

전단변형을 고려한 이방성 적층셀의 이론해석

Theoretical Analysis of Anisotropic Laminated Shells with Shear Deformation

권익노* 권택진**
Kwun, Ik-No Kwun, Taek-Jin

Abstract

The structural behaviors of anisotropic laminated shells are quite different from that of isotropic shells. Also, the classical theory of shells based on neglecting transverse shear deformation is invalid for laminated shells. Thus, to obtain the more exact behavior of laminated shells, effects of shear deformation should be considered in the analysis.

As the length of x-axis or y-axis is increase, the effects of transverse shear deformation are decrease because the stiffness for the axis according to the increasing of length is large gradually. In this paper, the governing equations for anisotropic laminated shallow shell including the effects of shear deformation are derived. And then, by using Navier's solutions for shallow shells having simple supported boundary, extensive numerical studies for anisotropic laminated shallow shells were made to investigate the effects of shear deformation for 3 typical shells. Also, static analysis is carried out for cross-ply laminated shells considering the effects of various geometrical parameters, e.g., the shallowness ratio, the thickness ratio and the ratio of a(length of x-axis)-to-b(length of y-axis). The results are compared with existed one and show good agreement.

keywords : Shear Deformation, Laminated Shell, Anisotropy, Cross-Ply

1. 서 론

이방성 적층재료는 내구성, 내열성, 내부식성 등에서 다른 어느 재료보다 좋은 성질을 가지고 있고 특히 강성에 비해 중량이 가볍기 때문에 우수한 역학적 재료라고 할 수 있다.^{1,2)} 또한 이방성재료 중에 가장 널리 쓰이는 섬유 강화 복합재료는 탄소섬유나 Aramid섬유(Kevlar) 등을 사용하는데 이것은 열팽창계수가 영에 가깝기 때문에 온도의 영향을 거의 받지 않는 구조물 제조가 가능하다. 이러한 이방성 적층재료는 처음 항공분야에서 사용이 시작되어 제품의 우수성뿐 아니라 가격의 하락으로 인해 대체재료로서 여러 산업분야에서 각광을 받고 있다. 최근 들어 건축·토목 산업에서도 다수의 연구자들이 이

분야에 대하여 연구를 진행하고 있고 실제 적용사례로 해안 건축물, 하수처리 구조물, 석유화학공장 시설물, 병원 및 군사시설 등에 일부 사용이 되고 있다. 하지만 국내외적으로 아직까지 주목할 만한 이방성 적층 구조물은 없는 실정이다. 따라서, 미래의 무한한 가능성과 유용성을 지니고 있는 분야로서 지속적인 연구를 통하여 안전성과 경제성이 뛰어난 이방성 적층 구조물을 건설하는 것이 앞으로의 과제이다.

적층 이방성 재료의 면외 전단계수는 보통 평면인장 계수와 비교하면 일반적으로 작다. 하지만 적층 이방성 재료의 면외 전단변형은 등질 등방성 재료의 면외 전단 변형과 비교하면 상당히 중요하기 때문에 반드시 고려해야 한다. 또한, 구조물의 두께가 증가할수록 면외 전단변형은 상대적으로 중요하다. 이러한 면외 전단변형은 x축과 y축에 대하여 발생되는데 실질적으로 장방형 셀의 경우는 축강성의

* 정회원 · 성균관대학교 건축공학과, 박사과정

** 정회원 · 성균관대학교 건축공학과, 교수

차이가 나기 때문에 장축에서 발생하는 전단변형은 미소하다 할 수 있다. 그러므로, 구조물에 단순히 모든 면의 전단변형을 고려하여 해석하는 것보다 주로 작용하는 면의 전단변형만을 고려하는 것이 이론 해석적 측면에서 유리하다 할 수 있다.

따라서 본 논문에서는 면의 전단변형률 γ_{yz} 만을 고려한 이방성 적층셀에 대하여 기초방정식을 정식화하고자 한다. 아울러 유도된 기초방정식을 이용한 Navier 해법을 통하여 쌍곡포물형셀, 원통형셀 그리고 구형셀에 대한 정식해석을 수행한다. 각각의 경우에 대해 편평비, 두께비, 탄성계수비 및 변장비 등의 다양한 변수를 고려한 해석결과를 기존의 결과와 비교검토하여 면의 전단변형의 효과와 적층순서에 따른 이방성 셀의 거동 그리고 장방형 적층셀의 경우 장변과 단변의 비에 따른 거동을 조사함으로써 본 논문에서 제안된 이론의 적용범위를 알아보고자 한다.

