

승용차용 MR 댐퍼의 댐핑력 이력현상 모델

Hysteresis Model of Damping Forces of MR Damper for a Passenger Car

이 순 규*, 최 승 복**
Soon-Kyu Lee, Seung-Bok Choi

ABSTRACT

This paper presents hysteresis models of damping forces of a magneto-rheological (MR) damper which is applicable to a middle-sized passenger vehicle. After manufacturing a cylindrical type of the MR damper, its field-dependant damping force and hysteresis behavior are experimentally evaluated. Three different models ; Bingham model, Bouc-Wen model and Polynomial model are provided to predict the hysteretic damping force. The damping force characteristics predicted from three different models are compared with the measured results under various excitation conditions.

주요기술용어 : Magneto-rheological damper(자기유변댐퍼), Damping force(댐핑력), Magnetic field(자기장), Bingham model(빙햄모델), Hysteresis model(이력현상모델)

1. 서 론

최근 ER(electro-rheological) 및 MR(magneto-rheological) 유체를 이용한 댐퍼 개발에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 이러한 지능재료를 이용한 댐퍼의 공통적인 특성은 인가되는 전기장이나 자기장의 크기에 따라 가역적이고 연속적으로 댐핑력을 제어할 수 있다는 것이다. 그리고 이러한 댐퍼들은 전항복(pre-yield)영역에서 가진 속도가 증가할 때와 감소할 때의 댐핑력의 차이를 보이는 이력현상(hysteresis)을 나타낸다. 이러한 특성을 갖는 ER 및 MR 댐퍼의 설계를

위해서는 보다 정확한 해석이 필요하다. 또한 ER 및 MR 댐퍼를 이용한 실제 차량 현가장치의 제어를 수행할 때 제어성능을 향상시키기 위해서는 알맞은 제어이론을 사용하는 것도 중요하겠지만 외부로부터 들어오는 가진과 인가되는 전기장이나 자기장의 변화에 따른 ER 및 MR 댐퍼의 거동을 정확하게 묘사할 수 있는 모델을 수립하는 것이 무엇보다도 중요하다. 그러나 보편적으로 사용중인 빙햄모델은 간단하기는 하나 실제의 현상과는 많은 차이를 보이고 있다. 특히 빙햄모델은 지능재료에서 나타나는 이력현상을 정확하게 나타내지 못한다. 이러한 이력현상을 해석하기 위해 제안된 모델로는 Bouc-Wen모델,¹⁾ Six-parameter 모델,²⁾ 그리고 Nonlinear hysteretic biviscous 모델³⁾ 등이 있다.

본 연구에서는 실제 중형급 승용차에 사용될

* 회원, 인하대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 인하대학교 기계공학과

수 있는 댐퍼의 제원을 근거로한 실린더형 MR 댐퍼를 제안하고 단품실험을 통하여 인가되는 전류의 크기 변화에 따른 댐핑력의 변화를 고찰하였고, 가진 속도의 변화에 따른 댐핑력의 변화에서 이력현상이 발생하는 것을 실험적으로 확인하였다. 그리고 제안된 MR 댐퍼의 거동을 해석하기 위하여 가장 단순한 Bingham 모델, 이력현상을 표현하는 Bouc-Wen 모델, 그리고 본 연구에서 제안하는 다항식에 근거한 Polynomial 모델을 이용하여 댐핑력 이력현상을 예측하고, 실험결과와 비교함으로써 각 모델의 장단점과 타당성을 검증하였다. 특히 본 연구에서 새롭게 제안한 Polynomial 모델의 유용성을 증명하기 위하여 입력전류와 가진 주파수를 변화시키면서 이력현상을 분석하였으며, 실험결과와 비교하였다.

2. MR 댐퍼의 이력현상

제안된 MR 댐퍼의 구조를 Fig. 1에 도시하였다. MR 댐퍼는 크게 피스톤헤드를 중심으로 상하부의 자기회로, 내측실린더, 외측실린더 그리고 피스톤으로 구분되며, 내외측 실린더 사이에는 MR 유체의 유동을 위하여 원형 덕트가 구성되었다. 또한 원형 덕트의 양끝단은 자기회로로 이

