

케이블 돔 구조물의 불안정 현상에 대한 브레이싱 보강 효과

Effects by Bracing Reinforcement on the Instability Phenomenon of Cable Domes

김승덕 *

김형석 **

백인성 ***

Kim, Seung-Deog

Kim, Hyung-Seok

Baek, In-Seong

Abstract

The characteristics of structural behavior for a cable dome shows a strong nonlinearity and very sensitive by the initial imperfection. The instability phenomenon of Geiger-type cable dome structure is generated due to the in-plane twisting near the critical load level.

In this study, therefore, the effect of bracing reinforcement resisting to the in-plane twisting is investigated for the Geiger-type model reinforced by bracing. The effect of initial imperfection is also studied because the structural instability phenomenon of shell-like structure is very sensitive according to the initial condition.

keywords : cable dome, nonlinear, initial imperfection, hybrid structure, instability, bracing reinforcement

1. 서 론

인류는 보다 넓고 풍요로운 공간 속에서의 삶을 추구하면서 살아가고 있다.

이를 위한 대공간 구조물은 지속적으로 발전해 왔고, 새로운 재료와 신기술의 개발로 보다 대규모의 공간을 실현 가능케 하고 있다.

우리나라는 1988년 하계 올림픽의 성공적인 개최와 1993년에 개최된 대전 EXPO에서 대공간 구조물 분야의 기술력 확보의 중요성을 피부로 느끼게 되었고 대공간 구조물의 설계 및 시공기술의 자립, 경쟁력 확보를 위해 많은 연구를 하고 있다.

대공간 구조물의 실현 가능성을 가능하는 최대의 관건은 지붕 구조물의 자중을 극복하는 문제에 있다. 이러한 문제는 좌굴 문제에 지배되는 압축부재를 최소화하고 인장부재로 구조의 대부분을 구성하

여 인장부재의 강도를 최대로 활용함으로 극복해 나갈 수 있다. 이에 따른 케이블은 경량이고 강도가 크며 연성이 풍부하여 자유로운 형상을 가질 수 있고 다른 구조요소와 조합하여 자유로운 건축형태를 얻을 수 있다.

이와 같이 인장재 케이블과 다른 구조요소들을 조합하고 초기장력을 도입하여 강성을 부여한 Hybrid 구조물의 비약적인 발전과 함께 대공간 구조물의 건설은 세계적으로 급속히 늘어나고 있으며, 봉고사고 또한 늘고 있다.

형태저항형 구조물인 쉘구조는 주로 면내력으로 힘을 전달할 수 있게 한 구조 시스템으로 매우 우수한 역학적 특성을 가지고 있으나, 어떤 하중상태에서는 안정상태에서 불안정 상태로, 또는 불안정 상태에서 안정상태로 변화한다.

따라서, 불안정 현상으로 인한 파괴메커니즘을 파악하여 설계에 반영하는 것이 중요하다.¹⁻¹⁵⁾

본 연구에서는 쉘형 구조물을 압축재와 인장재를 연속적으로 이용하여 경량화한 Hybrid 구조물인 케

* 정회원 · 세명대학교 건축공학과 조교수

** 학생회원 · 경북대학교 건축공학과 박사과정

*** 학생회원 · 세명대학교 건축공학과 석사과정

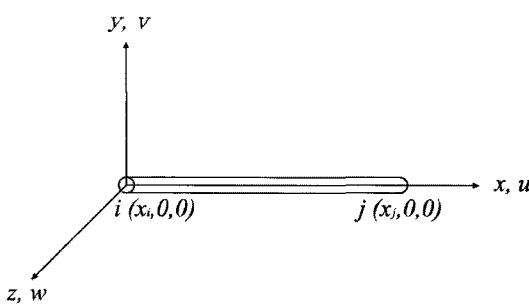
이를 둘 구조물의 불안정 현상이 면내 비틀림에 의해 발생함을 기본 Geiger 모델을 이용한 기존의 연구에서 알 수 있으므로, 이 기본 Geiger 모델에 브레이싱을 통하여 발생되는 효과를 알아본다.

즉, 기본 Geiger 모델의 mast 사이에 X형 브레이싱을 보강한 모델을 이용하여 브레이싱이 면내 비틀림에 의한 불안정 현상에 미치는 영향을 고찰한다.

또한 셀형 구조물의 구조불안정 거동이 초기조건에 매우 민감하게 반응하므로 초기형상불완전을 도입하여 초기조건에 의한 영향도 알아본다.

2. 비선형 강성방정식

국부 좌표계에서 입체 케이블 요소의 요소 좌표계를 그림 1에서와 같이 정의한다.



