

# 다층 층간분리된 복합적층보의 휨강성 감소

## Flexural Rigidity Reduction of Multi-Delaminated Composite Beams

박 대 효<sup>1)</sup> · 백 재 욱<sup>2)</sup> · 조 백 순<sup>3)</sup>

*Park, Tae-Hyo Baek, Jae-Wook Cho, Baik-Soon*

**요 약 :** 본 연구에서는 다층 층간분리된 복합보의 휨강성 감소를 고찰하였다. 휨강성 감소를 평가하기 위해서 이론해석을 수행하였다. 층간분리가 복합보에 휨강성 감소에 주는 영향을 고찰하기 위해서 지배운동방정식이 유도되었고, 층간분리된 각각의 분할보는 연속 조건을 이용한 반복관계를 이용하여 구해졌다. 복합적층보에 층간분리가 여러 층에서 발생한 경우에 대해 다양한 적층순서와 여러 가지 형태의 층간분리 형상으로 모델링하여 결과를 비교하였다. 다층 층간분리가 존재하는 적층복합보의 휨강성을 평가하는데 있어서 본 연구는 유용하게 활용될 수 있다.

**ABSTRACT :** In this study, flexural rigidity reduction of multi-delaminated composite beams are investigated. In order to evaluate the flexural rigidity reduction, performed theoretical analysis. In order to investigate flexural rigidity reduction about effects of delamination on composite beams, the general kinematic governing equations are derived and solved by dividing the delaminated beam and imposing the continuity conditions into each sub-beam. For condition to appear multiple delamination through the laminated composite beams, the flexural rigidity reduction are compared according to many stacking sequences and several forms for delaminations. The present study could be used to evaluate the flexural rigidity reduction of composite laminated beams on multi-delaminations.

**핵 심 용 어 :** 복합보, 다층 층간분리, 휨강성 감소

**KEYWORDS :** composite beams, multi-delaminations, flexural rigidity reduction

### 1. 서 론

층간분리는 복합재 적층구조물에서 흔히 발생되는 파손형태이다. 복합재료의 충격 시 충돌속도가

충분히 크면 복합재료는 국부적인 구멍이 생겨서 충격체가 뚫고 나가지만 속도가 충분히 크지 않으면 외견상 손상이 보이지 않더라도 복합재 내부에는 두 면의 섬유방향 차이에 의한 강성의 불

1) 정회원, 한양대학교 토목공학과 조교수  
2) (주)승화이엔씨 기술연구소 연구원  
3) 정회원, 인제대학교 토목공학과 조교수

본 논문에 대한 토의를 2001년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

일치로 층간분리가 발생한다. 이러한 층간분리 형태의 결합이 구조물에 존재하면 전체적인 강성과 강도가 저하되어 적층구조물은 좌굴하중이 감소되고 설계하중보다 낮은 하중에서 전체적인 파손이 야기 될 수 있다. 따라서 복합재 구조물의 안전한 사용을 위해서는 다양한 형태의 손상들을 검출, 평가, 해석하는 것이 필요하다. 따라서, 본 연구에서는 다층 층간분리에 의한 적층보의 휨강성 감소를 진동특성을 통하여 해석한다.

층간분리에 관한 기존의 진동특성연구를 살펴보면 Wang 등<sup>(1)</sup>은 층간분리가 존재하는 분리 영역과 층간분리가 존재하지 않는 분리 안된 영역의 일반해를 만들었고 내부영역 적분상수에 관계하는 반복방정식(recurrence equation)이 접속구간에서 연속조건을 만족하기 위해서 구해졌다. 오일러-베르누이 보 이론을 사용하여 보 내부에 단일 층간분리가 있는 경우에 층간분리가 보의 고유진동수에 미치는 영향을 밝히는 해석적 방법을 제시하였으며, 단일 층간분리의 크기와 위치 변화 및 경계조건에 따른 고유진동수 변화를 고찰하였다. Tracy와 Pardoen<sup>(2)</sup>는 적층보 시편을 가지고 층간분리 효과에 대한 연구를 가졌다. 접근방법은 전체 폭과 길이에 걸쳐 일정한 층간분리를 가진 Graphite-Epoxy 보의 시편에 대해 해석적이고 실험적인 연구를 하여, 고유진동수 저하를 층간분리의 크기와 위치에 따라 일치하도록 하는 것이다. 그리고 연계강성을 고려함에 따라 최대 40%의 고유진동수 감소에 차이가 있음을 밝혔다. Stamos 등<sup>(3)</sup>은 층간분리가 있는 복합적층재의 고유진동수 저하 영향을 밝히는 과정에서 신장 방향과 휨 방향의 운동사이의 연계력(coupling)이 아주 중요한 영향을 미친다고 했으며, 층간분리된 보의 층간분리의 크기와 위치를 알기 위해 역방법(inverse method)을 제안하였다. 이 방법은 첫 번째와 두 번째 모드의 고유진동수 감소에 기초를 두고 있다. Gummadi와 Hanagud<sup>(4)</sup>는 다층 층간분리가 적층복합재의 동적 특성에 미치는 영향을 연구하기 위해 고차 보

