

확장 칼만 필터를 이용한 트러스 구조물의 손상 추정 - Damage Assessment of Truss Structures Using Extended Kalman Filter -



서 일 교*
Suh, Ill-Gyo

1. 서 론

대부분의 기존 구조물들은 여러 가지 외부 환경이나 지진, 폭풍 등의 자연재해에 의해 손상을 입고 그 수명이 다할 때까지 그 손상이 누적된다. 따라서 기존 구조물의 내구년한을 합리적으로 예측할 필요성이 최근 들어 널리 인식되고 있으며 이에 따라 기존 구조물을 보수, 보강 혹은 해체를 결정하기 위한 지원 시스템의 구축이 요구되고 있다. 따라서 정기적 혹은 지진 직후에 모니터링을 통하여 구조물의 손상위치와 손상도를 추정하는 것은 구조물의 내구년한을 예측하는 데 매우 중요하다. 그러나 손상부를 파악하고자 하는 경우 그 위치나 정도를 정확히 알아내는 것은 매우 어려운 일이다. 이러한 기존 구조물 내부의 손상부 추정 등을 수행하는 데 역문제 해석은 매우 유용하며 최근 많은 관심을 끌고 있다^{7, 8)}.

최근 컴퓨터를 이용한 計算力學이 눈부시게 발전해온 가운데 지금까지 주로 대상으로 해온 문제는 變形, 熱, 流動이라는 力學的 場(field)에 어떤 원인이 주어졌을 때 장의 거동으로서의 결과를 얻는 것이다. 이와 같은 장의 해석을 순해석(Forward analysis)이라 한다. 이에 반해 어떤 장에 관해서 얻어진 정보를 기본으로 그것이 생기게 한 장의 미지

량을 추정하는 문제를 逆問題(Inverse problem)라 한다. 이러한 역문제는 다방면의 여러 분야에 존재하여서 장의 物性値의 同定問題(Identification), 열원을 외력으로 하는 소스의 推定問題(Estimation), 내부 결함형상 동정문제 등 열전도, 고체 및 유체역학분야 뿐만이 아니라 의료분야의 X선 단층법 혹은 초음파진단 등도 그 대표적인 것이다^{4, 5)}. 기존 구조물의 손상도 추정문제도 이러한 역문제 중의 하나에 속한다.

한편 역문제를 풀 때 필요한 보조 정보량은 일반적으로 random noise를 포함하고 있는 관측량(계측량)으로서 주어지는 경우가 많기 때문에 확률적으로 취급할 필요가 있다. 여기서 역문제를 확률 dynamic system으로서 수리모델화하는 경우 추정, 동정기법으로서 시스템과 제어분야 뿐만이 아니라 많은 분야에서 응용되고 있는 칼만 필터(Kalman filter)를 적용할 수 있다^{9, 10)}. 지금까지 칼만 필터 이론은 지반공학을 중심으로 탄성계수의 추정이나 탄성체내에 존재하는 미지 공동결합 추정 등에 주로 적용되어 왔다¹¹⁻¹³⁾.

따라서 본 고에서는 구조물 내부의 손상부 추정을 수행하는 데 적용되는 역문제 해석을 대상으로 확장 칼만 필터 이론을 적용하여 트러스 구조물의 부재 손상위치와 손상도를 추정할 수 있는 추정법을 소개하고자 한다¹⁴⁻¹⁶⁾.

* 제주대학교 건축공학과 교수

2. 확장 칼만 필터 이론

확장 칼만 필터 이론은 선형 시스템을 대상으로 하는 칼만 필터 이론을 비선형 문제에 확장 적용시킨 필터이론으로, 비선형 벡터함수를 상태벡터의 추정량의 주위에서 Taylor 전개하고 고차항을 무시하여 선형화시킨 다음의 이산 시간 확률시스템을 대상으로 한 것이다.

확장 칼만필터의 상태방정식, 관측 방정식과 확률적 정의는 다음과 같다.