〈그림 1〉 케이블 요소의 요소 좌표계

요소 좌표계에서 절점의 변위 및 하중은 각각 식(1), (2)와 같이 나타낸다.

$$\mathbf{d}_x = \begin{Bmatrix} d_{xi} \\ d_{xj} \end{Bmatrix}, \mathbf{d}_y = \begin{Bmatrix} d_{yi} \\ d_{yj} \end{Bmatrix}, \mathbf{d}_z = \begin{Bmatrix} d_{zi} \\ d_{zj} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_x = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix}, \mathbf{f}_y = \begin{Bmatrix} f_{yi} \\ f_{yj} \end{Bmatrix}, \mathbf{f}_z = \begin{Bmatrix} f_{zi} \\ f_{zj} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

입체 케이블 요소에서 한 요소가 갖는 절점을 2개로 두고 요소내 변위를 식(3)과 같이 Lagrangian 보간함수 N_i 와 N_j 를 이용하여 x 에 관한 1차식으로 가정한다.

$$\begin{aligned} u(x) &= N_i d_{xi} + N_j d_{xj} \\ v(x) &= N_i d_{yi} + N_j d_{yj} \\ w(x) &= N_i d_{zi} + N_j d_{zj} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,

$$N_i = 1 - \xi, \quad N_j = \xi, \quad \xi = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

입체 케이블 요소의 변형률-변위 관계식을 Bernoulli-Euler 가정에 근거하여 기하학적 비선형을 나타내는 2차항까지를 포함한 식(4)로 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

식(3)을 식(4)에 대입하고 변형률을 절점변위로 표현하면 식(5)와 같다.

$$\varepsilon_x = \mathbf{A}_1 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (5)$$

여기서,

$$\mathbf{A}_1 = [N_{i,x} \ 0 \ 0 \ N_{j,x} \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{d} = [d_{xi} \ d_{yi} \ d_{zi} \ d_{xj} \ d_{yj} \ d_{zj}]^T$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & N_{j,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & N_{j,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & N_{j,x} \end{bmatrix} \quad (6)$$

증분구간에서의 응력-변형률 관계식은 식(7)과 같다.

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (7)$$

여기서, E 는 입체 케이블 요소의 탄성계수이다. 외력과 물체력(body force)을 받는 구조가 평형상태에 있을 때 여기에 임의의 가상변위를 추가하여 가상변위에 의해 발생한 일(δW)과 가상변위로 인해 구조체 내에 저장된 내부 변형에너지(δU)의 합이 0이 된다는 것이 가상일의 기본원리이고, 식(8)과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta U = \delta W \quad (8)$$

(8)의 δU 와 δW 를 구하면 식(9)과 같다.

$$\int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV = f^T \delta d \quad (9)$$

현재의 상태를 초기상태로 가정하고, 현상태에서의 증분에 관한 가상일의 원리를 적용하면 식(10)과 같다.

$$\int_v [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) \delta \varepsilon_x] dV = (f^{(0)} + f)^T \delta d \quad (10)$$

식(5)으로부터 $\delta \varepsilon_x$ 를 구하면 식(11)과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= A_1 \delta d + d^T B^T B \delta d \\ &= (A_1 + d^T B^T B) \delta d \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)을 식(10)에 대입하고, 적분영역 dV 를 일정면적 A 와 일정길이 l 로 치환하면 식(12)와 같다.

$$\begin{aligned} Al [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x)(A_1 + d^T B^T B)] \delta d \\ = (f^{(0)} + f)^T \delta d \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)에서 δd 는 임의의 가상변위이므로 위 식이 성립되려면 등식 양변의 δd 의 앞부분이 같아야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} Al [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x)(A_1 + d^T B^T B)] \\ = (f^{(0)} + f)^T \end{aligned} \quad (13)$$

식(5)를 식(7)에 대입하면, 식(14)와 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \varepsilon_x = E \left(A_1 d + \frac{1}{2} d^T B^T B d \right) \\ &= E A_1 d + \frac{1}{2} E d^T B^T B d \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)를 식(13)에 대입하면, 식(15)와 같다.

$$\begin{aligned} (f^{(0)} + f)^T &= Al \{ (\sigma_x^{(0)} + E A_1 d \\ &+ \frac{1}{2} E d^T B^T B d)(A_1 + d^T B^T B) \} \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)에서 d 에 관한 2차항 이상을 소거하고, 양변행렬에 전치를 취하면 식(16)과 같다.

$$\begin{aligned} f^{(0)} + f &= Al(A_1^T \sigma_x^{(0)}) \\ &+ Al(\sigma_x^{(0)} B^T B) d \\ &+ AlE(A_1^T A_1) d + \text{고차항} \end{aligned} \quad (16)$$

식(16)에서 d 에 관한 고차항의 소거로 인하여 생기는 불평형력(residual force)을 식(17)과 같이 정의한다.

$$r = Al A_1^T \sigma_x^{(0)} - f^{(0)} \quad (17)$$

식(17)을 식(16)에 대입하면, 식(18)과 같다.

$$\begin{aligned} f - r &= AlE(A_1^T A_1) d \\ &+ Al(\sigma_x^{(0)} B^T B) d \\ &= (k_E + k_G) d \end{aligned} \quad (18)$$

여기서,

$$k_E = AlE(A_1^T A_1) : \text{요소의 탄성 강성행렬}$$

$$k_G = Al(\sigma_x^{(0)} B^T B) : \text{요소의 기하 강성행렬}$$

절점하중벡터, 불평형력벡터, 절점변위벡터를 변환 매트릭스 T 를 이용하여 전체좌표계에서의 값으로 변환하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f = TF, \quad r = TR, \quad d = TD \quad (19)$$