이론으로 유한요소해석을 수행하였으며, 다층 층간분리를 갖는 보 구조물의 모드 형상과 고유진동수를 층간분리가 없는 결과와 비교하여 제시하였다. Wang과 Lin<sup>(5)</sup>은 기존에 발표한 논문에서 등가휨강성 개념을 적용하여 다층 층간분리된 보와 판의 진동해석을 수행하였다. 해석에서 모든 층간분리 면들은 접촉되어 있다고 가정하였으므로 결과적으로 구속모드를 발생시켰다. 그러나 이런 층간분리에 관한 진동특성연구들에서는 복합재 적층구조물에 발생할 수 있는 실제적인 층간분리 형상이나 특성이 고려되지 않고 단일 층간분리나 보의 길이방향으로 한 부분만 존재하는 다층 층간분리 형상으로 한정되어 수행됨에 따라 실제구조물에서 발생할 수 있는 모든 경우의 영향이 고려되지 않았다.

이를 위해 본 연구에서는 복합재 적층보에 층간분리가 보의 길이방향과 두께방향으로 다양하게 분포하여 발생한 경우에 대해, 여러 가지 경계조건과 적층순서 아래에서 몇 가지 다층 층간분리 형상으로 모형화 하여 휨강성 감소변화를 평가하고자 한다. 그러므로 층간분리가 존재하는 적층복합보의 휨강성을 비교함으로써 사용성을 확보할 수 있고, 결합에 대한 크기와 위치 정보를 알 수 있을 것이다.

## 2. 이론의 정식화

다층 층간분리된 복합적층보의 고유진동수를 평가하기 위해 Fig. 1과 같은 층간분리 모델에 대한 모드해석을 수행한다<sup>(6)</sup>. 이론 해석을 위한 기하학적 형상에서 층간분리부는 보의 종방향으로 일정한 크기를 갖는다고 가정한다. 그리고 보 내부에 층간분리가 내재되므로 층간분리가 존재하는 영역과 존재하지 않는 영역으로 구별된다. 좌표축은 양단영역에서는 끝단에 원점이 존재하며 전체 층간분리가 존재하는 내부영역에서는 중앙에 원점이 존재한다. NT는 다층 층간분리된 보

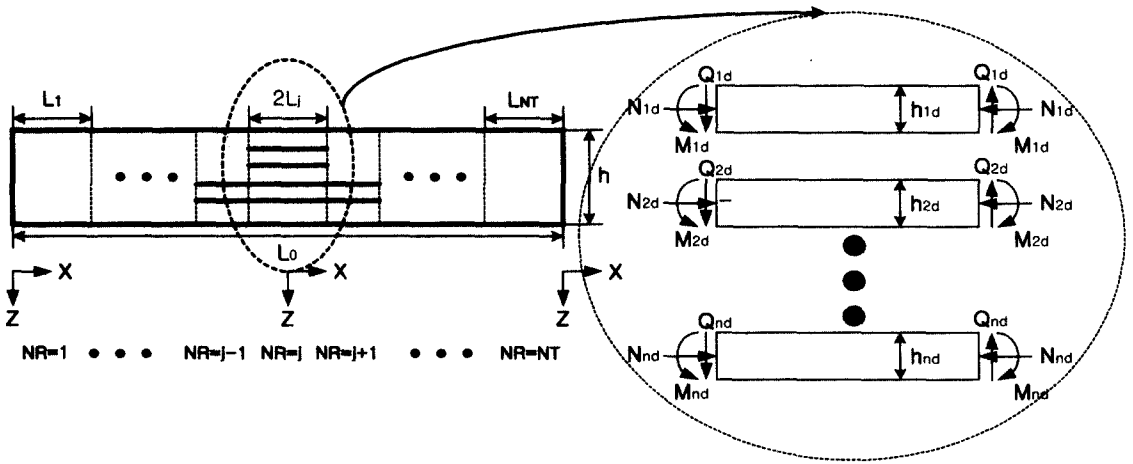


Fig. 1 Geometry and sign convention of multi-delaminated composite beams.