2. 전단변형 γ_{yz} 를 고려한 등방성 단층셀의 기초방정식

2.1 데카르트 좌표계에서의 변형률-변위관계식

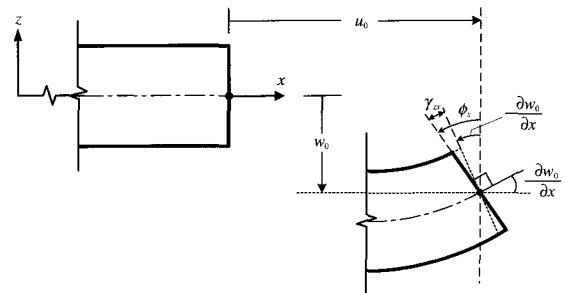
2중 곡면 형태를 갖는 편평한 셀은 데카르트 좌표를 사용하는 것이 더 정확성이 있다. 데카르트 좌표계에서 등방성 단층 셀에 대한 변형률-변위관계는 다음과 같다.^{3,4)} 본 논문에서는 면의 전단변형 γ_{yz} 만을 고려한다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_x}} (\epsilon_{0x} + z\chi_x), & \epsilon_y &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_y}} (\epsilon_{0y} + z\chi_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_x}} (\epsilon_{0xy} + z\chi_{xy}) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_y}} (\epsilon_{0yx} + z\chi_{yx}) \\ \gamma_{zx} &= 0, & \gamma_{yz} &= \frac{\gamma_{0yz}}{1 + \frac{z}{R_y}} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,

$$\epsilon_{0x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w_0}{R_x}, \quad \epsilon_{0y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w_0}{R_y}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{0xy} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{w_0}{R_{xy}}, & \epsilon_{0yx} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{w_0}{R_{xy}} \\ \gamma_{0yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{v_0}{R_y} - \frac{u_0}{R_{xy}} + \phi_y \\ \chi_x &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, & \chi_y &= \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial \phi_y}{\partial x}, & \chi_{yx} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\ \phi_x &= \frac{u_0}{R_x} + \frac{v_0}{R_{xy}} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$



〈그림 1〉 셀 단부에서의 변형 전·후의 기하학적 형태

2.2 데카르트 좌표계에서의 합응력과 합모멘트

데카르트 좌표계에서의 단층셀의 응력도-변형률 관계는 식(3)과 같이 된다.^{3,4)} 여기서, 면의 수직응력도 σ_z 는 다른 수직응력도 σ_x 와 σ_y 에 비해 작기 때문에 무시할 수 있다는 가정을 고려한다.⁵⁾

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), & \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (3)$$

그리고, 셀의 합응력과 합모멘트 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.^{3,5)}

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) dz \\ \begin{Bmatrix} N_y \\ N_{yx} \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) dz \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) z dz \\ \begin{Bmatrix} M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) z dz \end{aligned} \quad (4)$$

다른 항에 비해 $h^2/(R_x R_y)$ ($i, j = x, y$)를 갖는 항들은 작기 때문에 무시하고, 식(4)를 사용하면, 등방성 단층셀의 합응력과 합모멘트 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\epsilon_{0x} + \nu \epsilon_{0y} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right) \kappa_x \right] \\
 N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\epsilon_{0y} + \nu \epsilon_{0x} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x} \right) \kappa_y \right] \\
 N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\epsilon_{0xy} + \epsilon_{0yx} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right) \chi_{xy} \right] \\
 N_{yx} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\epsilon_{0xy} + \epsilon_{0yx} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x} \right) \chi_{yx} \right] \\
 Q_y &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} k_y^2 \gamma_{0yz} \\
 M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\kappa_x + \nu \kappa_y - \left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right) \epsilon_{0x} \right] \\
 M_y &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\kappa_y + \nu \kappa_x - \left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x} \right) \epsilon_{0y} \right] \\
 M_{xy} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left[\chi_{xy} + \chi_{yx} - \left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right) \epsilon_{0xy} \right] \\
 M_{yx} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left[\chi_{xy} + \chi_{yx} - \left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x} \right) \epsilon_{0yx} \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$

2.3 등방성 단층 셀의 기초방정식

등방성 단층 셀의 기초방정식을 유도하기 위해 헤밀턴 원리를 적용하고,⁵⁾ 회전관성항을 생략하면 다음과 같은 기초방정식과 자연 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + \frac{Q_y}{R_{xy}} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + p_x &= 0 \\
 \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{Q_x}{R_y} + \frac{1}{R_{xy}} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R_{xy}} \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + p_y &= 0 \\
 -\frac{N_{xy} + N_{yx}}{R_{xy}} - \frac{N_x}{R_x} - \frac{N_y}{R_y} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + p_n &= 0 \\
 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + m_y &= 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

a 가 일정한 위치에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_x - N_x &= 0 \quad \text{또는} \quad u_0 = 0 \\
 \bar{N}_{xy} - N_{xy} &= 0 \quad \text{또는} \quad v_0 = 0 \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} &= 0 \quad \text{또는} \quad w_0 = 0 \\
 \bar{M}_{xy} - M_{xy} &= 0 \quad \text{또는} \quad \phi_y = 0
 \end{aligned}$$

$$\bar{M}_x - M_x = 0 \quad \text{또는} \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