식(19)를 식(18)에 대입하면 식(20)과 같다.

$$T(F - R) = [k_E + k_G] TD \quad (20)$$

따라서, 전체좌표계에서의 증분구간에 관한 강성매트릭스는 다음과 같이 구해진다.

$$F - R = [K_E + K_G] D \quad (21)$$

여기서,

$$K_E = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_E \mathbf{T}$$

전체 좌표계에서의
탄성 강성 매트릭스

$$K_G = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_G \mathbf{T}$$

전체 좌표계에서의
기하 강성 매트릭스

3. 해석 모델

본 연구에서는 Geiger형 케이블 돔을 해석모델로 선택한다. Geiger형 케이블 돔 구조물은 경량이고 유연하므로, 면내 비틀림으로 인한 붕괴의 위험성이 있다. 이에 대한 브레이싱 보강효과를 살펴보기 위해 Geiger 기본모델의 mast 사이에 X형 브레이싱을 보강한 그림 3과 같은 모델을 해석대상으로 하여 Geiger 기본모델의 해석결과와 비교 분석한다.¹⁰⁾

〈표 1〉 절점 좌표 (단위 : cm)

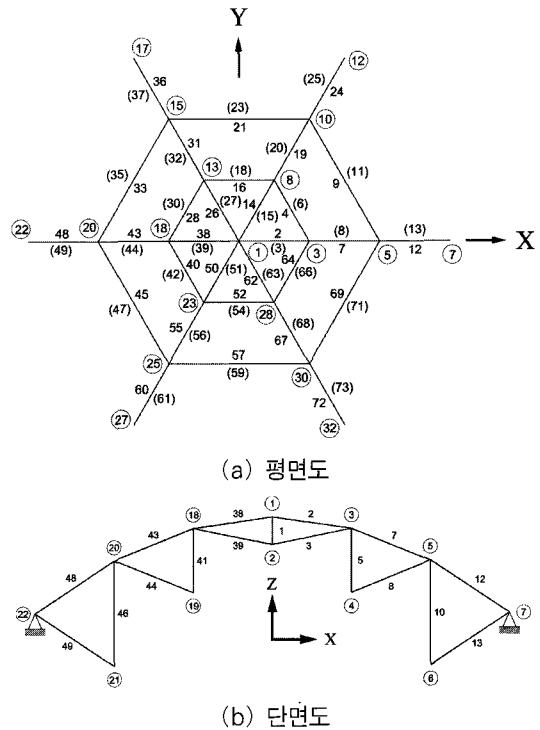
절점번호	1	2	3	4	5	6	7
X 좌표	0.0	0.0	20.0	20.0	40.0	40.0	60.0
Z 좌표	21.0	15.0	18.5	4.50	11.5	-11.5	0.0

〈표 2〉 부재의 단면적 (단위 : cm²)

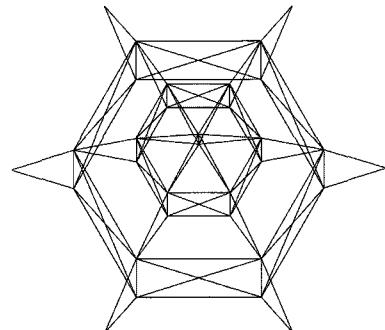
부재번호	1	2	3	4	5	6	7
단면적	1.00	0.01	0.01	0.01	1.00	0.02	0.02
부재번호	8	9	10	11	12	13	
단면적	0.02	0.01	1.00	0.04	0.04	0.04	

그림 2는 해석 모델의 절점 및 요소번호를 나타내고, 각 절점의 좌표를 표 1에 나타낸다. 여기서 모델의 형상이 축대칭이므로 한 개의 strip만을 나타내었다. 또 각 부재의 물성치는, 케이블과 mast 모두 영 계수 $E=1.6 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, 밀도 $\rho=7.85 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3$ 이고, 단면적은 표 2에서와 같다.

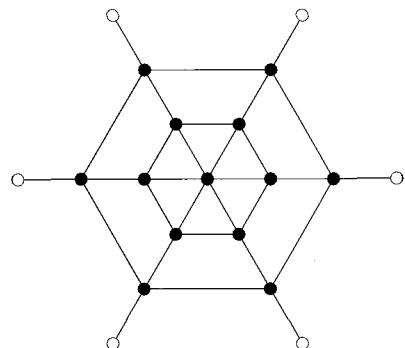
경계조건은 외곽의 절점들인 7, 12, 17, 22, 27, 32 등 6개 절점을 고정시키고, 나머지 절점은 자유로 한다.