상태방정식

$$z_{t+1} = \Phi_t(z_t) + \Gamma_t(z_t) \omega_t \quad (1)$$

관측방정식

$$y_t = M_t(z_t) + \nu_t \quad t \geq 0 \quad (2)$$

여기서 $z_t, y_t, \omega_t, \nu_t$ 는 각각 t 시간 스텝에서의 상태벡터, 관측벡터, 시스템 잡음벡터 및 관측 잡음벡터이고, Φ_t 는 狀態 遷移행렬 (state transition matrix), Γ_t 는 구동행렬 (driving matrix), M_t 는 관측행렬(observation matrix)이라 한다. 여기서 $z_t, y_t, \omega_t, \nu_t$ 는 확률변수 벡터이고, Φ_t, Γ_t, M_t 는 기지의 확정행렬로 한다. 또한 확률변수 벡터의 통계적 성질을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} E\{z_0\} &= \bar{z}_0, E\{\omega_t\} = E\{\nu_t\} = 0, \\ E\{(z_0 - \bar{z}_0)(z_0 - \bar{z}_0)^T\} &= R_0 \\ E\left\{\begin{pmatrix} \omega_t \\ \nu_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_t & \nu_t \end{pmatrix}\right\} &= \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \delta_{tt} \\ E\{\omega_t, z_0^T\} &= E\{\nu_t, z_0^T\} = 0 \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, E는 기대치 연산기호, δ_{tt} 은 kronecker 델타이며 z_0 는 상태벡터 z_t 의 초기치벡터, S, Q, R_0 는 각각 시스템잡음 공분산행렬, 관측잡음 공분산행렬 및 추정오차 공분산행렬을 나타낸다.

이상의 선형화된 이산시간 확률시스템에 대한 확장 Kalman filter는 다음과 같다.

〈필터방정식〉

$$\hat{z}_{t/t} = \hat{z}_{t/t-1} + B_t \{y_t - M_t \hat{z}_{t/t-1}\} \quad (4)$$

$$\hat{z}_{t+1/t} = \Phi_t \hat{z}_{t/t} \quad (5)$$

〈Kalman(filter) Gain〉

$$B_t = \hat{R}_{t/t-1} M_t^T (M_t \hat{R}_{t/t-1} M_t^T + Q_t)^{-1} \quad (6)$$

〈추정오차의 공분산 행렬방정식〉

$$\hat{R}_{t/t} = \hat{R}_{t/t-1} - B_t M_t \hat{R}_{t/t-1} \quad (7)$$

$$\hat{R}_{t+1/t} = \Phi_t \hat{R}_{t/t} \Phi_t^T + \Gamma_t S_t \Gamma_t^T \quad (8)$$

〈초기치〉

$$\hat{z}_{0/-1} = \bar{z}_0 \quad (9)$$

$$\hat{R}_{0/-1} = R_0 \quad (10)$$

여기서, $\hat{z}_{t/t}$ 는 t 스텝에서의 관측벡터 y_t 에 의해 얻어지는 z_t 의 추정치이고, $\hat{R}_{t/t}$ 는 $\hat{z}_{t/t}$ 의 추정오차 공분산행렬이다.

3. 확장 칼만 필터에 의한 손상 추정법

3.1 상태방정식과 관측 방정식

다양한 원인에 의하여 발생된 구조물의 손상은 그 원인에 관계없이 기하학적 혹은 재료적인 성질의 변화를 초래한다. 구조물의 손상평가 시, 구조모델의 파라메타 중 변화하는 량으로서 강성, 강도, 에너지 소산능력 및 감쇠의 증가 등을 들 수 있으나 본고에서는 구조물내 각 부재의 손상을 강성의 저하로서 평가한다.

n개의 부재로 구성되는 트러스 구조물의 각 부재의 강성 $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ 을 미지의 상태벡터 x 로 하면 관측 데이터와 미지량인 강성은 비선형으로 되기 때문에 앞에서 제시한 비선형 칼만 필터 시스템을 적용시킬 수 있다. 이에 따른 시스템은 다음과 같이 모델화 할 수 있다.

$$y = m(z) + v \quad (11)$$

여기서, y 는 관측벡터로서 고유진동수 및 모드진폭을, v 는 관측잡음 벡터를 나타낸다. 또한 트러스 구조물에서 상태량 즉 부재의 강성은 정수이어서 시간적으로 변화하지 않는 파라미터이기 때문에 시간적 천이구조(遷移構造)를 갖지 않게 된다. 따라서 시스템 잡음 ω_t 는 고려할 필요가 없으므로 시스템의 상태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z_{t+1} = I z_t \quad (12)$$

여기서 아래첨자 t 는 반복계산에서 각 스텝을 나타내며, I 는 단위행렬을 나타낸다.