그리고, β 가 일정한 위치에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{yx} - N_{yx} &= 0 \quad \text{또는} \quad u_0 = 0 \\
 \bar{N}_y - N_y &= 0 \quad \text{또는} \quad v_0 = 0 \\
 \bar{Q}_y - Q_y &= 0 \quad \text{또는} \quad w_0 = 0 \\
 \bar{M}_y - M_y &= 0 \quad \text{또는} \quad \phi_y = 0 \\
 \bar{M}_{yx} - M_{yx} &= 0 \quad \text{또는} \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

3. 전단변형 γ_{yz} 를 고려한 이방성 적층셀의 기초방정식

3.1 구성방정식

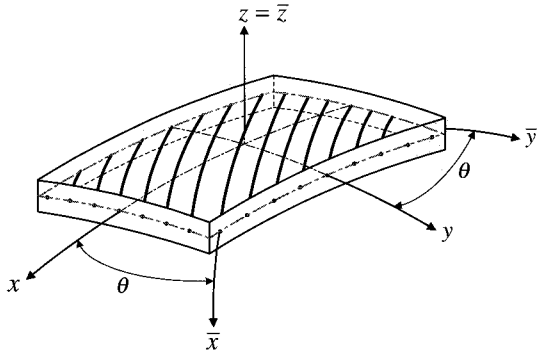
N 개로 구성된 이방성 적층에 대한 응력도-변형률 관계에서 m 번째 층에서 재료의 요소에 대한 일반화된 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.^{1),6)}

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_m \quad (9)$$

이방성 재료의 경우 탄성계수는 13개이다. 하지만, 가정 $\epsilon_z = 0$ 과 면외 전단변형률 $\gamma_{zx} = 0$ 을 고려하면 식(9)에서와 같이 7개의 \bar{Q}_i 가 이용된다. 이방성 재료의 경우에 대한 탄성계수 13개는 다음과 같다.¹⁾

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{13} &= Q_{13} \cos^2 \theta + Q_{23} \sin^2 \theta \\
 \bar{Q}_{16} &= -Q_{22} \cos \theta \sin^3 \theta + Q_{11} \cos^3 \theta \sin \theta \\
 &\quad - (Q_{12} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 \bar{Q}_{23} &= Q_{13} \sin^2 \theta + Q_{23} \cos^2 \theta \\
 \bar{Q}_{26} &= -Q_{22} \cos^3 \theta \sin \theta + Q_{11} \cos \theta \sin^3 \theta \\
 &\quad + (Q_{12} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{33} &= Q_{33}, \quad \bar{Q}_{36} = (Q_{13} - Q_{23}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta, \quad \bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

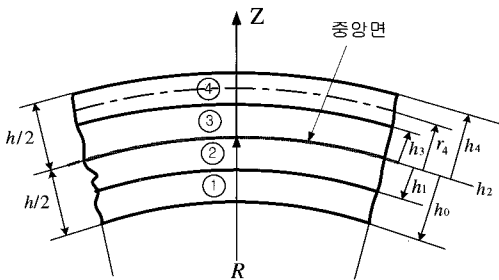


〈그림 2〉 이방성 셸의 재료축과 구조축 방향

식(10)에서, \bar{Q}_{ij} 는 재료축에서의 환원강성 Q_{ij} 로부터 구조축으로 변환시킨 강성을 표기한다. \bar{Q}_{ij} 행렬은 “변환된 환원강성행렬”이라 불리고, 그것의 양은 m번째 층의 방향과 재료 특성을 나타낸다. 또한, Q_{ij} 는 재료축의 강도이며 공학상수로 표시하면 다음과 같다.⁶⁾

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, E_1 및 E_2 는 1방향과 2방향의 탄성계수이고, ν_{12} 및 ν_{21} 는 포아송비, G_{12} , G_{23} , G_{13} 는 전단탄성계수이다.



〈그림 3〉 셸의 4개층의 기하학적 형태

그림3은 4개층을 갖는 셸의 중양면의 위치를 보여준다. 중양면의 변형률 성분의 향으로 적층셀에 대한 합응력과 합모멘트의 식을 얻기 위해서는, 셸의 두께에 대하여 반드시 $(1+z/R_i)/(1+z/R_j)$, ($i, j = x, y$)를 적분해야 한다. 이것은 식(12)와 같은 이항급수를 이용한다.⁷⁾

