

비선형 전왜재료 내부의 균열에 대한 응력확대계수

범현규*, 정은도**

Stress Intensity Factors for a Crack in a Nonlinear Electrostrictive Material

Hyeon Gyu Beom*, Eun Do Jeong**

ABSTRACT

A crack with electrically impermeable surfaces in an electrostrictive material subjected to uniform electric loading is analysed. The effect of electric yielding on stress intensity factor is investigated by using a small scale yielding model and a strip yield zone model. Complete forms of electric fields and elastic fields are derived by using complex function theory. The electrical yield zone shapes for two models are different each other. The two models, however, predict similar yield zone sizes under the small scale yielding conditions. It is found that the influence of electric yielding on the stress intensity factor is insensitive to the modeling of the electrical yield zone shape.

Key Words : Electrostrictive material(전왜재료), Complex function theory(복소함수이론), Insulating crack(절연균열), Electric yielding(전기적 항복), Small scale yield model(소규모항복모델), Strip yield model(띠항복모델)

1. 서 론

전기장의 제곱에 비례하는 기계적 변형이 생기는 전왜재료는 액추에이터(actuator)와 변환기(transducer) 및 지능형구조물(smart structure)등에 많이 이용되고 있다. 전왜재료에 전기장이 인가되면 개재물(inclusion)이나 내부전극(internal electrode)과 같은 결함 주위에 전기장이 집중된다. 집중된 전기장에 의한 부적합 변형은 응력을 발생시키므로, 개재물이나 내부전극 끝단 주위에 균열이 발생하기 쉽다. 이러한 균열은 전왜재료의 신뢰성을 크게 감소시키므로, 이에 관한 연구가 최근 여러 연구자들에 의해 진행되고 있다.^(1,2,3,4)

선형 전기-기계적 이론을 이용한 해석은 균열선단 근처에서 물리적으로 적합하지 않는 응력특이성을 갖는다.⁽²⁾ 또한 그 결과가 실험과 차이를 보

인다.^(5,6) 그러므로, 비선형 유전이론을 이용한 균열선단의 해석이 필요하다.

전기적 항복영역(electric yielding zone)은 전기장이 인가된 전왜재료의 균열선단에 형성되며 전기장 및 탄성장의 거동에 중요한 역할을 한다. 따라서, 최근 전기적 항복을 고려한 연구가 이루어지고 있다. Gao 등⁽⁵⁾은 Dugdale 모델⁽⁷⁾을 확장한 띠평화모델을 이용하여 압전재료(piezoelectric material) 내부의 전기적 항복을 하는 균열에 대한 에너지 방출률에 관해 연구하였다. Ru⁽⁸⁾도 압전재료 내부의 균열에 대해서 띠평화모델을 이용하여 포화분극이 응력확대계수에 미치는 영향을 연구하였다. 최근에 Beom⁽⁹⁾은 비선형 전왜재료 내부의 균열에 대한 응력특이성에 대하여 연구하였다. 그는 지배적인 균열선단장에서 응력특이성이 $r^{-1/2}$ 이고 그 크기는 응력확대계수로 특성지워짐을 보였다. 또

* 전남대학교 기계공학과

** 전남대학교 기계공학과 대학원

한 그는 소규모비선형조건에서 응력확대계수는 전기장확대계수(electric intensity factor)와 관련이 있다는 것을 보였다.⁽¹⁰⁾ 그러나, 대규모항복(large scale yield)조건에서 전기적 항복의 영향은 아직 연구되지 않았다.

본 연구의 목적은 전기장이 인가되는 전왜재료 내의 전기적으로 절연된 표면(impermeable surface)을 가지는 균열의 문제를 해석하는 것이다. 소규모항복모델과 띠항복모델을 이용하여 전기적 항복이 응력확대계수에 미치는 영향을 연구한다. 두 모델에서의 절연균열에 대한 해를 중첩법에 의해 구한다. 또한, 응력확대계수의 전기적 항복영역 형상에 관한 영향을 조사한다.