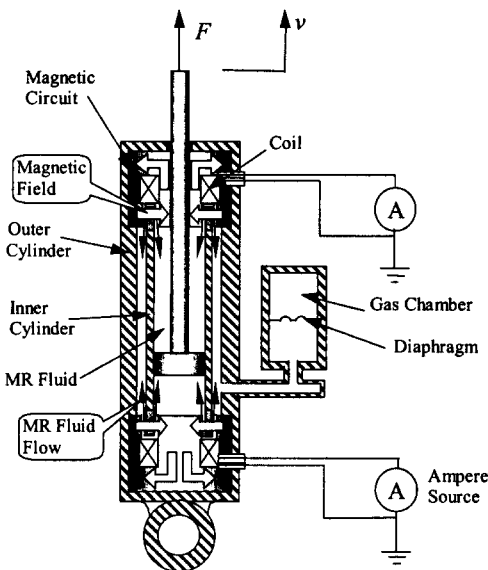


Fig. 1 Configuration of the MR damper

루어져 부하되는 자기장에 따라 MR유체가 작동할 수 있게 하였으며, 내측실린더의 고정과 자극에서의 유로 형성을 위하여 스플라인 형태를 지닌 상자성체로 된 지그를 자기회로에 설치하였다. 이것은 MR유체가 코일에 감긴 곳으로 유입되는 것을 막아준다. 상하부 자기회로에 전류가 인가되면 각각의 자극에 자기장이 부하되고 자극을 지나는 MR유체에 의해 항복전단응력이 증가하게 되어 유체 유동저항을 증가시킨다. 이것은 상하부 챔버에 압력차를 발생시켜 피스톤의 상하운동에 저항하는 방향의 댐핑력이 발생된다. 결과적으로, 자기장 무부하시 속도에 따라 유체점성으로 인한 댐핑력만을 발생시키나, 자기장 인가시 MR유체의 항복전단응력으로 인한 댐핑력이 더해지게 된다.

Fig. 2는 제작된 MR댐퍼의 사진으로 행정거리는 70.25mm로 하였고, 내경은 30.1mm로 상용 댐퍼의 피스톤 헤드의 크기에 맞추었으며, 상부와 하부의 자기회로는 강자성체인 연강(mild steel)으로 이루어져있는 자로(flux guide)에 코일을 150회 감았다. 내측실린더와 자기회로 사이의 자극은 1mm이며, 상부와 하부에 10mm의 길이를 갖는 간극이 챔버쪽과 원형덕트쪽으로 각각 2개씩 형성되어 있다.

MR댐퍼의 성능을 시험하기 위해 유압서보밸브로 구동되는 댐퍼 시험기를 구성하여 댐퍼를 가진시키며 자기장 변화에 따른 댐퍼의 댐핑력 변화를 고찰하였다. 자세한 실험장치 구성과 실험 과정은 참고문헌^{4,5)}에 잘 기술되어 있어 생략한다. 실험조건으로 가스챔버의 가스압은 피스톤

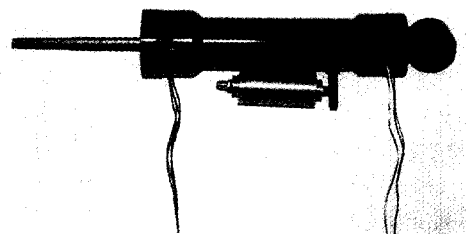


Fig. 2 Photograph of the MR damper

로드의 최대신장상태에서 25bar를 사용하였으며 댐퍼의 가진 변위는 20mm로 설정하였다. 성능 실험 수행시 MR 댐퍼가 인장(rebound) 운동을 할 때의 댐핑력을 (+)값으로, 반대방향인 압축(jounce) 운동일 때의 댐핑력을 (-)값으로 표시하였다.

Fig. 3은 주파수가 1.4Hz인 정현파로 MR 댐퍼를 가진하였을 때의 시간영역에서의 댐핑력 곡선을 도시한 것이다. 여기서 리바운드와 자운스 운동의 댐핑력의 절대값 평균이 전류 무부하시 최대 400N의 댐핑력이 발생되었으나, 2.0A의 전류 부하시 최대 2048N의 댐핑력이 발생되어 약 5배정도의 댐핑력의 증가를 확인하였다.

Fig. 4는 가진 속도의 변화에 따른 댐핑력의 변화를 도시한 것이다. 실험결과에서 볼 수 있듯이 전류공급에 따라 이력현상이 나타나는 것을 알 수 있다. 이력현상에 영향을 미치는 요인은 여러 가지가 있는데 그 중에 MR 유체 자체의 특성