$$\begin{aligned} (a+x)^n &= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)를 이용하면, 적층셀의 경우는 다음과 같은 적분식을 고려할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \int_{h_{m-1}}^{h_m} \frac{\left(1 + \frac{z}{R_{xm}}\right)}{\left(1 + \frac{z}{R_{ym}}\right)} dz \\ \approx \sum_{m=1}^N \int_{h_{m-1}}^{h_m} \left(1 + \frac{z}{R_{xm}}\right) \left(1 - \frac{z}{R_{ym}} + \frac{z^2}{R_{ym}^2} - \dots\right) dz \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, R_x 와 R_y 는 셸 중양면의 곡률반경이고, 반면에 R_{xm} 과 R_{ym} 은 m번째 층 중양면의 곡률반경이다. 적분식(13)에, 그림2에서 보는 바와 같이, $R_{im} = R_i + r_m$, ($i = x, y$)를 대입하고, $h^2/R_iR_j \ll 1$, ($i, j = x, y$), $1/R_iR_j$ 를 갖는 항과 고차항을 무시하면, 식(13)은 다음과 같이 얻어진다.

$$\sum_{m=1}^N \int_{h_{m-1}}^{h_m} \frac{\left(1 + \frac{z}{R_{xm}}\right)}{\left(1 + \frac{z}{R_{ym}}\right)} dz \approx \sum_{m=1}^N \int_{h_{m-1}}^{h_m} \left[1 + z\left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y}\right)\right] dz \quad (14)$$

중양면의 변형률 성분으로 적층셀에 대한 합응력과 합모멘트식을 얻기 위하여, 등방성 단층셀의 변형률-변위 관계식(1)과 식(9)를 이용하여 구한 응력도를 합응력과 합모멘트식(4)에 대입한 다음, 가정 $h^2/R_iR_j \ll 1$, ($i, j = x, y$)을 사용하고, 각 층의 두께를 따라 적분한 후 모든 N개의 층을 합하면, 다음과 같은 이방성 적층 셸에 대한 합응력과 합모멘트식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yz} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & B_{66} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & D_{66} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \epsilon_{0y} \\ \epsilon_{0xy} \\ \epsilon_{0yz} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \chi_{yx} \end{Bmatrix} + c_0 \begin{bmatrix} -B_{11} & 0 & -B_{16} & 0 & -D_{11} & 0 & -D_{16} & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & B_{26} & 0 & D_{22} & 0 & D_{26} \\ -B_{16} & 0 & -B_{66} & 0 & -D_{16} & 0 & -D_{66} & 0 \\ 0 & B_{26} & 0 & B_{66} & 0 & D_{26} & 0 & D_{66} \\ -D_{11} & 0 & -D_{16} & 0 & -E_{11} & 0 & -E_{16} & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & D_{26} & 0 & E_{22} & 0 & E_{26} \\ -D_{16} & 0 & -D_{66} & 0 & -E_{16} & 0 & -E_{66} & 0 \\ 0 & D_{26} & 0 & D_{66} & 0 & E_{26} & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \epsilon_{0y} \\ \epsilon_{0xy} \\ \epsilon_{0yz} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \chi_{yx} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\{Q_y\} = [A_{44}]\{\gamma_{0yz}\} + c_0[-B_{44}]\{\gamma_{0yz}\} \quad (16)$$

여기서, $c_0 = (1/R_x - 1/R_y)$ 이다. 그리고 강성계수 A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} 와 E_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$), A_{ij} , B_{ij} ($i, j = 4$)은 층에 관한 적분에서 발생되는 계수이며, 다음과 같이 정의된다.¹⁾

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{m=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(m)} (h_m - h_{m-1}) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(m)} (h_m^2 - h_{m-1}^2) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{m=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(m)} (h_m^3 - h_{m-1}^3) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ E_{ij} &= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(m)} (h_m^4 - h_{m-1}^4) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ A_{ij} &= \sum_{m=1}^N k_i k_j \bar{Q}_{ij}^{(m)} (h_m - h_{m-1}) \quad (i, j = 4) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N k_i k_j \bar{Q}_{ij}^{(m)} (h_m^2 - h_{m-1}^2) \quad (i, j = 4) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, k_i 는 전단 보정계수이다. 식(17)을 살펴보면, 이방성 적층 셀이 중앙면에 대하여 기하학적 그리고 재료학적으로 대칭이 되면 B_{ij} 와 E_{ij} 는 영이 된다. 또한 이방성 적층 셀이 수직교차(cross-ply)한 다면 식(17)에서 $(\)_{16}$ 과 $(\)_{26}$ 항은 영이 되는 것을 알 수 있다.