의 전체 영역의 개수를 의미하고 각각의 영역은  $nd$ 개의 보로 구성된다.

### 2.1 지배방정식

적층판의 평행방정식에 고전적인 보의 가정을 적용하고 보의 두께 대 길이의 비가 작은 경우에는 회전관성과 전단변형의 효과를 무시할 수 있으므로 각 분리보의 운동방정식은 다음과 같다<sup>(7)</sup>.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x \quad (1c)$$

여기서,  $u$ 와  $w$ 는  $x$ 와  $z$ 방향의 변위이고,  $N_x$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$ 는 각각 길이방향의 합력(resultant force), 합모멘트(resultant moment) 및 전단

력(shear force) 성분이다.  $q$ 는 분포하중,  $h$ 는 적층보의 두께,  $\rho$ 는 적층보의 밀도를 나타낸다. 합력 및 합모멘트와 중립면에 대한 변형률 ( $\epsilon_x^0$ ,  $\epsilon_y^0$ ,  $\epsilon_{xy}^0$ ) 및 곡률 ( $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_{xy}$ )의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ 는 각각 신장강성(extensional stiffnesses), 연계강성(coupling stiffnesses) 및 휨강성(bending stiffnesses)을 나타낸다. 식 (2)에서 강성계수들은 다음과 같이 정의된다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (3)$$

여기서,  $Q_{ij}$ 는 재료강성이다. 식 (2)를 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon}^0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \quad (4a)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\epsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \quad (4b)$$

여기서,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ 는 각각 신장강성행렬, 연계강성행렬 및 휨강성행렬이고,  $\boldsymbol{\epsilon}^0$ 는 중립면의 변형률벡터를,  $\boldsymbol{\kappa}$ 는 중립면의 곡률변화율벡터를 나타낸다.

임의의 적층순서를 갖는 적층보의 종방향의 힘과 중립면의 변형률과의 관계를 유도하기 위해 식 (4b)의 양변에  $\mathbf{D}^{-1}$ 을 곱한 후 얻어지는  $\boldsymbol{\kappa}$ 를 식 (4a)에 대입한 후 정리하면 다음과 같은 비연계된 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{N} = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}]\boldsymbol{\epsilon}^0 + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} \quad (5)$$

식 (5)에서  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$ 은 외력 성분이므로 임의의 적층순서를 갖는 적층판에 축방향 하중만이 작용하는 경우 축방향 합력과 중립면의 변형률사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\mathbf{N} = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}]\boldsymbol{\epsilon}^0 \quad (6)$$

일반적으로 일차원적인 적층보의 해석에서는 식 (6)의  $(N_y, N_{xy})$ 항은 무시할 수 있으나, 변형률 성분  $(\epsilon_y^0, \epsilon_{xy}^0)$ 는 무시할 수 없으므로

$N_y = N_{xy} = 0$ 의 조건을 식 (6)의 3개의 연립방정식에 대입하여 정리하면 적층보의 축방향 하중과 변형률의 관계가 다음과 같다.

$$N_x = \bar{A}_{11} \epsilon_x^0 \quad (7)$$

여기서,

$$\bar{A}_{11} = a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} + \frac{(a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})^2}{a_{22}(a_{26}^2 - a_{22}a_{66})}$$

$$a_{ij} = A_{ij} - B_{ij} D_{ij}^{-1} B_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

임의의 적층순서를 갖는 축방향 하중이 무시된 적층판의 모멘트와 곡률 간의 관계식도 마찬가지로 구할 수 있다. 식 (4a)의 양변에  $\mathbf{A}^{-1}$ 을 곱한 후 얻어지는  $\boldsymbol{\epsilon}_0$ 를 식 (4b)에 대입한 후 정리하고 나서  $(M_y, M_{xy})$ 항을 무시하고, 곡률  $(\kappa_y, \kappa_{xy})$ 을 고려하기 위해  $M_y = M_{xy} = 0$ 의 조건을 대입하여 정리하면 적층보의 모멘트와 곡률 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$M_x = \bar{D}_{11} \kappa_x \quad (8)$$

여기서,

$$\bar{D}_{11} = D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}} + \frac{(D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22})^2}{D_{22}(D_{26}^2 - D_{22}D_{66})}$$

$$D_{ij} = D_{ij} - B_{ij}A_{ij}^{-1}B_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

층간분리부가 있는 영역에서는 각각의 상부 적층보와 하부 적층보에 대한 종방향 진동이 고려되어야 한다. 적층보의 종진동 운동방정식은 보의 중립축에 대한 종방향 변위와 변형률의 관계를 이용함으로써 다음과 같이 얻어진다.