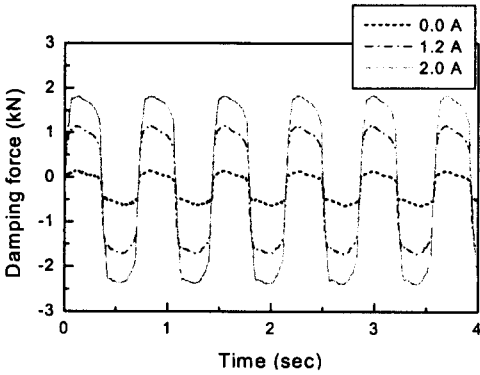


Fig. 3 Time history of damping force : measured

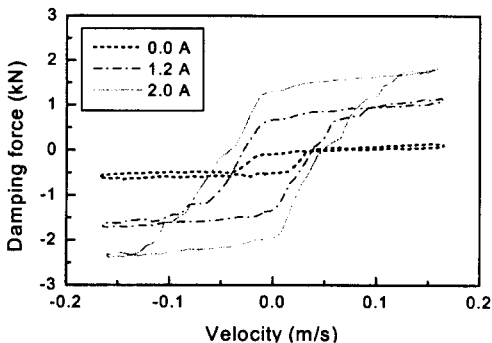


Fig. 4 Field-dependent damping force : measured

에 의한 영향이 있다. 자기장이 인가되면 MR 유체내의 입자는 체인형 구조를 형성한다. 이 체인형 구조는 유체의 속도에 따라 강하게 형성되기도 하고 또한 일부 끊어지기도 한다. 같은 속도라고 할지라도 속도가 증가하는 상태인지 감소하는 상태인지에 따라 전단력의 크기가 달라지는데 이러한 현상이 바로 이력현상의 원인이 된다. 즉 유체의 속도가 점점 증가함에 따라 체인형 구조가 점점 끊어지는 상태와 유체의 속도가 점점 감소함에 따라 체인형 구조가 점점 형성되는 상태 사이의 물리적인 현상이 서로 다르기 때문에 이력현상이 발생하게 되는 것이다. 그 밖에 MR 댐퍼의 이력현상에 영향을 미치는 요인으로는 가진 변위가 변함에 따른 가스챔버의 압력변화에 의한 영향과 MR 유체 자체의 압축성 즉 스프링 특성에 의한 영향이 있다. 또 다른 이력현상의 원인은 MR 유체의 관성에 의한 영향, 실링 부분의 동적 마찰력에 의한 영향, 그리고 높은 압력차에 의한 피스톤 헤드 부분의 누유에 의한 영향 등이 있다.

3. 댐핑력 모델

3.1 Bingham 모델

Fig. 5는 빙햄모델을 나타낸다. MR 댐퍼의 해석을 위하여 MR 유체는 비압축성 유체로 가정하였고, 동일 공간에서의 내부압력은 모든 방향으로 균일하게 작용하며, 유로 형상에 따른 압력 손실은 없다고 가정하였다. 본드 그래프 방법(bond graph method)으로부터 MR 댐퍼의 동적 지배 방정식은 다음과 같이 얻어진다.⁴⁾

$$\dot{q} = -A_r v \quad (1)$$

$$F = -\frac{A_r}{C_g} q + (A_p - A_r)^2 R_v v + (A_p - A_r) P_{MR} \cdot \text{sgn}(v) \quad (2)$$

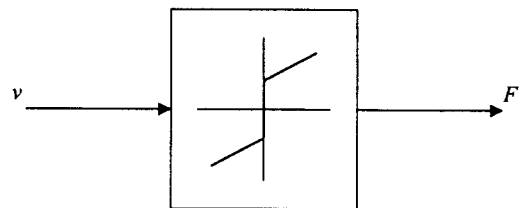


Fig. 5 Bingham model of MR damper

여기서 q 는 하부챔버의 부피, A_r 은 피스톤 로드
의 단면적, A_p 는 피스톤 헤드의 단면적, v 는 피스
톤 속도, F 는 MR댐퍼의 댐핑력, R_t 는 MR유체
의 점성으로 인한 유체저항이며, P_{MR} 은 MR 효
과에 의한 댐퍼 내부의 압력강하로 다음과 같이
표현된다.

$$P_{MR} = 4 \times 2 \frac{L}{h} \tau_y(H) = 4 \times 2 \frac{L}{h} \alpha H^\beta \quad (3)$$

여기서 L 은 MR효과가 발생하는 자극의 길이, h
는 자극의 간격이다. $\tau_y(H)$ 는 자기장에 의한 유
체의 항복전단응력으로 인가 자기장에 지수함수
적으로 증가한다고 알려져 있다. 또한 α 와 β 는
MR유체의 고유한 특성을 나타내는 값이다. 본
연구에 사용된 MR유체는 Lord사에서 조성한
MRF-132LD로 제조사에서 제공받은 자료를 이
용하여 병행모델을 도출하였다. 상온에서 인가
자기장 H 에 대하여 $83.46H^{1.25}$ Pa의 항복응력을
찾는다.