또한 식(12)에서 주어진 각 스텝에서의 상태벡터로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_t = m_t(z_t) + v \quad (13)$$

여기서 t 는 필터링 횟수를 나타낸다. 그리고, 초기치 \bar{z}_0 , 추정오차 공분산매트릭스 R_0 는 일반적으로 모르기 때문에 초기치를 가정하여 계산한다. 따라서 계산과정에서 얻어지는 추정치는 가정에 의한 값 \bar{z}_0 와 R_0 에 의존하게 된다.

3.2 감도행렬의 계산

선형화에 대응하는 감도행렬 M_t 는 다음과 같다.

$$M_t = \left(\frac{\partial m_t(z_t)}{\partial z_t} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial y_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial y_2}{\partial z_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_m}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial y_m}{\partial z_n} \end{bmatrix} \quad (14)$$

식(14)는 각 스텝의 z_t 에 의존하기 때문에 필터링 과정에서 반복 계산되어야 한다. 여기서 감도행렬의 성분은 다음과 같이 차분 근사에 의해 구할 수 있다.

$$\left(\frac{\partial y_j}{\partial z_j} \right)_{t/t-1} \cong \frac{1}{\Delta z_j} \{ y_j(z_1, z_2, \dots, z_j + \Delta z_j, \dots, z_n) - y_j(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_n) \} \quad (15)$$

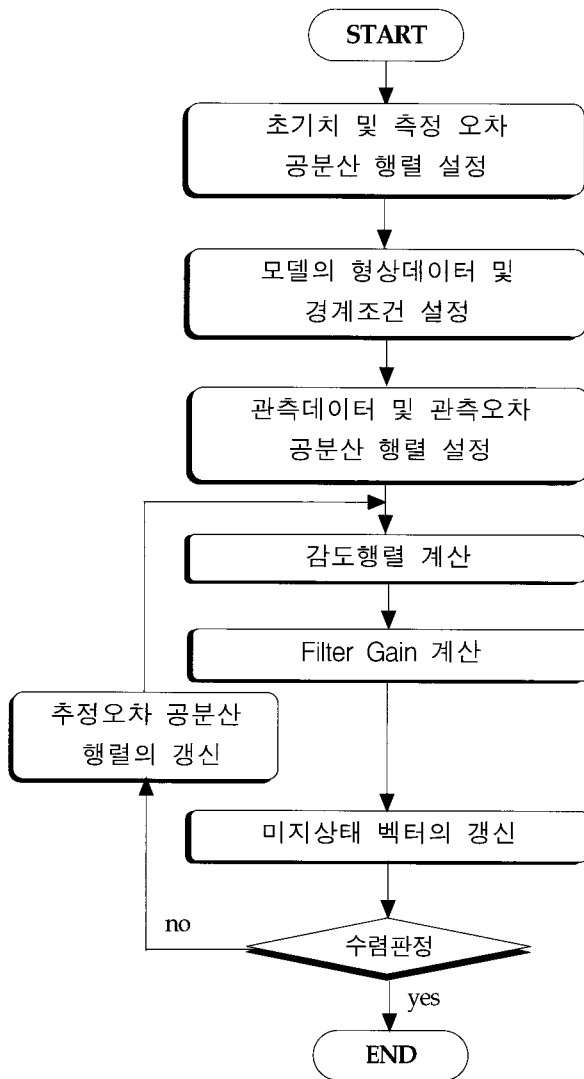
여기서 $z_j (j=1 \sim n)$ 는 미지의 상태벡터 z 의 성분을 나타낸다.

3.3 확장 칼만 필터 해석 알고리즘

확장 Kalman filter를 비선형 역문제의 반복 계산 과정에 이용할 때의 해석순서는 다음과 같다(그림 1 참조).

- (1) 추정할 미지량의 초기치벡터 \bar{z}_0 와 추정오차 공분산매트릭스 R_0 를 가정하여 초기 확률 분포를 설정한다.
- (2) 트러스의 자유진동문제 해석에 필요한 데이터와 경계조건 등을 설정한다.
- (3) 관측데이터 y 를 입력하고 관측잡음에 관한 관측잡음 공분산 매트릭스 R 을 설정한다.
- (4) 필터링과정에서 반복해서 갱신되는 추정치 $\hat{z}_{t/t-1}$ 을 이용하여 구조물의 고유진동수 y_t 를 계산하고 또한 감도 매트릭스 M_t 를 계산한다. ($\hat{z}_{0/0} = \bar{z}_0, R_{0/0} = \Sigma_0$)
- (5) 미지량에 대한 Filter gain K_t 를 계산한다.
- (6) 필터 방정식으로부터 갱신량 $\hat{z}_{t+1/t}$ 을 계산한다.
- (7) 수렴판정을 하고, 수렴하지 않는 경우는 추정오차 공분산 매트릭스 $R_{t+1/t}$ 를 갱신하여 스텝(4)로 돌아간다.