2. 문제의 수식화

무한대에서 균일한 전기장 E_2^∞ 를 받는 전왜재료 내에 간격 $(-a, a)$ 로 놓여 있는 균열의 형상을 Fig. 1에 나타내었다. 전왜재료의 외부 경계면에 기계적인 하중은 작용하지 않는다. 균열면에서 트렉션은 없고 전기적으로 절연된다고 가정한다. 여기서 변위와 전기포텐셜의 면내성분은 면내 Cartesian좌표 x_1, x_2 에만 관련된다. 평면변형률 조건에서, 선형 등방성 전왜재료의 구성 방정식은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{1+\nu}{Y} (\sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}) + Q(1+q) D_i D_j \\ &\quad - Qq(1+\nu) D_k D_k \delta_{ij} \\ D_i &= \epsilon E_i \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $\gamma_{ij}, \sigma_{ij}, D_i$ 와 E_i 는 각각 변형률, 응력, 전기변위(electric displacement), 전기장이다. Y 와 ν 는 Young계수와 Poisson비이다. Q 와 q 는 전왜계수, ϵ 은 유전율(permittivity), δ_{ij} 는 Kronecker 델타이다. 한 항에서 로마 하첨자의 반복은 첨자의 범위 1에서 2까지의 합을 나타낸다. 전왜재료에 대한 응력과 전기변위는 다음 식을 만족한다.

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,j} = 0 \quad (2)$$

전기장과 변위의 일반적인 해는 식 (2)를 만족한다. 그리고, 응력과 합력은 해석함수(analytic function)를 이용하여 다음과 같이 표현된다.⁽¹¹⁾

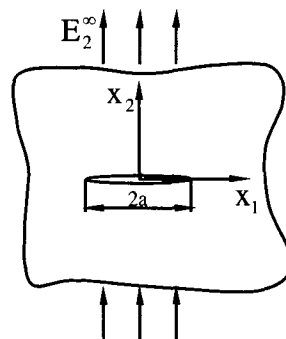


Fig. 1 Crack in an electrostrictive ceramic under electric loading.

$$\begin{aligned} -E_1 + iE_2 &= \Omega'(z) \\ 2G(u_1 + iu_2) &= (3-4\nu)\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ &\quad + S\Omega(z)\overline{\Omega'(z)} + T \int \overline{\Omega'(z)}^2 dz \\ \frac{\sigma_{22} + \sigma_{11}}{2} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - S\Omega'(z)\overline{\Omega'(z)} \\ \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} + i\sigma_{12} &= \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) - S\Omega''(z)\overline{\Omega(z)} \\ F_1 + iF_2 &= -i[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} - S\Omega(z)\overline{\Omega'(z)}] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $z = x_1 + ix_2$ 이고 $(\bar{\cdot})$ 은 편각에 대한 미분을 의미한다. u_i 는 변위, F_j ($j=1,2$) 는 재료에 작용하는 합력(resultant force)의 성분이다. $\Omega(z), \varphi(z), \psi(z)$ 는 해석함수이고 상첨자($\bar{\cdot}$)는 공액복소수를 의미한다. 상수 G, S, T 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G &= \frac{Y}{2(1+\nu)}, \quad S = \frac{1-(1+2\nu)q}{4} \frac{Y}{1-\nu^2} \epsilon^2 Q, \\ T &= \frac{1+q}{2(1+\nu)} Y \epsilon^2 Q \end{aligned} \quad (4)$$

그러므로, 전왜재료 내부의 절연균열에 대한 해는 문제의 경계조건을 만족하는 함수 $\Omega(z), \varphi(z), \psi(z)$ 로 표현된다. 세 개의 복소함수가 결정되면 완전한 형태의 전기장과 탄성장은 식 (3)으로부터 얻을 수 있다.

3. 소규모항복모델

소규모 전기적 항복영역을 고려하여 응력확대계수의 전기적 항복에 대한 영향을 조사한다. 전

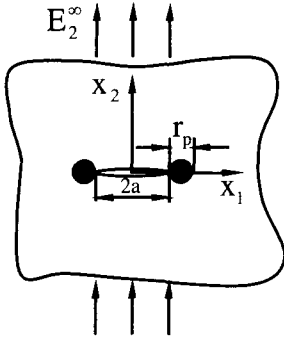


Fig. 2 Electrostrictive crack with a small scale yielding zone in an electrostrictive ceramic.