3.2 이방성 적층 편평셀의 기초방정식

이방성 적층 편평셀의 기초방정식을 유도하기 위해서, 등방성 단층셀의 기초방정식(6)에 합응력-합모멘트 식(15)와 (16) 그리고 변형률-변위관계식(1)

을 이용하면, 변위 u, v, w 와 ϕ_y 의 항으로 나타낼 수 있다. 이것을 행렬 연산자 형태로 표시하면 다음과 같이 4×4 행렬로 나타낼 수 있다.

$$L_{ij} d_i = Q_j \quad (i, j = 1, \dots, 4) \quad (18)$$

여기서, L_{ij} 는 미분연산자이고 대칭행렬이다. 변위벡터 d_i 는 $d_i = \{u, v, w, \phi_y\}^T$ 이고, 하중 벡터 Q_i 는 $Q_i = \{-p_x, -p_y, p_n, -m_y\}^T$ 이다. 그리고, 미분연산자 L_{ij} 는 다음과 같이 유도되어진다.

$$\begin{aligned} L_{11} &= \left(A_{11} + \frac{2B_{11}}{R_x} + \frac{D_{11}}{R_x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \left(A_{16} + \frac{2B_{16}}{R_x} + \frac{D_{16}}{R_x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &+ \left(A_{66} + \frac{2B_{66}}{R_x} + \frac{D_{66}}{R_x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{A_{44}}{R_{xy}^2} + c_0 \left[- \left(B_{11} + \frac{2D_{11}}{R_x} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{E_{11}}{R_x^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(B_{66} + \frac{2D_{66}}{R_x} + \frac{E_{66}}{R_x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{B_{44}}{R_{xy}^2} \end{aligned} \quad (19-1)$$

$$\begin{aligned} L_{12} &= \left(A_{16} + \frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{11}}{R_{xy}} + \frac{D_{11}}{R_x R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12} + B_{66}}{R_x} \right. \\ &+ \left. \frac{2B_{16}}{R_{xy}} + \frac{2D_{16}}{R_x R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left(A_{26} + \frac{B_{26}}{R_x} + \frac{B_{66}}{R_{xy}} + \frac{D_{66}}{R_x R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &- \frac{A_{44}}{R_y R_{xy}} + c_0 \left[- \left(B_{16} + \frac{D_{16}}{R_x} + \frac{D_{11}}{R_{xy}} + \frac{E_{11}}{R_x R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{B_{44}}{R_y R_{xy}} \right. \\ &+ \left. \left(B_{26} + \frac{D_{26}}{R_x} + \frac{D_{66}}{R_{xy}} + \frac{E_{66}}{R_x R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (19-2)$$

$$\begin{aligned} L_{13} &= - \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R_x} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 2 \left(B_{16} + \frac{D_{16}}{R_x} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \\ &- \left(B_{66} + \frac{D_{66}}{R_x} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \left\{ \frac{1}{R_x} \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R_x} \right) + \frac{1}{R_y} \left(A_{12} + \frac{B_{12}}{R_x} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{2}{R_{xy}} \left(A_{16} + \frac{B_{16}}{R_x} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ \frac{1}{R_x} \left(A_{16} + \frac{B_{16}}{R_x} \right) + \frac{1}{R_y} \left(A_{26} + \frac{B_{26}}{R_x} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{2}{R_{xy}} \left(A_{66} + \frac{B_{66}}{R_x} \right) + \frac{A_{44}}{R_{xy}} \right\} \frac{\partial}{\partial y} + c_0 \left[\left(D_{11} + \frac{E_{11}}{R_x} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right. \\ &- \left. \left(D_{66} + \frac{E_{66}}{R_x} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \left\{ \frac{1}{R_x} \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R_x} \right) + \frac{1}{R_{xy}} \left(B_{16} \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. \frac{D_{16}}{R_x} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ \frac{1}{R_y} \left(B_{26} + \frac{D_{26}}{R_x} \right) + \frac{1}{R_{xy}} \left(B_{66} + \frac{D_{66}}{R_x} \right) + \frac{B_{44}}{R_{xy}} \right\} \frac{\partial}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (19-3)$$

$$\begin{aligned} L_{14} &= \left(B_{16} + \frac{D_{16}}{R_x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(B_{26} + \frac{D_{26}}{R_x} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \\ &+ \frac{D_{12} + D_{66}}{R_x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{A_{44}}{R_{xy}} + c_0 \left[- \left(D_{16} + \frac{E_{16}}{R_x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right. \\ &+ \left. \left(D_{26} + \frac{E_{26}}{R_x} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{B_{44}}{R_{xy}} \right] \end{aligned} \quad (19-4)$$