〈그림 2〉 해석모델



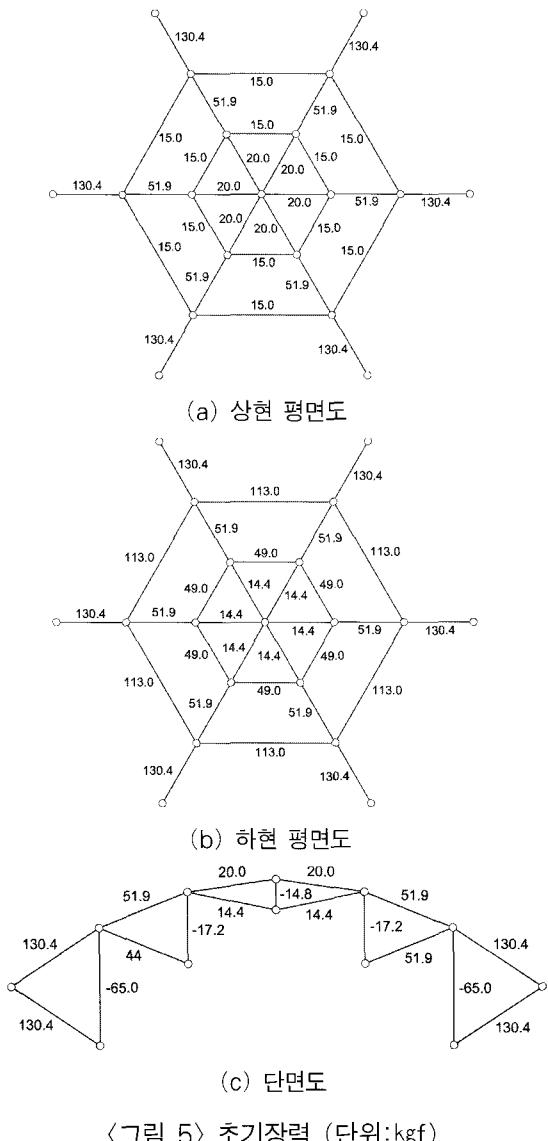
〈그림 3〉 브레이스 보강 Geiger 모델의 투시도



〈그림 4〉 하중모드

하중조건은 그림 4와 같이 절점 전체에 -Z방향으로 동일한 하중이 작용하는 전체 축대칭 하중모드로

가정하였다. 여기서, ●는 하중이 작용되는 절점을 ○는 하중이 작용되지 않는 절점을 각각 나타낸다. 케이블 돔 구조물은 초기 불안정 구조물이므로 구조물의 안정화를 위해 초기장력을 도입하여야 한다. 초기장력량을 그림 5에 나타낸다.



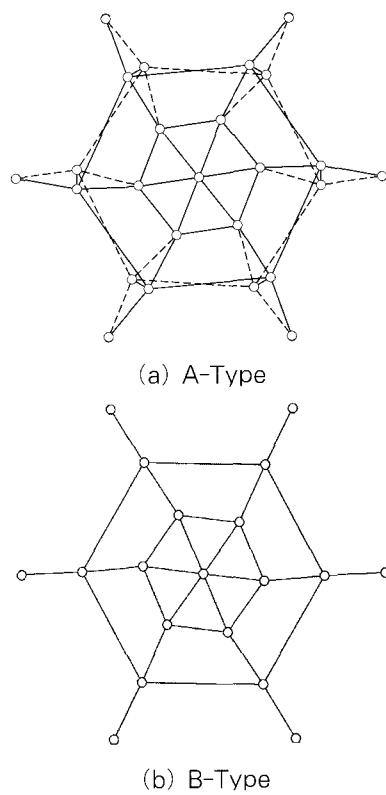
4. 해석결과 및 고찰

비선형해석의 정적 해석방법으로는, 접선강성방정식을 이용하여 step by step으로 해석을 수행하여 임계하중을 찾는다. 본 연구에서는 1번 절점을 $-Z$ 방향으로 0.01cm 씩 변위를 증분시켜 각 step에서의 하중계수를 구하는 변위증분법을 이용하였다. 정적 불

안정해석에서 분기좌굴(bifurcation)을 파악하기 위해서는 초기형상불완전(initial imperfection)을 도입하여야 한다.

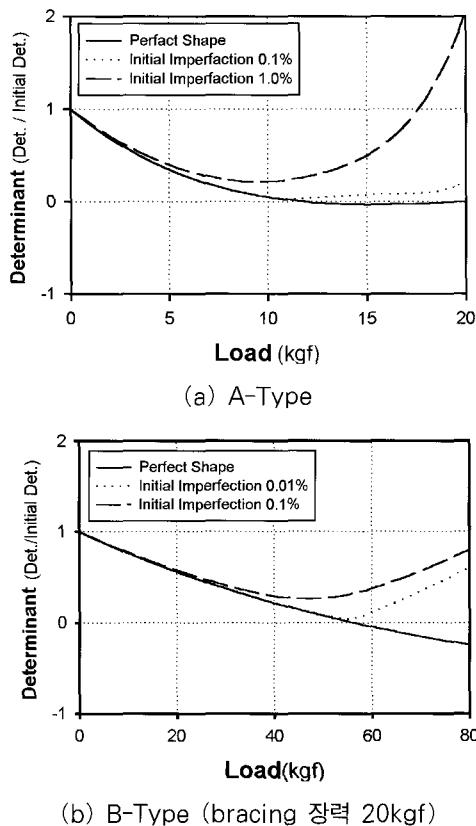
초기형상불완전은 접선강성행렬의 초기증분에 대한 고유치 해석을 수행하여 얻어지는 1차 고유벡터를 선택하여 이를 초기형상불완전 모드로 한다. 이를 나타내면 그림 6과 같다. 여기서 A-Type은 기본 Geiger 모델이고 B-Type은 브레이싱을 보강한 모델이다. 실선은 상부 부재를, 점선은 하부 부재를 각각 나타낸다.