기적 항복영역을 고려한 전왜균열을 Fig. 2에 나타내었다. 균열면과 무한대에서 전기-기계적 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_2(x_1, 0) &= 0 \\ \sigma_{22}(x_1, 0) + i\sigma_{12}(x_1, 0) &= 0, \quad |x_1| < a \end{aligned} \quad (5)$$

$$E_1 = 0, \quad E_2 = E_2^\infty \text{ as } z \rightarrow \infty \quad (6)$$

절연균열에 대한 전기장은 선형 재료에서 모드 III의 해로부터 얻을 수 있다. 즉, 모드 III 하중이 작용할 경우의 응력은 전기변위로, 변위는 전기장으로 대체할 수 있다. 전기장을 발생시키는 복소함수는 다음과 같다.

$$\Omega(z) = iE_2^\infty \sqrt{z^2 - a^2} \quad (7)$$

전기장은 $\Omega(z)$ 를 식 (3)에 대입하여 구한다. 본 논문에서는 절연균열에 대한 전기장은 균열선단으로부터의 거리 r 에서 균열의 연장부분에 대하여 $E_2 = K_2^E / \sqrt{2\pi r}$ 로 정의된다. 균열에 대한 전기장 확대계수는 식 (3)과 (7)으로부터 결정된다.

$$K_2^E = E_2^\infty \sqrt{\pi a} \quad (8)$$

균열에 대한 탄성장의 해를 알아보자. Fig. 3과 같이 중첩법을 적용하면 균열에 대한 복소함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi^{(a)}(z) + \phi^{(b)}(z) \\ \psi(z) &= \psi^{(a)}(z) + \psi^{(b)}(z) \end{aligned} \quad (9)$$

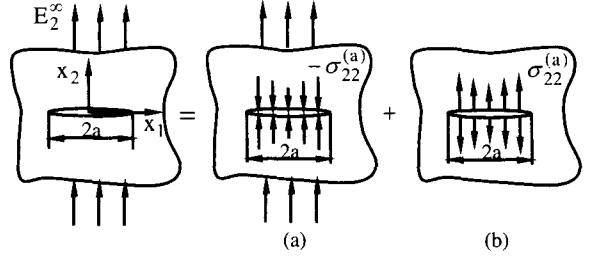


Fig. 3 Application of superposition to obtain the solution for a crack with traction free surfaces.

여기서 괄호 안의 상첨자 a 와 b 는 각각 문제 (a)와 (b)에 관련된 양이다. 문제 (a)에 대하여 균열은 무한대에서 균일한 전기장 E_2^∞ 를 받는 전왜 재료 내에 간격 $(-a, a)$ 로 놓여있다. 절연균열에 대한 복소함수의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi^{(a)}(z) &= \frac{1}{2} S(E_2^\infty)^2 z \\ \psi^{(a)}(z) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

포텐셜 식 (7)과 (10)에 의해 생성된 모든 응력은 무한대에서 영(zero)이 되고, 거의 작은 반경을 가지는 절연균열선단을 감싸는 닫혀진 곡선에 대한 합력은 영이다. 전기장이 작용하지 않는 문제 (b)에 대한 해는 잘 알려져 있다.⁽¹²⁾

$$\begin{aligned} \phi^{(b)}(z) &= S(E_2^\infty)^2 \left(\sqrt{z^2 - a^2} - z \right) \\ \psi^{(b)}(z) &= -S(E_2^\infty)^2 \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (10)과 (11)을 중첩하여 완전한 해 식 (12)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= S(E_2^\infty)^2 \left[\sqrt{z^2 - a^2} - \frac{1}{2} z \right] \\ \psi(z) &= -S(E_2^\infty)^2 \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \end{aligned} \quad (12)$$

식 (7)과 (12)을 (3)에 대입하면 균열 문제에 대한 변위와 응력으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 2G(u_1 + iu_2) &= S(E_2^\infty)^2 \left\{ (-1 + 2\nu)z + \frac{\bar{z}\sqrt{z^2 - a^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} + (3 - 4\nu)\sqrt{z^2 - a^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a^2 - z\bar{z}}{\sqrt{z^2 - a^2}} + z - \frac{4(1 - \nu)}{\beta} \left[\bar{z} + \frac{a}{2} \left(\frac{\ln \frac{z - a}{z + a}}{z + a} \right) \right] \right\} \\
 \sigma_{22} + i\sigma_{12} &= S(E_2^\infty)^2 \left[- \left| \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - 1 + a^2 \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{(z^2 - a^2)^{3/2}} + \frac{a^2(z - \bar{z})}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \\
 \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2S(E_2^\infty)^2 \left[- \left| \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right\} - 1 \right] \\
 \text{for } \beta &= 2[1 - (1 + 2\nu)q]/(1 + q) \quad (13)
 \end{aligned}$$