이상의 계산을 수렴조건에 만족할 때까지 반복 계산한다.



〈그림 1〉 확장 칼만 필터 알고리즘

3.4 손상지표

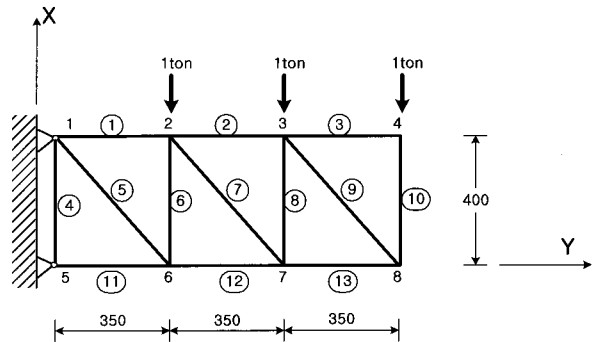
칼만 필터링 알고리즘을 적용하면 구조물의 손상 추정을 위한 관측데이터를 다양하게 선택할 수 있다. 이러한 관측데이터로부터 다음과 같은 5가지의 대표적인 손상지표를 정의하여 손상추정에 적용할 수 있다.

- 1) 고유 진동수의 변화(CNF)
- 2) 모드 형상 진폭의 변화(CMS)
- 3) 모드 형상 진폭 곡률의 변화(CCMS)
- 4) 정적 하중에 의한 변위의 변화(CSD)
- 5) 정적 하중에 의한 변위의 곡률의 변화(CCSD)

4. 손상추정 해석

4.1 해석예제 1

추정해석 예제로서 그림 2의 2차원 트러스 구조물을 해석대상으로 한다. 이 구조물에서 단면적 $A=10\text{cm}^2$, 영계수 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 밀도 $\rho=0.00787 \text{ kg/cm}^3$ 이다.



〈그림 2〉 예제 모델 1

본 고에서 설정한 손상추정을 위한 확률분포로는 관측잡음은 관측치의 30%를 표준편차로 하는 분포로 가정하고 초기조건으로 정상시의 강성을 초기 상태벡터로 한다. 또 감도행렬 계산을 위한 초기치는 정상시의 30%의 손상으로 가정한다. 손상지표로 사용되는 관측데이터는 구조물의 손상전과 손상후의 변화를 모니터링하여 얻은 계측 데이터를 사용해야 하나 본 고에서는 순해석에 의한 수치해를 사용하였고, 부재 손상도는 부재 강성의 저하로 나타내었다. 강성저하를 판단하는 강성비는 '손상 후 강성/손상 전 강성'을 의미한다.

또한 본 고에서는 손상지표 중 고유진동수와 모드 형상 진폭의 변화만을 채택하여 적용하였다. 표 1은 손상추정을 수행하기 위해 각각의 손상지표를 몇 개의 case에 대해 나누는 것으로 CNF의 경우 저차 모드, 고차모드 및 전체모드, CMS는 상부 절점, 하부 절점 및 전체 자유도에 대해서 나누었다.

〈표 1〉 손상지표

	CNF	CMS 및 CSD
case 1	1st~4th	절점 2, 3의 x, y 자유도
case 2	1st~6th	절점 2, 3, 4의 x, y 자유도
case 3	1st~12th	모든 절점의 x, y 자유도
case 4	7th~12th	절점6, 7, 8의 x, y 자유도

4.1.1 단일 부재 손상

단일 부재의 손상에 대해서는 부재 1, 3, 7 그리고 13이 각각 50% 손상되었을 경우에 대해 고려하였다.

표 2는 CNF의 결과를 나타내며, 각 표에 표시된 강성비는 표 1의 case에 대해 나타내었다. 표 2의 CNF의 경우 대체적으로 좋은 결과를 나타내었고, 특히 전모드를 데이터로 하는 case 3에서 우수한 결과를 보였다.