본 연구에서는 해석 모델의 span을 기준으로 하여, span의 0.01% 및 0.1%를 초기형상불완전량으로 도입하고, 이를 결과를 완전형상 모델의 결과와 비교한다.



정적 임계하중을 구하기 위해 접선 강성매트릭스의 행렬식(determinant)을 각 증분 구간에서 구해본다. A-Type 및 B-Type을 완전형상인 경우와 0.01%, 0.1%의 초기불완전을 도입하였을 경우로 나누어 행렬식을 구하면 그림 7과 같다.

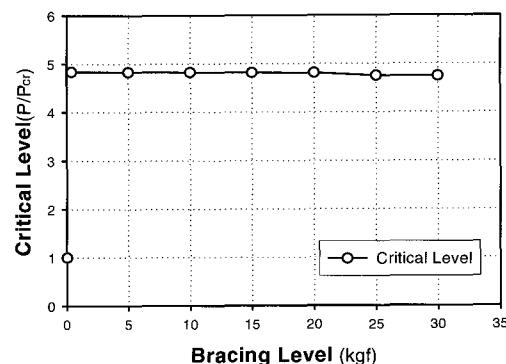
완전형상일 경우, 행렬식 값이 0을 나타내는 점은, A-Type에서는 절점당 11.9kgf(총하중은 154.7kgf)이고, B-Type에서는 절점당 56.96kgf(총하중은 740.48kgf)이다. 이를 값이 정적 분기 좌굴하중으로 브레이싱 보강 후, 분기 좌굴하중이 약 4.8배 증가함을 알 수 있다. 초기형상불완전을 도입한 경우는 행렬식 값이 0을 향해 접근하다 0 근방에서 되돌아가는 것을 알 수 있고, 초기불완전량이 클수록 이러한 현상은 뚜렷이 나타난다. 이는 초기형상불완전을 도입하면 불안정점 부근에서 새로운 직교좌굴모드의 출현과 함께 변형모드가 변하게 되므로 점차 강성이 안정화해 갈 수 있기 때문이다. 또 초기형상불완전량이 클수록 강성의 안정화가 빠르게 진행됨을 알 수 있으며 이러한 현상은 B-Type 보다 A-Type에서 뚜렷하게 나타난다. 따라서, 브레이싱을 보강한 Geiger형 케이블 돔의 불안정 현상은 평형궤도의 분기현상에 의해 일어남을 알 수 있다.



〈그림 7〉 하중증가에 따른 강성변화

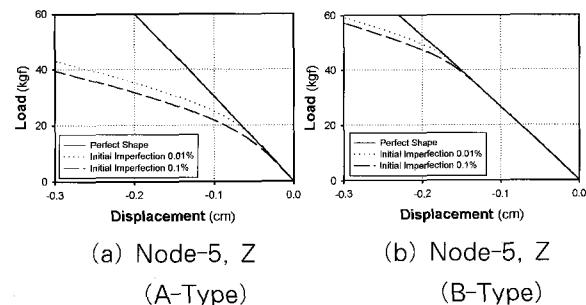
다음은 브레이싱의 장력변화에 따른 임계하중의 변화를 살펴본다.

그림 8에서는 브레이싱 보강 모델의 임계하중을 기본 모델의 임계하중으로 일반화시킨 값을 나타낸다. 즉, bracing level의 0에서의 critical level은 A-Type에서의 임계하중을 나타낸다. 임계하중은 브레이싱을 보강함으로 인해 4.8배 증가함을 알 수 있고, 브레이싱의 장력이 증가할수록 임계하중은 미소하게 감소하나, 거의 변화가 없음을 알 수 있다. 따라서, 임계하중은 브레이싱의 유무에 따라서는 크게 변화 하지만, 브레이싱 장력의 크기에는 큰 영향을 받지 않음을 알 수 있다.



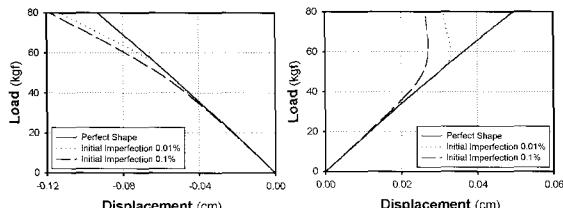
〈그림 8〉 브레이싱의 장력변화에 따른 Critical Level의 변화

다음은 브레이싱을 보강한 모델의 정적 불안정 해석결과와 기본모델의 결과를 고찰한다. 돔 상부 절점인 #5의 Z방향 변위를 하중변화에 따라 나타내면 그림 9에서와 같다. 하중의 증가에 따라 수직 변위도 점차 증가하는 것을 알 수 있고, 초기형상불완전을 도입한 경우는 임계하중 부근에서 평형 궤도가 바뀌는 것을 알 수 있다. 또 초기형상불완전량이 클수록 평형궤도도 급격히 바뀌는 softening 현상이 A-Type 보다 적게 나타남을 알 수 있다.