전기하중은 점 $(a, 0)$ 의 균열선단 근처에서 $r = x_1 - a$ 일때 $1/r$ 과 $1/\sqrt{r}$ 의 응력특이성을 유발한다. 균열선단 직전의 응력은 다음과 같다.

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = 2S(E_2^\infty)^2 \left[\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} - 1 \right] \text{ for } x_1 > a \quad (14)$$

$x_1 > a$ 에 대한 x_1 방향 응력 σ_{22} 는 $r^{-1/2}$ 의 특이성을 갖는다. 식 (14)에서 균열에 대한 응력확대계수는 다음과 같이 유도된다.

$$K_I = 2S(E_2^\infty)^2 \sqrt{\pi a} \quad (15)$$

Beom⁽¹⁰⁾의 결과에서 보면, 응력확대계수는 전기장확대계수와 관련이 있고 전기적 항복영역은 직경 $r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_2^E}{E_0} \right)^2$ 의 원 형태로 이루어진다. 균열선단 주위의 소규모항복영역에서 응력확대계수 K_I^N 은 다음과 같다.

$$K_I^N = \frac{7 - \beta}{16} \frac{1 + q}{1 - \nu^2} YQD_0^2 \left| \frac{K_2^E}{E_0} \right| \quad (16)$$

식 (15)와 (16)에서 소규모비선형조건하의 전왜재료에 대한 총 응력확대계수는 다음과 같다.

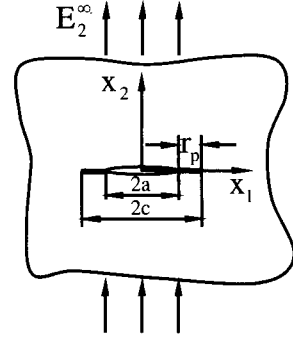


Fig. 4 Electrostrictive crack with a strip yield zone in an electrostrictive ceramic.

$$K_I = 2S(E_2^\infty)^2 \sqrt{\pi a} + \frac{7 - \beta}{16} \frac{1 + q}{1 - \nu^2} YQD_0^2 \left| \frac{K_2^E}{E_0} \right| \quad (17)$$

4. 피항복모델

Dugdale에 의해 제안된 피항복모델을 이용하여 응력확대계수의 전기적 항복에 대한 영향을 조사한다. 전기적 항복영역을 고려한 전왜균열을 Fig. 4에 나타내었다. 균열면, 피항복영역 그리고, 무한대에서 전기적 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 D_2(x_1, 0) &= 0, \quad |x_1| < a \\
 D_2(x_1, 0) &= D_0, \quad a < |x_1| < c \\
 E_1 &= 0, E_2 = E_2^\infty \text{ as } z \rightarrow \infty \quad (18)
 \end{aligned}$$

여기서 $a < |x_1| < c$ 은 피항복영역이다. 피항복영역을 갖는 균열에 대한 전기장은 탄성-완전소성의 모드 III 균열의 해로부터 얻을 수 있다. 문제에 대한 전기장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Omega(z) &= \frac{2iE_0}{\pi} \left[z \cot^{-1} \left(\frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - a \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) \right] \text{ for } \frac{a}{c} = \cos \left(\frac{\pi E_2^\infty}{2E_0} \right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

$z = c$ 에서 $K_2^E = 0$ 을 이용하여 피항복영역의 크기가 유도된다. $E_2^\infty \ll E_0$ 에서 피항복영역의 크기 r_p 는 다음과 같다.