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (9)$$

식 (7)과 식 (9)를 식 (1a)에 대입하고 정리하면 적층보의 종방향 운동방정식을 얻을 수 있다. 이를 변수 분리한 후 적층보의 길이로 종방향 변위와  $x$ 좌표를 무차원화 하여 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{d^2 U_i(\xi)}{d\xi_i^2} + \eta_i^4 U_i(\xi) = 0 \quad (10)$$

여기서, 아래 첨자  $i$ 는 적층보의 번호,  $\xi$ 는 적층보의 길이로 무차원화 된  $x$ 방향 좌표, 보의 영역 길이로 무차원화 된  $U_i$ 는 종방향 변위로  $(u_0/L)_i$ 이고,  $\eta_i^4$ 는 진동수 파라미터로  $[(\rho h / \bar{A}_{11})L_i^2 \omega^2]$ 를 나타낸다. 식 (10)의 일반해를 벡터로 표현하면 다음과 같다. 아래에서 위 첨자  $T$ 는 행렬의 전치를 의미한다.

$$U_i(\xi_i) = \mathbf{G}_i^T \mathbf{H}_i \quad (11)$$

여기서,

$$\mathbf{G}_i = [g_{1i}(\xi_i) \quad g_{2i}(\xi_i)]^T$$

$$\mathbf{H}_i = [h_{1i} \quad h_{2i}]$$

여기서,  $h_{1i}$ ,  $h_{2i}$ 는 경계조건과 연속조건들로부터 결정되는 미지수이고,  $g_{1i}(\xi)$ ,  $g_{2i}(\xi)$ 는 각각  $\sin \eta_i^2 \xi$ ,  $\cos \eta_i^2 \xi$ 이다.

적층보의 횡진동에 대한 운동방정식을 구하기 위해서는 다음과 같은 곡률과 횡방향 변위와의 관계식을 사용한다.

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (12)$$

식 (1c)를  $x$ 에 대해 미분한 후 식 (1b)대입하고, 축방향 합력 및 분포력에 관계하는 항을 무시한 후에 식 (12) 및 식 (8)를 대입하고 정리하면 적층보의 횡진동에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다. 변수 분리한 후 횡방향 변위와  $x$ 좌표를 적층보의 길이로 무차원화 하면 다음과 같은 적층보의 횡진동 운동방정식을 얻는다.

$$\frac{d^4 W_i(\xi)}{d\xi_i^4} - \lambda_i^4 W_i(\xi) = 0 \quad (13)$$

여기서, 보의 영역길이로 무차원화 된  $W_i$ 는 횡방향 변위로  $(w/L)_i$ 이고,  $\lambda_i^4$ 는 진동수 파라미터로  $[(\rho h / \bar{D}_{11})L_i^4 \omega^2]$ 이다. 식 (13)의 일반해를 벡터로 표현하면 다음과 같다.

$$W_i(\xi) = \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_i \quad (14)$$

여기서,

$$\mathbf{F}_i = [f_{1i}(\xi_i) \quad f_{2i}(\xi_i) \quad f_{3i}(\xi_i) \quad f_{4i}(\xi_i)]^T$$

$$\mathbf{C}_i = [c_{1i} \quad c_{2i} \quad c_{3i} \quad c_{4i}]^T$$

여기서,  $c_i$ 는 임의 상수이며  $\mathbf{F}_i$ 의 벡터요소는 다음과 같이 쓰여진다.

$$f_{1i}(\xi) = \sin \lambda_i \xi, \quad f_{2i}(\xi) = \cos \lambda_i \xi,$$

$$f_{3i}(\xi) = \sinh \lambda_i \xi, \quad f_{4i}(\xi) = \cosh \lambda_i \xi$$

## 2.2 경계조건

층간분리가 적층보의 고유진동수에 미치는 영향을 알기 위해서는 층간분리부에서의 각 적층보간의 횡방향 변위에 대한 기하학적 연속조건 및 종방향 변위와의 연계관계가 필요하다. 첫 번째로 일정한 크기의 다층 층간분리부가 있는 영역에서의 각 적층보 사이의 횡방향 변위에 대한 기하학적 연속조건은 다음과 같다.