〈표 2〉 단일 부재 손상의 경우 CNF의 결과

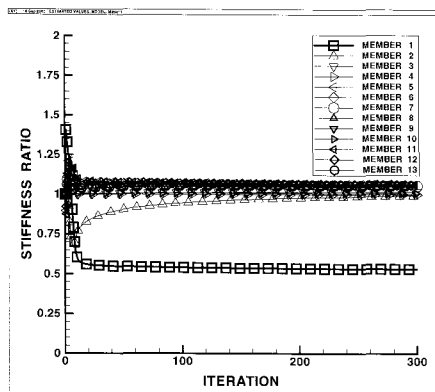
손상부재	case	강성비	iteration(회)
1	3	0.50	100
3	4	0.65	100
7	발산	-	-
13	2	0.60	200
	3	0.50	100

그림 3은 단일부재 손상의 경우 손상지표 CMS의 1차 모드 case 3의 손상추정 결과이다. 그림에서 알 수 있듯이 좋은 결과를 나타내고 있으나 부재 3에 대한 추정은 수렴이 늦었다.

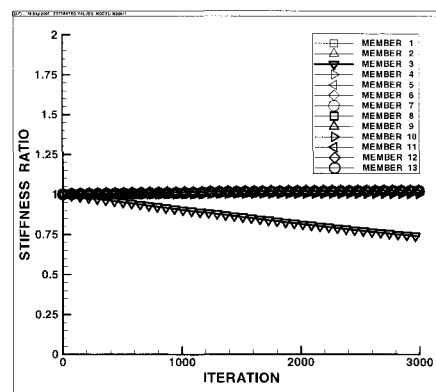
4.1.2 복수 부재 손상의 경우

복수 부재의 손상에 대해서는 부재 2와 11, 3과 5 그리고 9와 12가 각각 50% 손상되었을 경우에 대해 고려하였다.

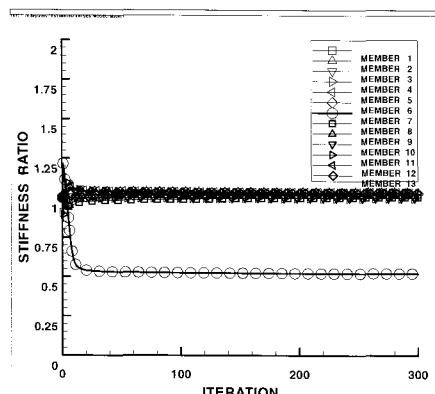
표 3은 복수부재가 손상된 경우의 CNF의 결과를 나타낸 것이다. CNF의 경우 단일부재 손상의 경우에 비해 결과가 좋지 않다. 수렴하는 경우에도 두 부재중 하나의 부재만이 손상된 것으로 수렴하였다.



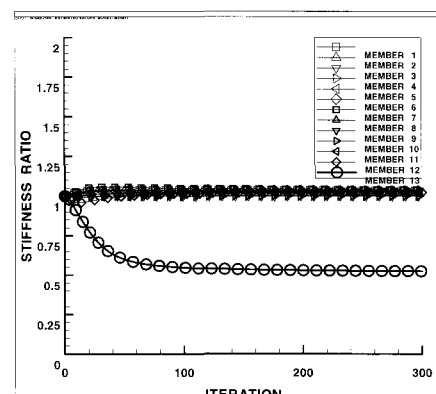
(a) 부재 1 손상



(b) 부재 3 손상



(c) 부재 7 손상



(d) 부재 13 손상

〈그림 3〉 단일 부재 손상의 경우 CMS 1차 모드 case 3의 추정 결과

〈표 3〉 복수부재가 손상된 경우 각각의 CNF 결과

손상부재	case	강성비	iteration(회)
2, 11	2,3	1.00, 0.60	100
3, 5	1 4	1.00, 0.50 0.55, 1.00	50 150
9, 12	발산	-	-

그림 4는 복수부재 손상의 경우 손상지표 CMS의 1차모드 case 3의 손상추정 결과를 나타낸다. 복수부재 손상의 경우 CMS가 CNF에 비해 좋은 결과를 나타냄을 알 수 있다.