$$L_{22} = \left(A_{66} + \frac{2B_{16}}{R_{xy}} + \frac{D_{11}}{R_{xy}^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \left(A_{26} + \frac{B_{12} + B_{66}}{R_{xy}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{D_{16}}{R_{xy}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left(A_{22} + \frac{2B_{16}}{R_{xy}} + \frac{D_{66}}{R_{xy}^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{A_{44}}{R_y^2} \\
 & + c_0 \left[- \left(B_{66} + \frac{2D_{16}}{R_{xy}} + \frac{E_{11}}{R_{xy}^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(B_{22} + \frac{2D_{26}}{R_{xy}} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{E_{66}}{R_{xy}^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{B_{44}}{R_y} \right] \quad (19-5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{23} = & - \left(B_{16} + \frac{D_{11}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \left(B_{12} + B_{66} + \frac{2D_{16}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - \left(B_{26} + \frac{D_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{A_{16}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}} + \frac{B_{11}}{R_x R_{xy}} \right. \\
 & + \frac{B_{12}}{R_y R_{xy}} + \frac{2B_{16}}{R_{xy}^2} \left. \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{A_{12}}{R_x} + \frac{A_{22}}{R_y} + \frac{2A_{26}}{R_{xy}} + \frac{B_{16}}{R_x R_{xy}} \right. \\
 & + \frac{B_{26}}{R_y R_{xy}} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}^2} + \frac{A_{44}}{R_y} \left. \right) \frac{\partial}{\partial y} + c_0 \left[\left(D_{16} + \frac{E_{11}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right. \\
 & - \left(D_{26} + \frac{E_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{66}}{R_{xy}} + \frac{D_{11}}{R_x R_{xy}} + \frac{D_{16}}{R_{xy}^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\
 & \left. + \left(\frac{B_{22}}{R_y} + \frac{B_{26}}{R_{xy}} + \frac{D_{26}}{R_y R_{xy}} + \frac{D_{66}}{R_{xy}^2} + \frac{B_{44}}{R_y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (19-6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{24} = & \left(B_{66} + \frac{D_{16}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(B_{22} + \frac{D_{26}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (2B_{26} \\
 & + \frac{D_{12} + D_{66}}{R_{xy}}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{A_{44}}{R_y} + c_0 \left[- \left(D_{66} + \frac{E_{16}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right. \\
 & \left. + \left(D_{22} + \frac{E_{26}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{B_{44}}{R_y} \right] \quad (19-7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{33} = & D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + D_{66} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \left(\frac{B_{11}}{R_x} + \frac{B_{12}}{R_y} \right. \\
 & + \frac{2B_{16}}{R_{xy}} \left. \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 & + \frac{A}{R_{xy}} \left(\frac{A_{16}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{A_{66}}{R_{xy}} \right) + \frac{A_{11}}{R_x^2} + \frac{2A_{12}}{R_x R_y} + \frac{A_{22}}{R_y^2} - A_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 & + c_0 \left[- E_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + E_{66} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(\frac{2D_{11}}{R_x} + \frac{2D_{16}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{2D_{26}}{R_y} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2D_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - B_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{B_{11}}{R_x^2} + \frac{B_{22}}{R_y^2} - \frac{2B_{16}}{R_x R_{xy}} + \frac{2B_{26}}{R_y R_{xy}} \right] \quad (19-8)
 \end{aligned}$$

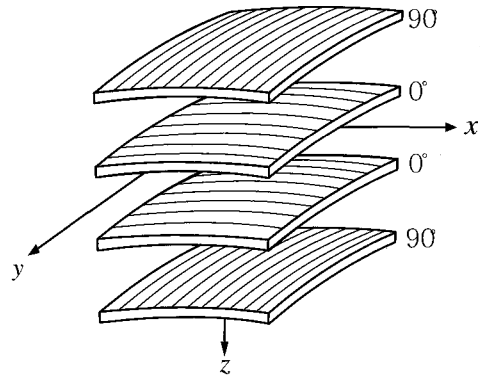
$$\begin{aligned}
 L_{34} = & - D_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - D_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} \right. \\
 & + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} \left. \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{B_{12}}{R_x} + \frac{B_{22}}{R_y} + \frac{2B_{26}}{R_{xy}} - A_{44} \right) \frac{\partial}{\partial y} + c_0 \left[E_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right. \\
 & \left. - E_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \left(\frac{D_{16}}{R_x} + \frac{D_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{D_{22}}{R_y} + \frac{D_{26}}{R_{xy}} - B_{44} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (19-9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{44} = & D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{44} \\
 & + c_0 \left(- E_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - B_{44} \right) \quad (19-10)
 \end{aligned}$$

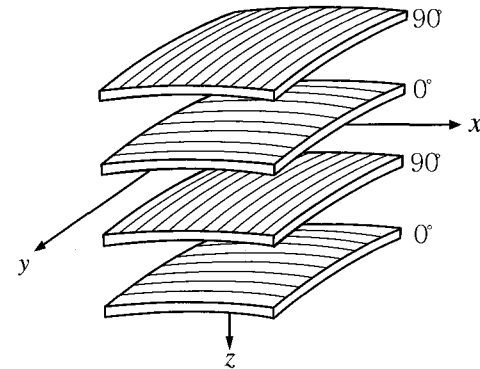
4. 이방성 적층 편평셀의 해석

셀은 판보다 더 복잡하고, 이방성 적층과 같은 복잡한 효과들은 해석하는데 어려움이 있기 때문에 판의 거동처럼 쉽게 셀의 거동을 예측하기는 어렵다. 그래서 셀의 이론적 해석은 판의 해석보다 훨씬 큰 제약을 받는다.