3.2 Bouc-Wen 모델

Bouc-Wen 모델의 모델링 방법은 실험에 근
거한 접근 방법이다. 2장에서 수행한 실험결과를
토대로 하여 MR 댐퍼의 거동을 잘 나타낼 수 있
는 모델을 수립한 후 이 모델을 실험결과와 비교
하여 각 변수값들을 찾게 된다. Fig. 6은 Bouc-
Wen 모델을 나타낸다. 그림에서 보는 바와 같이
가진 변위 x 와 댐핑력 F 와의 관계를 댐퍼, 스프
링, 그리고 Bouc-Wen 함수로 구성하여 나타내
었다. Bouc-Wen 모델에서 댐핑력은 다음과 같
은 식으로 나타낼 수 있다.⁶⁾

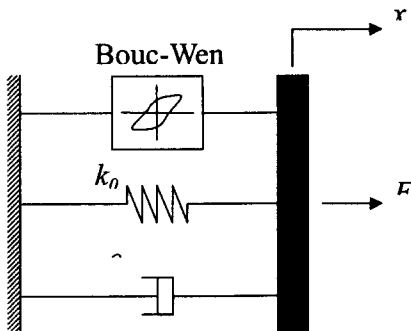


Fig. 6 Bouc-Wen model of MR damper

$$F = c_0 v + k_0(x - x_0) + \gamma z \quad (4)$$

여기서 변수 x_0 는 가스챔버에 의한 영향, γ 는
MR 효과에 의한 댐퍼 내부의 압력강하를 나타
내며, z 는 다음 식에 의하여 구할 수 있다.

$$\dot{z} = -\varepsilon |v|z|v|^{n-1} - \delta v|z|^n + A v \quad (5)$$

상기 식에서 ε , δ , A 는 각각 전항복영역의 이
력현상곡선의 모양에 영향을 미치는 변수들이다.

3.3 Polynomial 모델

Fig. 7은 본 연구에서 제안한 Polynomial 모
델을 나타낸다. 먼저 2장에서 고찰한 바와 같이
MR 댐퍼에 인가되는 전류를 0.0, 0.4, 1.2, 2.0A
로 변화시켜 각 입력전류에 따른 댐핑력 변화의
실험결과를 얻었다. 그리고 실험에서 얻은 댐핑
력 이력현상곡선을 가진 가속도가 양(+)
인 아랫 부분과 음(-)
인 윗부분으로 나누고, 가진 가속도
의 부호와 인가되는 전류의 크기에 따라 각각의
댐핑력을 전항복영역과 후항복영역을 동시에 나
타내는 가진 속도에 대한 함수인 6차 다항식으로
나타내면 다음과 같다.

$$F = \sum_{i=0}^6 a_i v^i, \quad n=6 \quad (6)$$

여기서 F 는 MR 댐퍼가 내는 댐핑력이고, v 는
MR 댐퍼 피스톤의 운동 속도이며, a_i 는 실험 결
과에 근거하여 결정되는 계수이다. Fig. 8은 입력