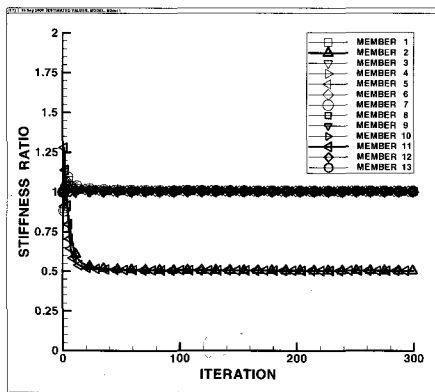
4.1.3 CNF와 CMS의 조합

일반적으로 관측 데이터 양이 많을수록 좋은 손

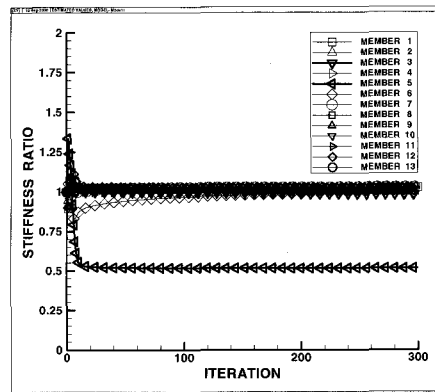
상추정 결과를 얻을 수 있다. 다음은 CNF의 case 3과 CMS의 1차 모드 case3을 조합하여 데이터의 양을 늘려 새로운 지표로 하여 손상 추정을 수행한 결과이다. 표 4는 단일 부재 손상의 경우이고 그림 5는 복수 부재 손상의 경우의 추정해석 결과이다. 단일 부재 손상, 복수부재 손상의 경우 모두에서 수렴결과 및 수렴성도 향상된 것을 알 수 있다.

〈표 4〉 단일부재 손상의 경우

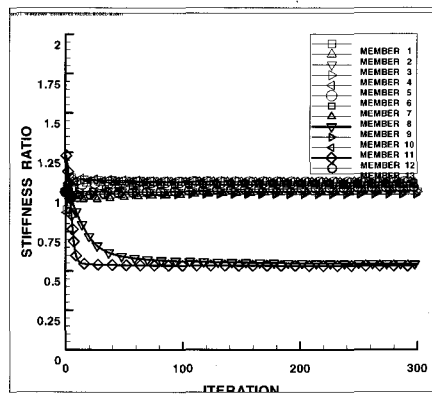
손상부재	1	3	7	13
강성비	0.50	0.50	0.60	0.50
iteration	50	1000	100	50



(a) 부재 2, 11 손상

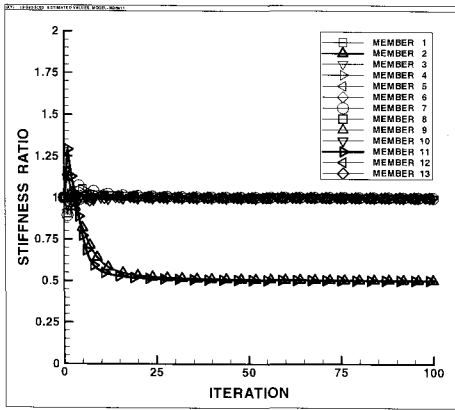


(b) 부재 3, 5 손상

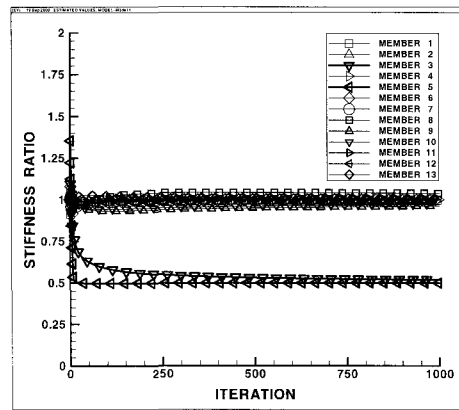


(c) 부재 9, 12 손상

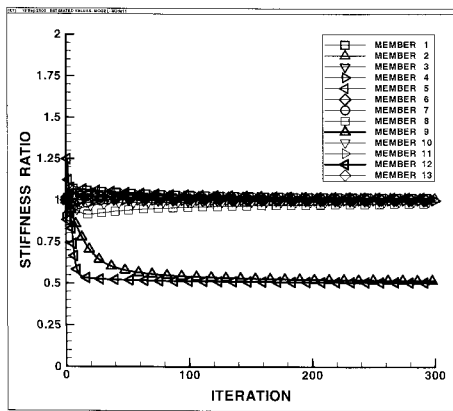
〈그림 4〉 복수 부재 손상의 경우 CMS 1차 모드 case 3의 추정 결과