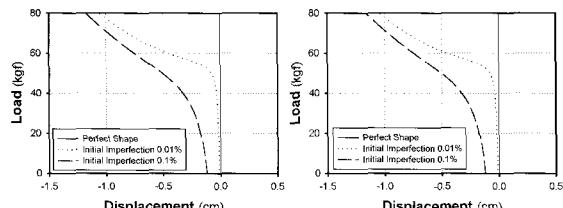
〈그림 9〉 수직 방향 변위-하중 곡선

절점 #3, #4, #5, #6의 X 및 Y 방향의 수평변위를 그림 10에 나타내었다. 절점 #3과 #4의 X 방향 변위는 서로 반대 방향으로 진행하고 있고, Y 방향 변위는 같은 방향으로 진행함을 알 수 있다. 즉, mast #5의 상부는 돔의 중심축 방향으로 기울고, 하부는 바깥 방향으로 기울고 있다.



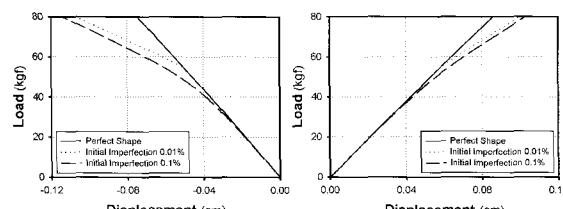
(a) Node-3, X

(b) Node-4, X



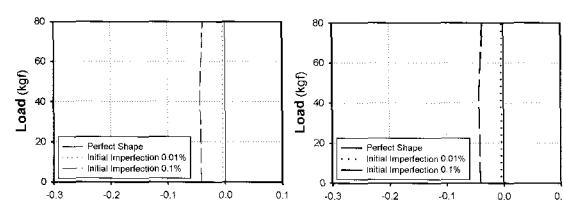
(a) Node-3, Y

(b) Node-4, Y



(c) Node-5, X

(d) Node-6, X



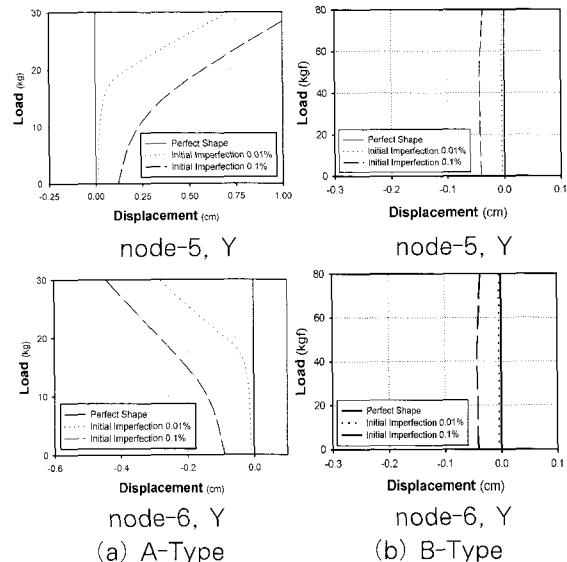
(c) Node-5, Y

(d) Node-6, Y

〈그림 10〉 수평 방향 변위-하중곡선 (B-Type)

절점 #5와 #6의 X 방향 변위도 서로 반대 방향으로 진행하고 있으며, Y 방향 변위는 서로 같은 방향으로 진행함을 나타낸다. 즉 mast #5, #10의 상부 및 하부는 hoop방향으로 서로 같은 방향으로 회전하고 있다. 단, mast #5, #10의 hoop방향 회전은 같지만, mast #5의 회전이 더 크게 나타난다. 또 임계하중이 56.9kgf임을 고려하면, 내부 링의 mast #5가 먼저 비틀리며 좌굴을 시

작한 후 외부 링인 mast #10이 비틀어지는 것을 알 수 있다. 그림 11에서 나타나듯이 절점 #5,#6의 Y방향 수평변위는 A-Type에서는 반대방향으로 이동하고 B-Type에서는 같은 방향으로 이동함을 알 수 있다. 그림 6, 초기 형상불완전 모드에서 그 현상을 확인할 수 있다.