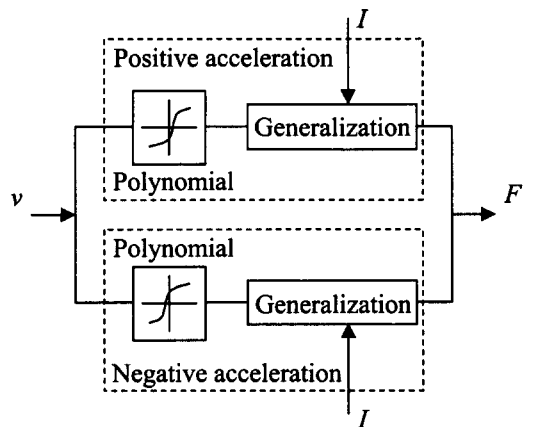


Fig. 7 Polynomial model of MR damper

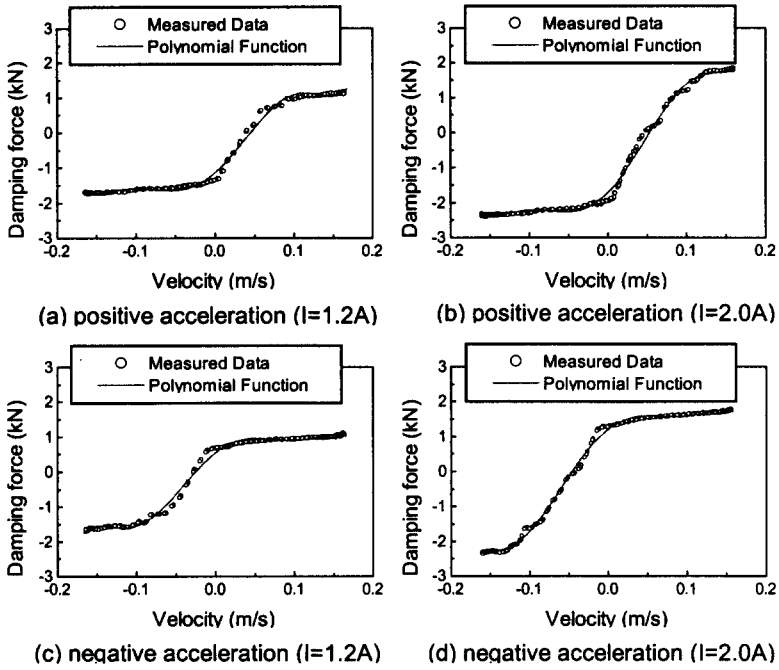


Fig. 8 Comparison between measured data and polynomial function

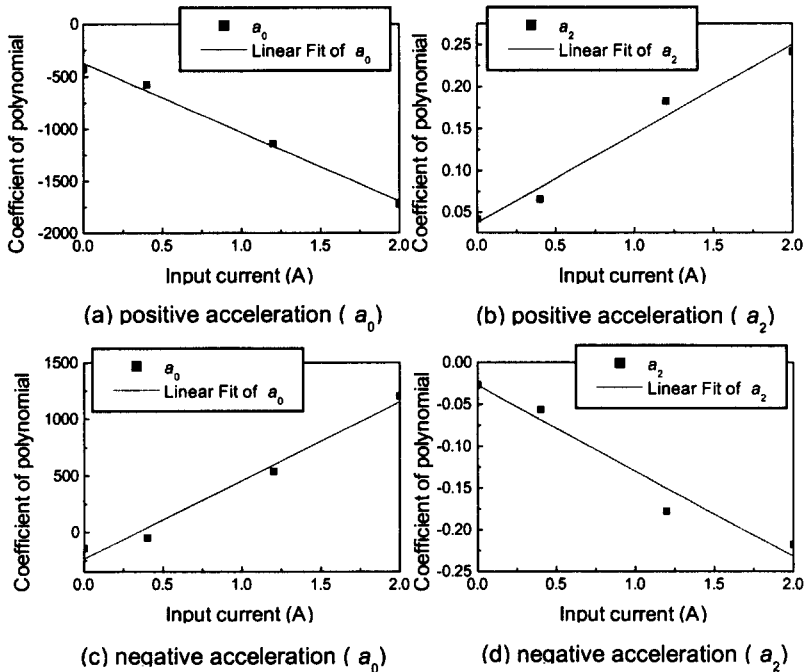


Fig. 9 Determination of coefficient a_i

Table 1 Coefficients of polynomial model

Positive Acceleration				Negative Acceleration			
parameter	value	parameter	value	parameter	value	parameter	value
b_0	-371.8	c_0	-659.4	b_0	-235.8	c_0	693.7
b_1	6.205	c_1	8.955	b_1	5.391	c_1	7.034
b_2	0.03728	c_2	0.1062	b_2	-0.02774	c_2	-0.1020
b_3	-3.487e-4	c_3	-1.584e-4	b_3	-3.788e-4	c_3	6.729e-5
b_4	-2.767e-6	c_4	-5.908e-6	b_4	2.449e-6	c_4	4.967e-6
b_5	6.924e-9	c_5	1.137e-9	b_5	8.804e-9	c_5	-4.924e-9
b_6	5.604e-11	c_6	1.087e-10	b_6	-5.374e-11	c_6	-8.196e-11

전류가 1.2A와 2.0A인 경우, 가진 가속도의 부호에 따른 실험결과와 이를 나타내는 6차 다항식을 나타낸 것이다. 6차 다항식의 계수인 a_i 의 값들은 인가되는 전류의 크기에 따라 변화하므로 댐핑력을 인가되는 전류에 대한 식으로 나타내기 위하여 전류에 대한 선형증가함수를 다음과 같이 도입한다.

$$a_i = b_i + c_i I, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 6 \quad (7)$$

여기서 I 는 MR 댐퍼에 인가되는 전류의 크기이다. Fig. 9에서 점으로 나타낸 것은 각각의 입력 전류에 해당하는 6차 다항식의 계수 중 a_0 와 a_2 의 값들을 나타낸 것이고, 직선으로 나타낸 것은 이들 각각의 a_i 의 값들을 전류에 대한 선형증가함수로 나타낸 것이다. 결국 식 (7)을 식 (6)에 대입함으로써 MR 댐퍼에서 발생하는 댐핑력을 가진 속도와 인가되는 전류에 대한 함수인 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$F = \sum_{i=0}^6 (b_i + c_i I) v^i, \quad n=6 \quad (8)$$