셀의 4변이 단순지지 경계를 갖는 경우 근사해 및 정해를 얻을 수 있기 때문에 수치해석에서 대부분 사용된다. 본 논문에서도 4변 단순지지 경계를 사용하기로 한다. 다른 경계조건에 대하여도 정해를 얻을 수는 있지만, 이론 해석을 하기에는 매우 어렵고 복잡하기 때문에 단순지지 경계조건을 사용한다. 그리고, 본 논문에서는 수직교차 적층셀에 대하여 해석을 하였는데, 이것은 간략하고 보다 정확한 해를 얻을 수 있기 때문이다. 앵글플라이 셀의 경우는 상당히 어렵고 복잡한 식의 전개가 되므로 이론해석으로 수행하기에는 다소 무리가 있다. 이 해석을 하기 위해서는 어떤 새로운 가정과 수학적 기술이 필요하다. 그림4와 그림5는 대칭 및 비대칭 수직교차 적층셀의 형상을 나타낸다.



〈그림 4〉 대칭 수직교차 적층셀의 형상



〈그림 5〉 비대칭 수직교차 적층셀의 형상

4.1 Navier해법을 이용한 단순지지 셀의 해석

셀의 모든 단부에 단순지지 경계를 고려하면 다음과 같은 조건을 이용할 수 있다.

$$x = 0, a \text{ 에서} \\ w_0 = M_x = N_x = v_0 = \phi_y = 0 \quad (20)$$

$$y = 0, b \text{ 에서} \\ w_0 = M_y = N_y = u_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

또한, 위의 경계조건식(20)과 (21)을 만족하기 위하여 x 와 y 방향으로 주곡률을 갖는 수직교차 적층 편평셀의 변위함수에 대한 근사해는 다음과 같이 선택할 수 있다.⁸⁻¹⁰⁾

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{m, n=1}^{\infty} U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ v_0(x, y) &= \sum_{m, n=1}^{\infty} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ w_0(x, y) &= \sum_{m, n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \phi_y(x, y) &= \sum_{m, n=1}^{\infty} \phi_{ymn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

그리고 셀의 곡면에 작용하는 외력과 모멘트 또는 물체효과와 같은 셀내부에 대하여도 다음과 같은 푸리에급수를 적용할 수 있다.⁸⁻¹⁰⁾

$$\begin{aligned} p_x &= \sum_{m, n=1}^{\infty} p_{xmn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ p_y &= \sum_{m, n=1}^{\infty} p_{ymn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ p_z &= \sum_{m, n=1}^{\infty} p_{zmn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ m_y &= \sum_{m, n=1}^{\infty} m_{ymn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서,

$$\begin{aligned} p_{xmn} &= \frac{4}{ab} \int_A p_x \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dA \\ p_{ymn} &= \frac{4}{ab} \int_A p_y \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dA \\ p_{zmn} &= \frac{4}{ab} \int_A p_z \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dA \end{aligned}$$

$$m_{ymn} = \frac{4}{ab} \int_A m_y \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dA \quad (24)$$

면외 전단변형률 γ_{yz} 를 고려한 이방성 적층셀의 기초방정식(6)에 변위함수식(22)와 식(23), (24)를 대입하면, 미지량 U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , ϕ_{ymn} 의 항으로 4개의 대수방정식의 조합이 산출된다. 이 방정식을 행렬형태로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$[K]_{4 \times 4} \{d\} = -\{F\} \quad (25)$$

여기서, $[K]$ 는 강성행렬, $\{d\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \phi_{ymn}\}^T$ 는 변위미정계수벡터이고, $\{F\} = \{p_{xmn}, p_{ymn}, p_{zmn}, m_{ymn}\}^T$ 는 하중계수벡터이다. 그리고 강성행렬은 $K_{ij} = K_{ji}$ 이고, 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\left(A_{11} + \frac{2B_{11}}{R_x} + \frac{D_{11}}{R_x^2}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \\ &\quad - \left(A_{66} + \frac{2B_{66}}{R_x} + \frac{D_{66}}{R_x^2}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\ &\quad + c_0 \left[\left(B_{11} + \frac{2D_{11}}{R_x} + \frac{E_{11}}{R_x^2}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(B_{66} + \frac{2D_{66}}{R_x} + \frac{E_{66}}{R_x^2}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (26-1)$$

$$K_{12} = -\left(A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12} + B_{66}}{R_x}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right) \quad (26-2)$$