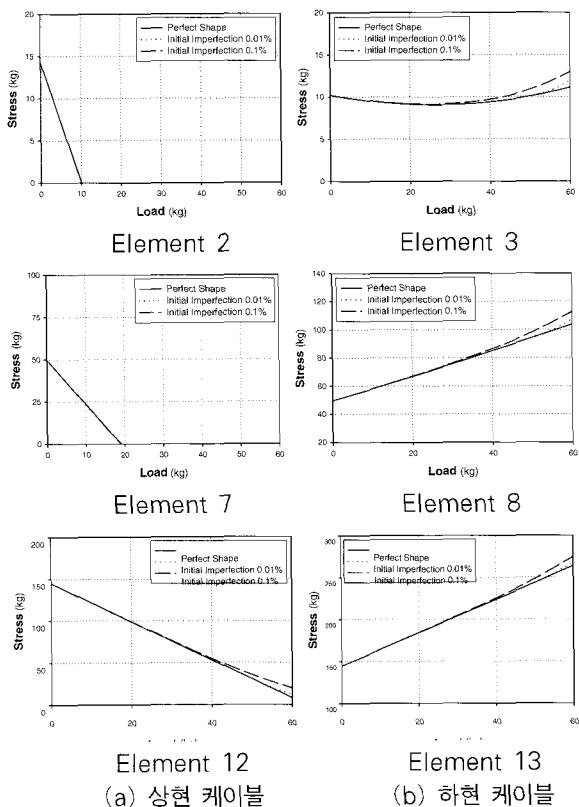
node-5, Y

node-5, Y

(a) A-Type

(b) B-Type

〈그림 11〉 Y방향 변위-하중곡선



Element 2

Element 3

Element 7

Element 8

Element 12

Element 13

(a) 상현 케이블

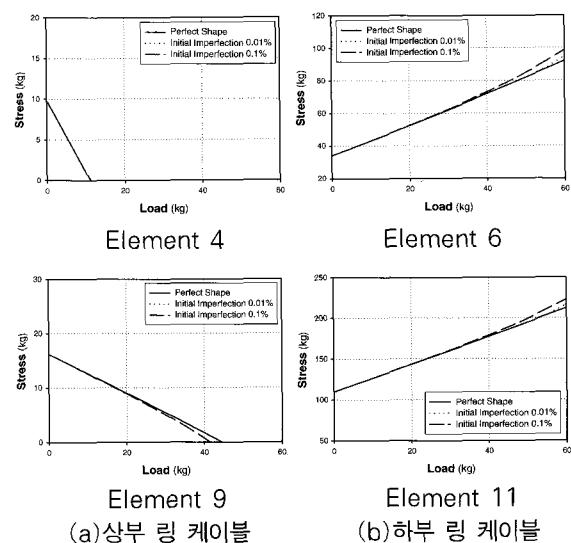
(b) 하현 케이블

〈그림 12〉 상·하현 케이블의 장력 변화 (B-Type)

다음은 케이블의 장력변화를 알아본다.
하중변화에 따라 상현 케이블인 요소 #2, #7, #12
와 하현 케이블인 요소 #3, #8, #13의 장력을 그림
12에 각각 나타낸다.

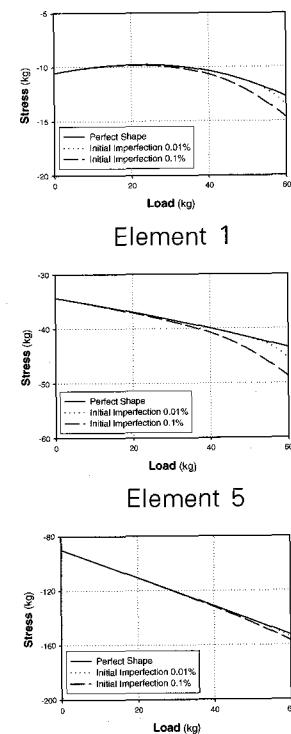
상현 케이블은 A-Type과 B-Type 모두 하중 증가
에 따라 장력이 감소하고 하현 케이블은 하중 증가
에 따라 장력이 증가 하나 B-Type 요소 #3에서는 증
가량이 작게 나타난다. 그 이유는 절점 #3의 수직방
향 변위가 상대적으로 절점 #1의 수직 변위보다 작
기 때문이다.

상부 링 케이블인 요소 #4, #9와 하부 링 케이블인
요소 #6, #11의 장력변화를 그림 13에 각각 나타낸다.
상부 링 케이블은 -측으로, 하부 링 케이블은 +측으로
변화하며, 이는 상부 링은 수축하고 하부 링은 늘어
나는 것을 의미한다. 그림 10에서 각 절점의 X방향
변위를 고찰하여도 이러한 현상을 알 수 있다.



〈그림 13〉 상 · 하부 링 케이블의 장력 변화(B-Type)

끝으로 mast의 장력변화를 그림 14에 나타낸다.
축대칭 중심축인 mast #1은 +측으로 약간 이행하
다가 -측으로 이행한다. 즉 거의 이행이 없다. 나머
지는 -측으로 이행함을 알 수 있다. 압축력을 받는
mast #1이 이와 같이 이행하는 것은 A-Type과는 달
리 절점 #3의 수직변위가 상대적으로 절점 #1 보다
작기 때문에 하현 케이블 요소 #3의 장력의 변화가
거의 없고, 따라서 mast #1의 압축력의 변화가 작은
것으로 판단된다.