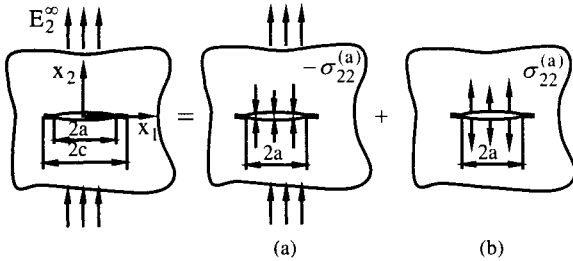


Fig. 5 Application of superposition to obtain the solution for a crack with the strip yield zone.

$$r_p = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_2 E}{E_0} \right)^2 \quad (20)$$

소규모항복모델과 띠항복모델에 의해서 예상되는 항복영역의 크기는 다르다. 그러나, $E_2^\infty \ll E_0$ 에서 비슷한 크기를 가짐을 알 수 있다.

이제 띠항복영역을 갖는 균열에 대한 탄성장의 해를 구해보자. 균열면과 띠항복 영역에서 기계적 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_1, 0) + i\sigma_{12}(x_1, 0) &= 0, \quad |x_1| < a \\ \sigma_{2j}(x_1, 0^+) &= \sigma_{2j}(x_1, 0^-) \\ u_j(x_1, 0^+) &= u_j(x_1, 0^-) \quad (j=1, 2), \quad a < |x_1| < c \end{aligned} \quad (21)$$

Fig. 5와 같이 중첩법을 적용하면 균열에 대한 복소함수의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi^{(a)}(z) + \varphi^{(b)}(z) \\ \psi(z) &= \psi^{(a)}(z) + \psi^{(b)}(z) \end{aligned} \quad (22)$$

괄호안의 상첨자 a 와 b 는 각각 문제 (a)와 (b)에 관련된 양이다. 문제 (a)의 절연균열 대한 복소함수의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi^{(a)}(z) &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ S(1-2\nu)(E_2^\infty)^2 + 2SE_2^\infty E_0 + T(E_2^\infty)^2 \right\} z(z) \\ &\quad + 2iE_0 S\Omega + (T-S)X(z) - \frac{1}{2\pi} \left\{ p + 2(1-\nu)f \right\} \ln \frac{z-a}{z+a} \\ \psi^{(a)}(z) &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ S[\Omega(z) - z\Omega'(z)] [2iE_0 - \Omega'(z)] \right\} \\ &\quad + T[X(z) - zX'(z)] - \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} S[\Omega(z)\Omega'(z) - X(z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{p}{8\pi(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{2az}{z^2-a^2} \right] \\ &+ \frac{f}{4\pi} \left[\ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{2az}{z^2-a^2} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

여기서

$$\begin{aligned} X(z) &= \int \{\Omega'(z)\}^2 dz \\ p &= -\frac{16}{\pi} \frac{1-\nu}{1-2\nu} SE_0^2 a \ln \frac{a}{c} \\ f &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1-2\nu} SE_0^2 a \ln \frac{a}{c} \end{aligned} \quad (24)$$

이다.

식 (23)과 (3)에서 균열면의 응력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(a)} + i\sigma_{12}^{(a)} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ SE_2^\infty \left[(1-2\nu)E_2^\infty + 2E_0 \right] + T(E_2^\infty)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2(1-\nu)} \left[-(3-2\nu)S + T \right] \left[\frac{2E_0}{\pi} \coth^{-1} \left(\frac{a}{x_1} \sqrt{\frac{c^2-x_1^2}{c^2-a^2}} \right) \right]^2 \\ &\quad - 2S \left(\frac{2E_0}{\pi} \right)^2 \frac{a^2}{a^2-x_1^2} \left\{ \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-x_1^2}} \left[\frac{x_1}{a} \coth^{-1} \left(\frac{a}{x_1} \sqrt{\frac{c^2-x_1^2}{c^2-a^2}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \coth^{-1} \left(\sqrt{\frac{c^2-x_1^2}{c^2-a^2}} \right) \right] - \ln \frac{a}{c} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

문제 (b)의 복소해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi^{(b)}(z) &= -\frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\sigma_{22}^{(a)}(t)}{\chi^*(t)(t-z)} dt \\ \psi^{(b)}(z) &= \bar{\varphi}^{(b)}(z) - z\varphi^{(b)}(z) \quad \text{for } \chi(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}} \end{aligned} \quad (26)$$

균열의 오른쪽 선단에 대한 응력확대계수는 중첩에 의하여 다음과 같이 얻어진다.

$$K_I = K_I^{(a)} + K_I^{(b)} \quad (27)$$

여기서

$$K_I^{(a)} = 0, \quad K_I^{(b)} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sigma_{22}^{(a)}(x_1) \sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}} dx_1 \quad (28)$$

이다.