$$\begin{aligned} K_{13} &= \left(\frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} + \frac{B_{11}}{R_x^2} + \frac{B_{12}}{R_x R_y}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right) \\ &\quad + \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R_x}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 + \left(B_{66} + \frac{D_{66}}{R_x}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\ &\quad - c_0 \left[\left(\frac{B_{11}}{R_x} + \frac{D_{11}}{R_x^2}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right) + \left(D_{11} + \frac{E_{11}}{R_x}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. - \left(D_{66} + \frac{E_{66}}{R_x}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (26-3)$$

$$K_{14} = -\left(B_{12} + B_{66} + \frac{D_{12} + D_{66}}{R_x}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right) \quad (26-4)$$

$$\begin{aligned} K_{22} &= -A_{66}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - A_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \frac{A_{44}}{R_y^2} \\ &\quad + c_0 \left[B_{66}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - B_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \frac{B_{44}}{R_y^2} \right] \end{aligned} \quad (26-5)$$

참고 문헌

$$K_{23} = \left(\frac{A_{12}}{R_x} + \frac{A_{22} + A_{44}}{R_y} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) + (B_{12} + B_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) + c_0 \left(\frac{B_{22} + B_{44}}{R_y} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \quad (26-6)$$

$$K_{24} = -B_{66} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - B_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{A_{44}}{R_y} + c_0 \left[D_{66} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{B_{44}}{R_y} \right] \quad (26-7)$$

$$K_{33} = -\frac{A_{11}}{R_x^2} - \frac{2A_{12}}{R_x R_y} - \frac{A_{22}}{R_y^2} - \left(\frac{2B_{11}}{R_x} + \frac{2B_{12}}{R_y} \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - A_{44} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 - D_{66} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + c_0 \left[\frac{B_{11}}{R_x^2} - \frac{B_{22}}{R_y^2} + \frac{2D_{11}}{R_x} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - B_{44} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + E_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 - E_{66} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (26-8)$$

$$K_{34} = \left(\frac{B_{12}}{R_x} + \frac{B_{22}}{R_y} - A_{44} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) + (D_{12} + D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) + c_0 \left(\frac{D_{22}}{R_y} - B_{44} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \quad (26-9)$$

$$K_{44} = -D_{66} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - A_{44} + c_0 \left[E_{66} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - E_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - B_{44} \right] \quad (26-10)$$

5. 결 론

본 연구는 면외 전단변형을 고려한 이방성 적층 편평셀의 이론해석을 탄성이론과 수학적 해석방법을 적용하여 기초방정식을 유도하였고, 유도된 기초방정식의 해를 Navier해법을 이용하여 구하였다. 이것을 이용하여 대표적인 세가지 셀, 즉 쌍곡포물형 셀, 원통형셀 및 구형셀에 다양한 변수를 적용하여 본 논문에서 제안한 이론의 결과를 기존의 결과와 비교하여 본 논문에서 제안한 이론의 타당성과 효율성에 대하여 검토하고자 한다. 다음 호에 본 논문의 수치해석 결과를 제시할 예정이다.

- 1) Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, 1st ed., E & FN Spon, 1995.
- 2) 이대길, 정광섭, 최진호, *복합재료(역학 및 제조 기술)*, 시그마프레스, 1998.
- 3) Kraus, Harry, *Thin Elastic Shells*, John Wiley & Sons, 1967.
- 4) Ugral, A. C., *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1981.
- 5) 권택진, 한상을, 최현식, 김승덕, 정명채, 서삼열, *셀 구조론* 한국전산구조공학회편, 1998, pp. 21-114.
- 6) Whitney, J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Company, Inc., 1987.
- 7) Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, Fifth Edition, John Wiley and Sons Inc., 1983.
- 8) 半谷裕彦, *平板의 基礎理論*, 彰國社, 1995.
- 9) Szilard, R., *Theory and Analysis of Plates, CLASSICAL AND NUMERICAL METHODS*, Prentice-Hall, Inc., 1974.
- 10) Leissa, A. W. and Chang, J. D., "Elastic Deformation of Thick, Laminated Composite Shells," *Composite Structures*, Vol.35, 1996, pp.153-170.
- 11) 권익노, 강주원, 권택진, "전단변형을 고려한 이방성 적층 편평 원통셀의 이론해석," *대한건축학회 논문집*, 17권 10호(통권156호), 2001. 10, pp.65-72.
- 12) Whitney, J. M. and Sun, C. T., "A Refined Theory for Laminated Anisotropic, Cylindrical Shells," *Journal of Applied Mechanics*, June 1974, pp.471-476.
- 13) Ding, Kewei and Tang, Limin, "Exact Solution for Axisymmetric Thick Laminated Shells," *Composite Structures*, Vol.46, 1999, pp.125-129.
- 14) Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates*, CRC Press, 1997.
- 15) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, 1975.