Krieger Publishing Co, pp. 24~30, 1976.