따라서, Fig. 9에서와 같은 방법으로 구한 선형화된 식의 절편과 기울기로부터 식 (8)에 있는 b_i 값 및 c_i 값을 구할 수 있으며, Table 1에 모든 계수값들을 제시하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 Bingham 모델

Fig. 10은 Bingham 모델을 이용한 컴퓨터 시뮬레이션 결과와 실험으로부터 얻은 가진 속도의 변화에 따른 댐핑력의 변화를 비교한 것이다. 가진 조건은 주파수가 1.4Hz이고 가진 진폭 20mm인 정현파의 가진이고, 인가되는 전류가 1.2A인 시뮬레이션 결과와 실험 결과이다. 결과에서 보는 바와 같이 Bingham 모델을 이용한 시뮬레이션 결과는 댐핑력의 크기는 비교적 양호하게 예측하고 있으나, 실제 현상에서 보이는 이력현상을 표현하지 못하고 속도가 0m/s인 점에서 댐핑

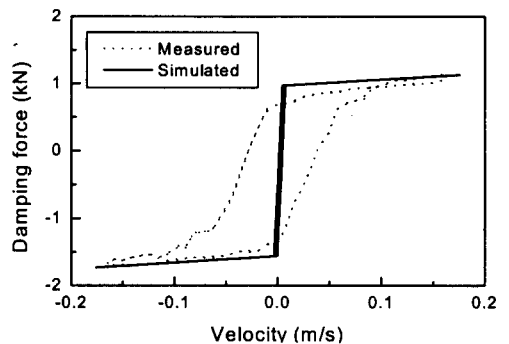


Fig. 10 Comparison of damping force between measured and simulated results: Bingham model

력이 급격히 변화하는 것을 볼 수 있다. 결국 Bingham 모델은 MR 댐퍼의 전항복영역을 표현하지 못한다는 것을 알 수 있다. 이와 같이 Bingham 모델은 실제현상을 정확하게 표현하지는 못하지만 물리적인 이론에 근거한 접근 방법으로서 MR 유체의 간단한 Bingham 실험 결과로부터 댐핑력의 크기를 예측할 수 있고, 장치의 형상이나 치수가 바뀌어도 적용할 수 있으므로 장치의 설계시 설계변수를 선정 할 경우 유용하게 사용될 수 있다는 장점을 가지고 있다. 또한 요구 댐핑력을 내기 위한 제어전류는 다음과 같은 간단한 식으로 나타내므로 실제 제어를 수행할 경우 편리하다는 장점이 있다.

$$I = \frac{2h}{N} \left[F_{MR} \cdot \frac{h}{8\alpha \cdot L(A_p - A_r)} \right]^{1/\beta} \quad (9)$$

여기서 F_{MR} 은 제어를 위한 요구 댐핑력이며, N 은 솔레노이드에 감긴 코일의 권선수이다.

4.2 Bouc-Wen 모델

Fig. 11은 Bouc-Wen 모델을 이용한 시뮬레이션 결과와 실험 결과를 비교한 것이다. 모든 가진 조건과 입력전류는 Bingham 모델의 경우와 동일하다. 결과적으로 Bouc-Wen 모델이 MR 댐퍼의 실제 거동에서 보이는 이력현상을 잘 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 그러나 인가되는 전류의 값이 변함에 따라서 식 (4)와 (5)의 각 변수값들이 변하게 되므로 실제 제어를 위한 요구 댐핑력이 주어졌을 때 제어전류를 구하기 위해서

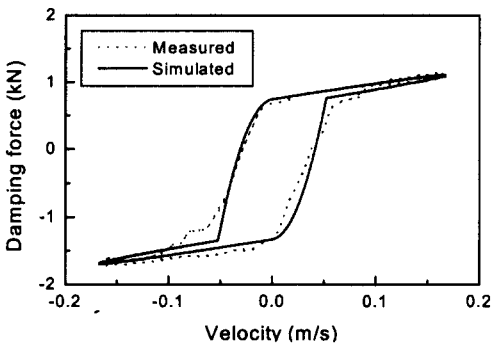


Fig. 11 Comparison of damping force between measured and simulated results: Bouc-Wen model

는 식 (5)의 미분방정식을 풀어야 한다는 단점이 있다. 식 (5)에서 A 의 값은 작아질수록 전항복영역의 속도 범위가 증가하게 된다. 식 (4)에서 γ 의 값은 전항복영역과 후항복영역을 포함한 전체 속도영역에서의 댐핑력 값에 영향을 미친다. γ 의 값이 커지게 되면 댐핑력은 전체적으로 증가하게 된다. ω_0 는 MR 댐퍼의 댐핑특성을 나타내고 k_0 는 스프링특성을 나타내는 변수로써 c_0 의 값이 증가하게 되면 속도에 대한 댐핑력의 곡선에서 기울기가 증가하게 되고, k_0 의 값이 증가하게 되면 같은 속도에서 변위가 양(+)일 때와 음(-)일 때의 댐핑력의 차이가 증가하게 된다. x_0 값의 변화는 스프링 특성 부분의 시작 변위의 변화로 스프링에 전하중(pre-load)을 변화시킨다. x_0 의 값이 증가하면 댐핑력은 전체적으로 음(-)의 방향으로 증가한다. 결과적으로 x_0 값은 MR 댐퍼의 가스챔버에 의한 영향을 의미한다.