$$W_{1d} = W_{2d} = \dots = W_{nd} \quad (15)$$

$$\frac{dW_{1d}}{d\xi_{1d}} = \frac{dW_{2d}}{d\xi_{2d}} = \dots = \frac{dW_{nd}}{d\xi_{nd}} \quad (16)$$

층간분리가 있는 내부영역의 양단경계 ( $\xi = \pm 1$ )에서 식 (15)와 식 (16)의 연속조건을 적용하면 분리보들 사이의 횡방향 변위에 대한 계수간의 관계식을 구할 수 있다. 이 관계식은 다층 층간분리영역에서 id번째와 영역의 맨 하부에 있는 nd번째 보의 횡진동시 계수간의 관계식을 의미한다.

$$\mathbf{E}_{id} \mathbf{C}_{id} = \mathbf{E}_{nd} \mathbf{C}_{nd} \quad (17)$$

여기서,

$$\mathbf{E}_{id} = \begin{bmatrix} f_1(-1) & f_2(-1) & f_3(-1) & f_4(-1) \\ \frac{\partial f_1(-1)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2(-1)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_3(-1)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_4(-1)}{\partial \xi} \\ f_1(+1) & f_2(+1) & f_3(+1) & f_4(+1) \\ \frac{\partial f_1(+1)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2(+1)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_3(+1)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_4(+1)}{\partial \xi} \end{bmatrix}_{id}$$

식 (17)은 변환시켜서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{C}_{id} = \mathbf{T} \mathbf{C}_{nd} \quad (18)$$

여기서,  $\mathbf{T} = \mathbf{E}_{id}^{-1} \mathbf{E}_{nd}$ 를 의미한다.

두 번째로 종방향 변위에 대한 계수간의 관계식을 얻기 위해서는 다음과 같은 기하학적, 역학적 조건식을 적용한다.

$$\sum_{id=1}^{nd} b(\bar{A}_{11})_{id} \frac{\partial U_{id}}{\partial \xi} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\left( \frac{\partial U_{id}}{\partial \xi} - \frac{\partial U_{id}}{\partial \xi} \right)}{z_{id, id}} = \frac{\left( \frac{\partial U_{id}}{\partial \xi} - \frac{\partial U_{nd}}{\partial \xi} \right)}{z_{id, nd}} \quad (20)$$

여기서,  $\bar{z}$ 는 층간분리부에서의 id번째 보와 nd번째 보간의 거리를 층간분리부 보의 길이로 무차원화한 값이다. 구체적으로 표현하기 위해서 아래 첨자를 사용한다. 즉, 좌변의  $z_{id, id}$ 는 첫 번째 보와 임의의 id번째 사이를 의미하고, 우변의  $z_{id, nd}$ 는 첫 번째 보와 마지막 번째의 nd보 사이를 의미한다. 본 연구에서 해석모델은 진동시 층간분리부의 각 보의 상대적 변위가 없는 구속 모델로 가정하였으므로 보의 횡진동시 종방향 변위는 전체 보의 중립면을 기준으로 식 (19)과 같은 조건식을 만족해야 하고, 횡진동시 층간분리부에서 곡률은 일정하다고 간주 할 수 있으므로 식 (20)와 같은 기하학적 관계식이 적용될 수 있다. 따라서 식 (20)를 식 (19)에 대입하고 정리하면 층간분리된 영역에서 첫 번째 보와 마지막 번째 보와의 종방향 변위간의 기하학적 관계식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial U_{nd}}{\partial \xi} = \frac{1}{\alpha_{nd, id}} \frac{\partial U_{id}}{\partial \xi} \quad (21)$$

여기서,

$$\alpha_{nd, id} = \frac{\sum_{id=2}^{nd-1} \frac{\bar{z}_{id, id}}{z_{id, nd}} b \bar{A}_{11, id} + b \bar{A}_{11, nd}}{\sum_{id=1}^{nd-1} b \bar{A}_{11, id} - \sum_{id=2}^{nd-1} \frac{\bar{z}_{id, id}}{z_{id, nd}} b \bar{A}_{11, id}}$$

순차적으로 두 번째 보와 마지막 번째 보, 임의의 번째와 마지막 번째 보의 종방향 변위의 기하학적 관계식도 얻을 수 있다.