식(28)을 수치적분하면 응력확대계수를 얻을 수 있다. Fig. 6은 소규모항복모델과 띠항복모델에 의해 예상되는 응력확대계수를 나타낸 것이다. 두 모델에서 전기적 항복영역의 형상이나 크기는 각각 다르다. 하지만, 소규모항복조건에서 전기적 항복영역의 크기가 비슷하게 나타나고, 대규모항복조건에서도 응력확대계수는 두 모델에서 거의 일치함을 알 수 있다.

5. 결 론

균일한 전기장을 받는 전왜재료 내의 전기적으로 절연되는 면을 가지는 균열을 해석하였다. 전기장과 탄성장의 완전한 해는 복소함수이론과 중첩의 원리를 이용하여 유도하였다. 소규모항복모델과 띠항복모델을 이용하여 전기적 항복이 응력확대계수에 미치는 영향을 조사하였다. 균열선단 근처에서 전기적 항복영역의 크기는 두 모델에서 각각 다르게 나타나지만, 응력확대계수는 두 모델에서 서로 비슷하다. 그러므로, 응력확대계수는 전기적 항복영역의 형상이나 크기에 민감하지 않음을 알 수 있다.

후 기

이 논문은 1998년도 한국학술진흥재단의 학술연구비에 의하여 지원되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. McMeeking, R. M., "On Mechanical Stresses at Cracks in Dielectric with Application to Dielectric Breakdown," J. of Appl. Phys. Vol. 62, pp. 3116-3122, 1987.
2. Smith, T. E. and Warren, W. E., "Some Problems in Two-Dimensional Electrostriction," J. Math. Phys., Vol. 45, pp. 45-51, 1966.
3. Yang, W. and Suo, Z., "Cracking in Ceramic Actuators Caused by Electrostriction," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 42, pp. 649-663, 1994.
4. Hao, T. H., Gong, X. and Suo, Z., "Fracture Mechanics for the Design of Ceramic Multilayer Actuators," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 44, pp. 23-48, 1996.

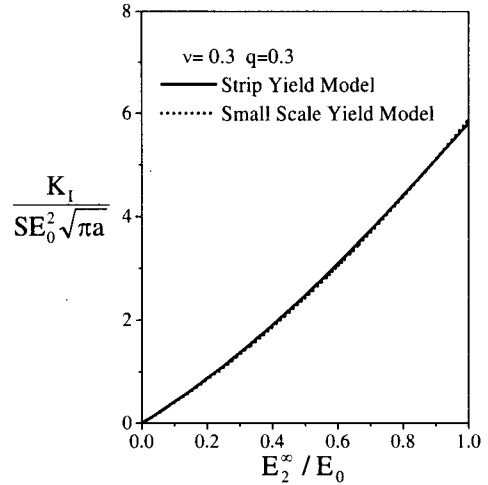


Fig. 6 Comparison between the small scale yielding and the strip yield on the stress intensity factor.

5. Gao, H., Zhang T.-Y., and Tong, P., "Local and Global Energy Release Rates for an Electrically Yielded Crack in a Piezoelectric Ceramic," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 45, pp. 491-510, 1997.
6. Suo, Z., "Models for Breakdown-Resistant Dielectric and Ferroelectric Ceramics," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, pp. 1155-1176, 1993.
7. Dugdale, D. S., "Yielding of Steel Sheets Containing Slits," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
8. Ru, C. Q., "Effect of electrical polarization saturation on stress intensity factors in a piezoelectric ceramic," Int. J. Solids and Structures, Vol. 36, 869-883, 1999.
9. Beom, H. G., "Singular Behaviour Near a Crack Tip in an Electrostrictive Material," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 47, pp. 1027-1049, 1999.
10. Beom, H. G., "Small Scale Nonlinear Analysis of Electrostrictive Crack Problems," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 47, pp. 1379-1395, 1999.
11. Knops, R. J., "Two-Dimensional Electrostriction," Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 16, pp. 377-388, 1963.
12. Muskhelishvili, N. I., Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Netherlands, 1963.