(a) 부재 2, 11 손상



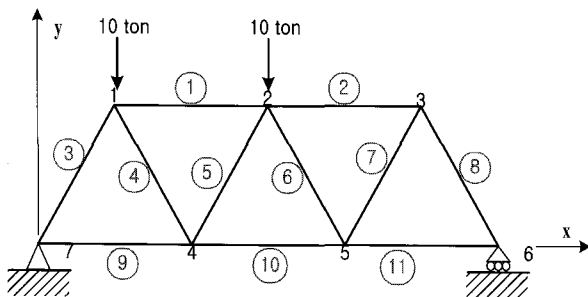
(b) 부재 3, 5 손상



(c) 부재 9, 12 손상

〈그림 5〉 복수 부재 손상의 경우 CNF+CMS 지표에 의한 추정 결과

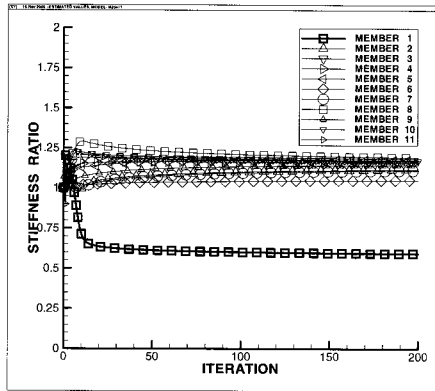
4.2 해석예제 2



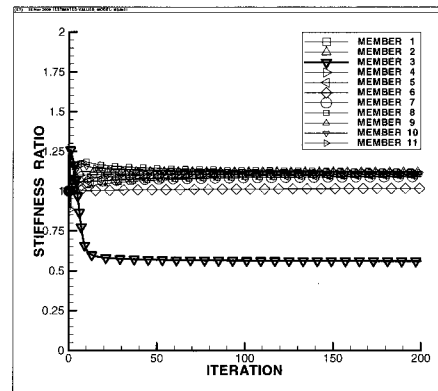
〈그림 6〉 예제 모델 2

그림 6의 2차원 트러스 구조물은 단면적 $A=10\text{cm}^2$, 영계수 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 밀도 $\rho=0.00787 \text{ kg/cm}^3$ 이다. 손상추정을 위한 확률분포는 예제 모델1과 동일한 조건으로 하여 수행하였다.

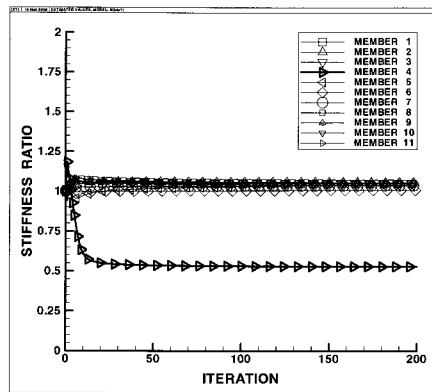
그림 7 과 8은 단일 및 복수 부재 손상인 경우 CMS에 의한 추정 결과를 나타낸다. 표 5와 표 6은 단일 및 복수 부재 손상인 경우 CNF+CMS에 의한 추정 결과를 나타낸다. 이상의 결과로부터 알 수 있듯이 관측데이터가 많을수록 또한 단일 손상지표보다 복수개의 지표를 조합하여 적용한 경우 보다 정확하고 빠른 수렴 결과를 얻을 수 있다.