세 번째로 층간분리된 영역에서 분리보들 간의 종방향 변위는 횡방향 변위와 다음과 같은 기하학적 관계를 갖는다.

$$U_{id}(\xi_{id}) = U_{id}(\xi_{nd}) - \frac{\bar{z}}{z} \frac{d W_{nd}}{d \xi_{nd}} \quad (22)$$

층간분리가 진동시 횡방향 진동에 따른 종방향 진동을 구속하는 식으로 나타나는데 이는 횡방향 진동과 종방향 진동은 각각 독립적인 현상이 아니라 서로 종속적인 관계가 있음을 나타낸다.

종방향 변위의 기하학적 관계식들을 식 (22)의 조건식에 대입한 후에 층간분리가 있는 내부 영역의 양단경계( $\xi = \pm 1$ )에 적용하면 종방향과 횡방향 변위에 대한 계수간의 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{R}_{id} \mathbf{H}_{id} = \mathbf{R}_{nd} \mathbf{H}_{nd} - \bar{z} \mathbf{K}_{nd} \mathbf{C}_{nd} \quad (23)$$

여기서,

$$\mathbf{R}_{id} = \begin{bmatrix} g_1(-1) & g_2(-1) \\ g_1(+1) & g_2(+1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{id} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1(-1)}}{\partial \xi} & \frac{\partial f_{2(-1)}}{\partial \xi} & \frac{\partial f_{3(-1)}}{\partial \xi} & \frac{\partial f_{4(-1)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{1(+1)}}{\partial \xi} & \frac{\partial f_{2(+1)}}{\partial \xi} & \frac{\partial f_{3(+1)}}{\partial \xi} & \frac{\partial f_{4(+1)}}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

위 식은 종방향 변위계수를 횡방향 변위계수로 표현을 가능하게 하는 관계식이다.

식 (23)을 변환시켜서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{H}_{id} = \mathbf{L} \mathbf{C}_{nd} \quad (24)$$

여기서,

$$\mathbf{L} = -\bar{z} (\mathbf{R}_{id} - \mathbf{R}_{nd} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{K}_{nd}$$

### 2.3 진동수 방정식

다층 층간분리가 있는 적층보의 진동수 방정식을 구하기 위해서는 층간분리가 있는 영역과 없는 영역의 경계에서 다음과 같은 연속조건이 만족되어야 한다. 이것은  $j$ 번째 영역과  $j+1$ 번째

영역의 연결부분에 관한 연속조건이다.

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{WL} \\ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \xi} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{array} \right\}_{\xi=1}^j = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{WL} \\ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \xi} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{array} \right\}_{\xi=-1}^{j+1} \quad (25)$$

여기서,  $\mathbf{M}$ 과  $\mathbf{V}$ 는 각각  $j$ 번째 영역과  $j+1$ 번째 영역의 휨모멘트와 전단력을 의미한다. 층간분리가 없는 영역에서는  $\mathbf{M}$ 과  $\mathbf{V}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_j = - \left( \frac{b \bar{D}_{11}}{L} \right) \frac{d^2 W_i}{d \xi_i^2} \quad (26a)$$

$$\mathbf{V}_j = - \left( \frac{b \bar{D}_{11}}{L_2} \right) \frac{d^3 W_i}{d \xi_i^3} \quad (26b)$$

그리고, 층간분리가 있는 영역에서는  $\mathbf{M}$ 과  $\mathbf{V}$ 는 아래와 같다.

$$\mathbf{M}_j = \sum_{id=1}^{n_d} \left\{ - \left( \frac{b \bar{D}_{11}}{L} \right)_{id} \frac{d^2 W_{id}}{d \xi_{id}^2} \right\} + \sum_{id=1}^{n_d} \left\{ z (b \bar{A}_{11})_{id} \frac{d U_{id}}{d \xi_{id}} \right\} \quad (27a)$$

$$\mathbf{V}_j = - \sum_{id=1}^{n_d} \left\{ \left( \frac{b \bar{D}_{11}}{L^2} \right) \frac{d^3 W_{id}}{d \xi_{id}^3} \right\} \quad (27b)$$

층간분리가 있는 영역과 양단 경계영역사이의 관계식을 구하기 위해 휨모멘트와 전단력을 식 (25)에 대입하고 정리하면 층간분리가 있는 영역의 왼쪽 경계에서 4개의 선형연립방정식이 구성된다. 마찬가지로 방법으로 층간분리가 있는 오른쪽 경계에서도 4개의 선형연립방정식이 구성되는데 이를 등가 시키면 4개의 선형연립방정식을 얻을 수 있다.