4.3 Polynomial 모델

Fig. 12는 MR 댐퍼가 동일한 조건하에서 가진될 때 실험 결과와 Polynomial 모델을 이용한 시뮬레이션 결과를 여러 입력전류에서 나타낸 것이다. 결과에서 볼 수 있듯이 여러 입력 전류에 있어서 실제 MR 댐퍼의 이력현상을 정확히 나타내는 것을 알 수 있다. Polynomial 모델은 결과적으로 모델링 과정에서 사용되었던 입력전류인 0.0, 0.4, 1.2, 2.0A인 경우뿐만 아니라, 모델링 과정에서 사용되지 않은 입력전류인 0.8, 1.6A인 경우도 실제 MR 댐퍼의 거동을 잘 나타내는 것을 알 수 있다. Fig. 13은 인가되는 전류가 1.2A인 경우 가진 조건을 다르게 하여 실험 결과와 Polynomial 모델을 이용한 시뮬레이션 결과를 비교한 것이다. Fig. 13(a)는 MR 댐퍼에 주파수가 2.2Hz, 진폭이 20mm인 정현파의 가진이 들어올 때의 실험 결과와 시뮬레이션 결과를 비교한 것이고, Fig. 13(b)는 주파수가 1.4Hz, 진폭이 25mm인 정현파의 가진이 들어올 때의 실험 결과와 시뮬레이션 결과를 비교한 것이다. 결과에서 보듯이 다른 가진 조건에서도 Polynomial 모델을 이용한 시뮬레이션 결과가 실제 MR 댐퍼의 거동을 잘 나타내는 것을 알 수 있고, 이는 결

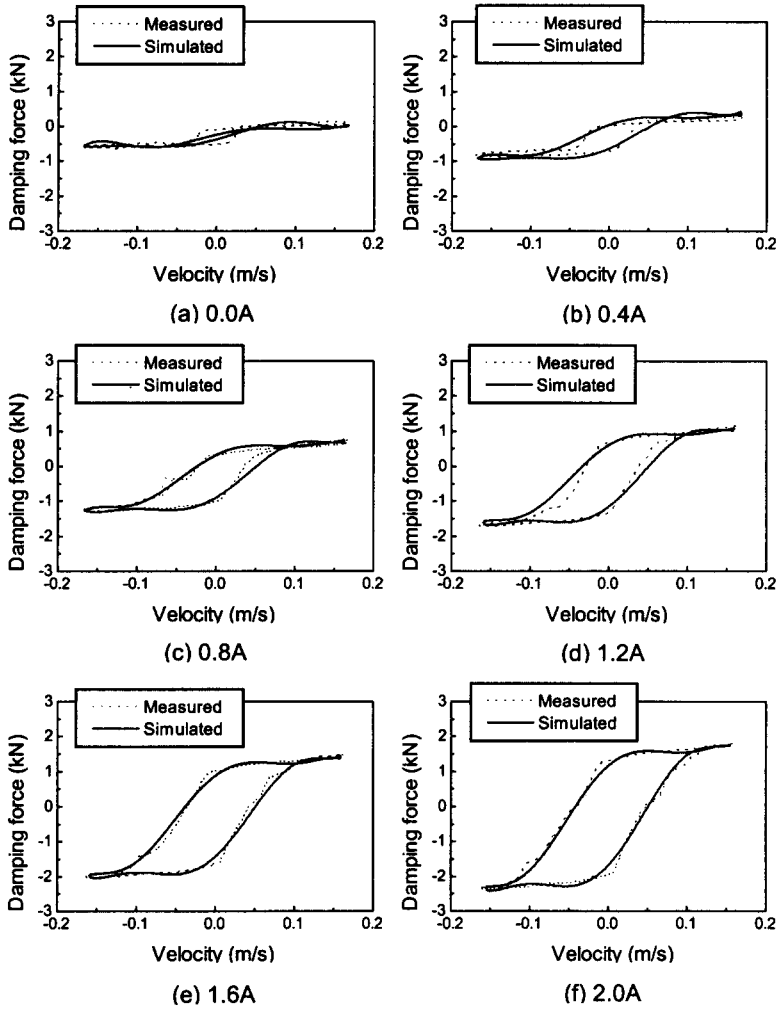


Fig. 12 Damping force characteristics at various input currents: Polynomial model