(a) 부재 1 손상

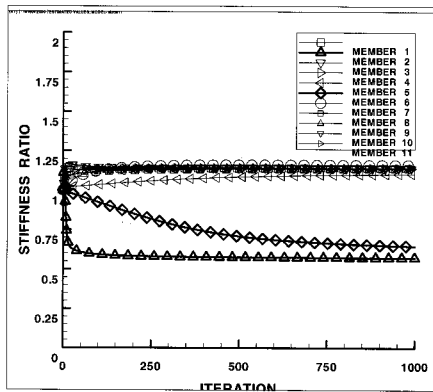


(b) 부재 3 손상

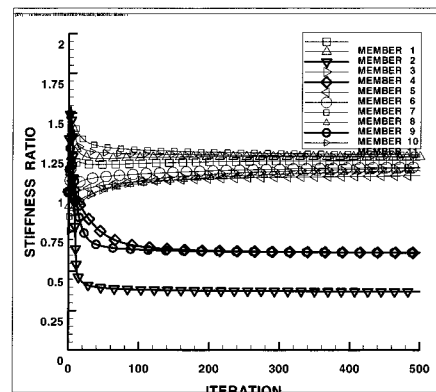


(c) 부재 4 손상

〈그림 7〉 단일 부재 손상의 경우 CMS에 의한 추정 결과



(a) 부재 2, 6 손상



(b) 부재 3, 5, 10 손상

〈그림 8〉 복수 부재 손상의 경우 CMS에 의한 추정 결과

<표 5> 단일 부재 손상인 경우 CNF+CMS에 의한 결과

손상부재	1	3	4
강성비	0.50	0.50	0.50
iteration	30	30	30

<표 6> 복수 부재 손상인 경우 CNF+CMS에 의한 결과

손상부재	2, 6	3, 5, 10
강성비	0.50	0.50
iteration	100	50

5. 결 론

이상 본 고에서는 손상부 추정을 수행하는 데 적용되는 역문제 해석을 대상으로 확장 칼만 필터 이론을 적용하여 트러스 구조물의 부재 손상위치와 손상도를 추정할 수 있는 추정법을 소개하였고 해석예제를 통하여 좋은 결과를 얻을 수 있는 것을 확인하였다.

그러나 실제 2차원 및 3차원 공간 트러스는 많은 부재로 구성되어 있는데 부재 수가 많아지면 제한된 관측 데이터로 인하여 수렴성이 나빠진다. 따라서 이 경우 보다 효율적인 추정법의 개발이 요구되고 있다.

참고문헌

1. 久保司郎, 逆問題, 培風館, 1992
2. 登坂宣好, 逆問題入門, 有限要素法の基礎, 朝倉書店, 1994
3. Groetsh, C.W., 數理科學における逆問題, 數理科學, サイエンス社, 1996
4. 古口日出男, 渡部 浩, 矢田敏夫, 遺傳的アルゴリズムを用いた二次元彈性逆解析(複數圓形缺陷の同定に關する基礎的考察), 日本機械學會論文集(A編), Vol. 60, p.p.121-126, 1994

5. 中村正行, 田中正隆, 缺陷同定問題の動彈性逆解析への遺傳的アルゴリズムの應用, 日本機械學會論文集 (A編), Vol. 60, p.p.116-122, 1994
6. Agbabian, M.S., Masri, S.F., Miller, R.K. and Caughey, T.K., System identification approach to detection of structural changes, J. Engineering Mechanics, Vol.117, No.2, p.p.215-227, 1991
7. 近藤一平, 濱本卓司, 既存構造物の局所損傷の同定に關して, 構造工學論文集, Vol. 38B, p.p. 189-199, 1992
8. 近藤一平, 濱本卓司, 多變量ARMAモデルによる既存 構造物の損傷位置の同定, 構造工學論文集, Vol. 39B, p.p.87-93, 1993
9. Kalman, R.E., A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., 82D-1, p.p.34, 1960
10. 片山 徹, 應用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983
11. 宇谷明秀, 高橋秀郎, 登坂宣好, フィルタ理論による複數個の未知缺陷同定解析, 第8回計算力學講演會講演論文集, p.p.311-312, 1995
12. Tosaka, N., Utani, A. and Takahashi, H., Unknown defect identification in elastic field by boundary element method with filtering procedure, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 15, p.p.207-215, 1995
13. 登坂宣好, 宇谷明秀, 彈性體に内在する複數缺陷の同定解析, 計算工學講演會論文集, Vol.1, p.p.329-332, 1996
14. 서일교, 1999, 확장 칼만 필터를 이용한 2차원 트러스 구조물의 손상 추정, 대한건축학회 논문집, 제 15권 4호, pp. 3-12
15. 유숙경, 서일교, 권택진, 2000, 확장 칼만 필터를 이용한 2차원 트러스 구조물의 손상추정에 적용된 5가지 손상지표의 유효성 및 수렴성에 관한 연구, 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제13권 제1집, pp. 207-214
16. 유숙경, 서일교, 권택진, 2000, 확장 칼만 필터를 이용한 2차원 트러스 구조물의 손상추정에 적용된 손상지표의 유효성 및 수렴성, 대한건축학회 학술발표회 논문집, 제20권 제1호, pp. 11-14