층간분리가 있는 보의 진동수 방정식은 행렬 ( $4 \times 4$ )로 표현하여 행렬식(determinant)을 취함으로써 구할 수 있다<sup>(8),(10)</sup>.

### 2.4 휨강성 감소 평가

다층 층간분리된 복합적층보의 휨강성 저하를 보의 종방향 위치에 따라 평가하지 못하므로 그 대신 전체적인 평균치를 통해 휨강성의 감소를 파악한다. 이론의 정식화과정에서 수치해석 된 고유진동수 값은 연속조건을 이용한 내부영역들간의 통합된 상수에 관한 반복관계에서 나온 결과이므로 휨강성 변화를 보의 종방향 위치에 따라 평가할 수 없다. 그래서 다음과 같이 단순하게 처리하여 전체적인 휨강성 감소를 평가하였다. 복합적층보의 주진동이 1차 모드에 집중된다고 가정하여 1차 모드의 고유진동수 저하측면을 균일한 등방성보의 횡진동 문제로 처리하여 휨강성 감소를 평가하였다<sup>(9)</sup>. 고유진동수를 보의 휨강성으로 변환하는 식은 다음과 같다.

$$EI = \frac{\omega_1^2 \rho A L_0^4}{(\beta_1 L_0)^4} = \frac{4 \pi^2 \rho A L_0^4}{(\beta_1 L_0)^4} f_1^2 \quad (28)$$

여기서,  $\omega_1$ 은 1차 보의 원진동수를 의미하고,  $f_1$ 은 1차 보의 고유진동수를 의미한다. 보의 각각의 지지조건에 따른  $\beta_1 L_0$ 의 Table 1에 표현한다<sup>(9)</sup>.

### 3. 해석에 및 결과분석

본 연구에서는 다층 층간분리된 복합보의 휨강성 감소를 평가하기 위해 이론적 해석을 수행한다. 적층보의 기하학적 형상과 물성치 및 적층순서를 Table 2에 제시한다. 그리고 해석 결과에서 사용하는 무차원화 된 값은 Fig. 2에 나타낸다.

Fig. 2와 해석결과에서  $\bar{h}$ 는 층간분리부 상부보의 두께를 전체 보두께로,  $\delta$ 는 층간분리부의

Table 1.  $\beta_1 L_0$  Values for common boundary conditions(9)

Pinned-Pinned	$\sin \beta_1 L_0 = 0,$ $\beta_1 L_0 = \pi$
Free-Free	$\cos \beta_1 L_0 \cdot \cosh \beta_1 L_0 = 1,$ $\beta_1 L_0 = 4.730041$
Fixed-Fixed	$\cos \beta_1 L_0 \cdot \cosh \beta_1 L_0 = 1,$ $\beta_1 L_0 = 4.730041$
Fixed-Free	$\cos \beta_1 L_0 \cdot \cosh \beta_1 L_0 = -1,$ $\beta_1 L_0 = 1.875104$

Table 2. Material properties, stacking sequences and geometry

Glass-Epoxy	
$E_{11}$	40.7 (GPa)
$E_{22}$	9.75 (GPa)
$G_{12}$	4.65 (GPa)
$\nu_{12}$	0.30
$\rho$	1990 ( kg / m <sup>3</sup> )
UDL	[0] <sub>100r</sub>
CPL	[0/90] <sub>zss</sub>
APL	[45/-45] <sub>zss</sub>
Length	1000mm
Width	50mm
Height	12.5mm(100 plies)
One ply thickness	0.125mm

\* UDL: Unidirectional laminate, CPL: Cross-ply laminate, APL: Angle-ply laminate

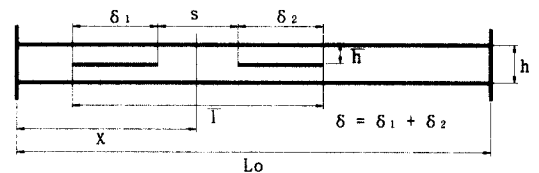


Fig. 2 The dimensionless values used to generate results.