Element 10
(a) A-Type
(b) B-Type

〈그림 14〉 Mast의 내력변화

또 초기형상불완전을 도입한 경우, mast #5 및
#10의 장력이 임계점을 지나더라도 A-Type과는 달
리 +측으로 이행하지 않고 서서히 -측으로 이행하
며, 특히 이러한 현상이 mast #5에서 더욱 뚜렷이
나타나는 것을 알 수 있다. 이는 임계하중 점 부근에
서 새로운 직교 좌굴모드의 출현과 함께 구조물 전
체가 면내 비틀림에 의해 급격히 불안정 상태로 이
행하려는 것을 브레이싱이 막아 줌으로 mast내부의
압축력이 증가하기 때문이다.

이상을 정리하면, 본 연구에서 선택한 Geiger 모
델의 분기현상은 케이블 둘의 면내 비틀림에 의해
발생함을 알 수 있다. 또한 브레이싱을 첨가함으로
면내 비틀림에 의한 불안정 상태로의 이행을 막아
줌으로 임계하중 값이 증가함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 기본 Geiger 모델에 브레이싱을
보강한 모델을 대상으로 하여 불안정 현상을 규명하

고, 브레이싱이 면내비틀림에 의한 불안정 현상에 미치는 영향을 알아보았다. 본 연구에서 얻은 결과는 다음과 같다.

1. 브레이싱을 보강한 Geiger형 케이블 돔의 불안정 현상은 평형궤도의 분기현상(bifurcation)에 의해 일어남을 알 수 있다.
2. 초기형상불완전을 도입하면 불안정점 부근에서 새로운 직교좌굴모드의 출현과 함께 변형모드가 변하게 되므로 점차 강성이 안정화된다. 초기형상불완전량이 클수록 강성의 안정화가 빠르게 진행됨을 알 수 있었으며 브레이싱 보강 모델에서 이러한 현상이 보다 뚜렷하게 나타났다.
3. 브레이싱을 보강해 주면 면내 비틀림에 의한 불안정 상태로의 이행을 막아주기 때문에 임계하중 값이 증가함을 알 수 있었다. 또 임계하중은 브레이싱의 초기장력이 클수록 낮게 나타나지만, 큰 영향을 받지 않음을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- 1) Suhara, J., "Snapping of shallow spherical shells under static and dynamic loadings," ASRL TR 76-4, Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Cambridge, Mass., June 1960.
- 2) Hsu, C. S., "On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions," Int. J. Engng Sci., Vol.4, No.1, 1966, pp.1-21
- 3) Hangai, Y. and Kawamata, S., "Nonlinear analysis of space frames and snap-through buckling of reticulated shell structures," Proceedings of the Pacific Symposium-Part II On Tension Structures and Space Frames, Tokyo and Kyoto, 17-23, October 1971, pp. 9-4.
- 4) Holzer, S. M., "Static and dynamic stability of reticulated shells," Stability of Structures under Static and Dynamic Loads, Proceedings of an International Colloquium, Washington, D.C., May 1977, ASCE Publications, pp. 27-39.
- 5) Batoz, Jean-Louis and Dhatt, G., "Incremental displacement algorithms for nonlinear problems," Internat. J. Numerical Meths. Vol. 14, 1979, pp. 1262-1267.
- 6) Waszczyzyn, Z., "Numerical problems of nonlinear stability analysis of elastic structures," Computers & Structures, Vol. 17 No. 1, 1983, pp. 13-24.
- 7) Pecknold, D. A., Ghaboussi, J. and Healey, T. J., "Snap-through and bifurcation in a simple structure," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, No. 7, July, 1985, pp. 909-922.
- 8) See, T. and McConnel, R. E., "Large displacement elastic buckling of space structure," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, No. 7, May, 1986, pp. 1052-1069.
- 9) Hill, C. D., Blandford, G. E. and Wang, S. T., "Post-buckling analysis of steel space trusses," Journal of structural engineering," Vol. 115, No. 4, April, 1989, pp. 900-919.
- 10) 林曉光, 複合ケーブル構造の構造安定解析, 修士學位論文, 東京大學, 1990.
- 11) 金勝德, 偏平構造物の動的安定に関する研究, 博士學位論文, 東京大學, 1990.
- 12) Kim, S. D., Tanami, T. and Hangai, Y. "Direct and indirect snapping behaviors of shallow truss models," Bull. ERS, No.23, 1990, pp.73-86
- 13) 김승덕, "기하학적 비선형을 고려한 얇은 타원 포물곡면쉘의 동적 불안정 현상," 대한건축학회 논문집, 제10권 6호, 1994, pp.121-132.
- 14) 김승덕, "얇은 타원포물곡면쉘의 동적 불안정 현상의 규명을 위한 비선형 동적 응답의 스펙트럼 분석," 전산구조공학 논문집, 제 8 권 2호, 1995, pp.153-161.
- 15) Kim, Seung-Deog, et al., "Dynamic Instability of Shell-Like Shallow Trusses Considering Damping," Computers & Structures, Vol. 64, No. 1-4, 1997, pp.481-489.