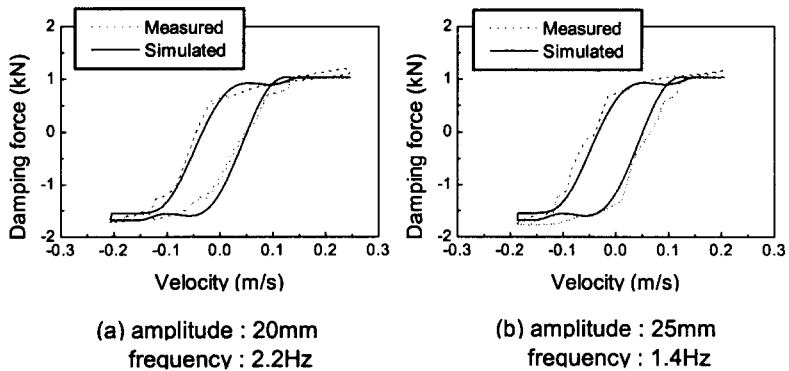


Fig. 13 Damping force characteristics at different excitation amplitude and frequency: Polynomial model

과적으로 모델의 일반성과 타당성을 입증하는 것이다.

Polynomial 모델을 이용하여 제어를 수행할 경우 요구 댐핑력을 내기 위한 제어전류는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$I = \frac{F - \sum_{i=0}^n b_i v^i}{\sum_{i=0}^n c_i v^i}, \quad n=6 \quad (10)$$

여기서 변수 b_i 와 c_i 는 Table 1에서 나타난 것과 같이 모델링 과정을 통하여 얻어지는 계수값들이므로 결국 제안된 모델은 Bouc-Wen 모델과 같이 제어전류를 구하기 위하여 미분방정식을 풀어야 하는 번거로움이 없고, 가진 속도와 요구 댐핑력만의 식으로 제어전류가 결정되는 장점을 갖고 있다.

5. 결론

본 연구에서는 MR 댐퍼의 전류인가에 따른 댐핑력 이력현상을 표현하기 위하여 Bingham 모델, Bouc-Wen 모델, 그리고 본 연구에서 제안한 Polynomial 모델 등을 사용하였다. 각 모델의 지배 방정식을 설명한 후 시뮬레이션을 통하여 얻은 결과와 실험 결과를 비교 분석하였다. 예측한 대로 Bingham 모델의 경우 지배방정식의 단순함으로 인한 제어 실험이 비교적 용이한 장점이 있으나 댐핑력 이력현상을 제대로 표현하지 못하였다. Bouc-Wen 모델의 경우 댐핑력 이력현상을 비교적 양호하게 표현할 수 있으나 제어 실험시 미분방정식을 풀어야 제어 입력을 결정할 수 있는 단점을 갖고 있다. 한편, 본 연구에서 제안한 Polynomial 모델의 경우 여러 입력전류와 가진 조건, 그리고 가진 주파수 변화에도 불구하고 댐핑력 이력현상을 비교적 우수하게 표현할 수 있음을 입증하였다.

향후 본 연구에서 제안한 Polynomial 모델을 이용한 댐핑력 제어 실험을 통하여 MR 댐퍼의 각종 진동 제어성능을 고찰할 예정이다.

참고 문헌

- 1) B. F. Spencer Jr., S. J. Dyke, M. K. Sain, and J. D. Carlson, "Phenomenological Model for a Magnetorheological Damper", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 123, No. 3, pp. 230-238, 1997.
- 2) G. M. Kamath, and N. M. Wereley, "Nonlinear Viscoelastic-Plastic Mechanism-Based Model of an Electrorheological Damper", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 6, pp. 1125-1132, 1997.
- 3) N. M. Wereley, L. Pang, and G. M. Kamath, "Idealized Hysteresis Modeling of Electrorheological and Magnetorheological Dampers", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 9, pp. 642-649, 1998.
- 4) 최승복, 최영태, 박우철, 정재천, 서문석, 여문수, "연속가변 ER 댐퍼의 제어 및 응답특성", 한국 자동차공학회 논문집, 제4권, 제6호, pp.164-174, 1996.
- 5) 박우철, "ER유체의 빙햄특성이 ER댐퍼의 댐핑력에 미치는 영향", 박사학위논문, 1997.
- 6) Y. K. Wen, "Method for Random Vibration of Hysteretic Systems", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 102, No. EM2, pp. 249-263, 1976.