길이를 전체 보길이로,  $\chi$ 는 보의 왼쪽 경계부터 층간분리부 또는 전체 층간분리부 중심까지의 길이를 전체 보길이로,  $s$ 는 층간분리부와 층간분리부 사이의 길이를 전체 보길이로,  $\bar{l}$ 는 전체 층간분리부의 길이를 전체 보길이로 무차원화 한 값이다. 층간분리가 있는 보의 휨강성  $EI$ 은 층간분리가 없는 보의 휨강성  $EI_0$ 으로 무차원화 하여 그래프의 종축에 사용된다.

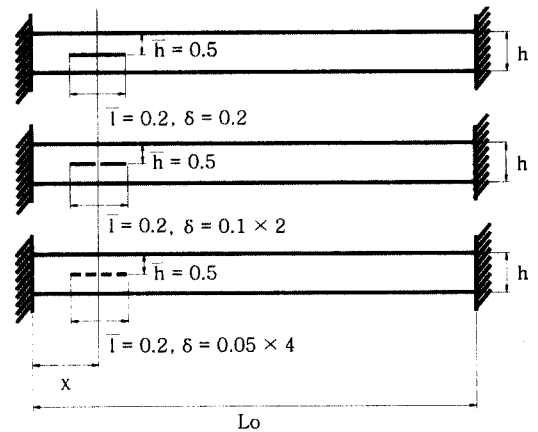
또한 본 연구에서는 이론해석 결과를 검증하기 위해 Stamos 등<sup>(3)</sup>이 제시한 단일 층간분리보의 고유진동수 변화 결과를 휨강성 감소로 평가하여 본 해석결과와 비교하여 Fig. 3에 제시한다.

일정길이(25%)의 단일 층간분리부가 왼쪽 지지점에서 오른쪽 지지점으로 이동함에 따라 기존의 연구 결과와 잘 부합함을 알 수 있다. 따라서 본 연구의 이론해석 과정이 타당함을 알 수 있다.

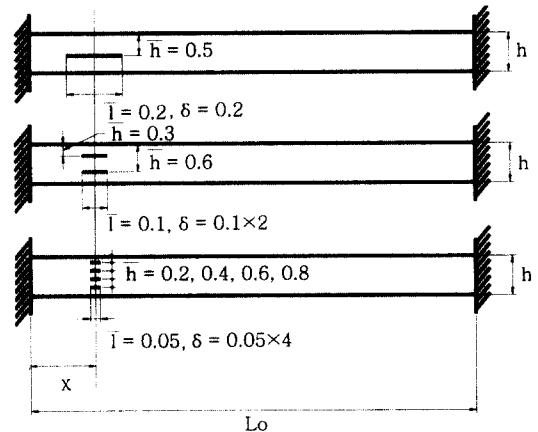
다층 층간분리된 보의 휨강성 감소를 Fig. 4와 같은 층간분리 형상을 사용하여 평가한다.

전체 보길이에서 20%의 층간분리를 가지는 보가 2개, 4개로 보의 종방향으로 분할된 상태에서

왼쪽 지지점에서 오른쪽 지지점으로 이동하는 경우가 Fig. 4(a)이고, 20%의 층간분리 길이를 가지는 보가 10%씩 2개로 그리고 5%씩 4개로 보의 종방향으로 분할된 상태에서 오른쪽 지지점으로 이동하는 경우가 Fig. 4(b)이다. Fig. 4에 대한 휨강성 감소 결과는 Fig. 5와 6에 각각 제시한다. Fig. 4(a)에서는 층간분리부를 2개, 4개로 분할할 때에 각각의 층간분리부 사이의 간격  $s$ 은 0.1%의 크기로 아주 작게 부여하였다.



(a) Type of delamination I



(b) Type of delamination II

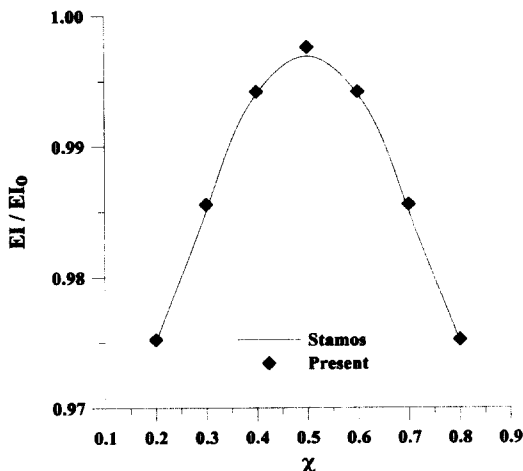
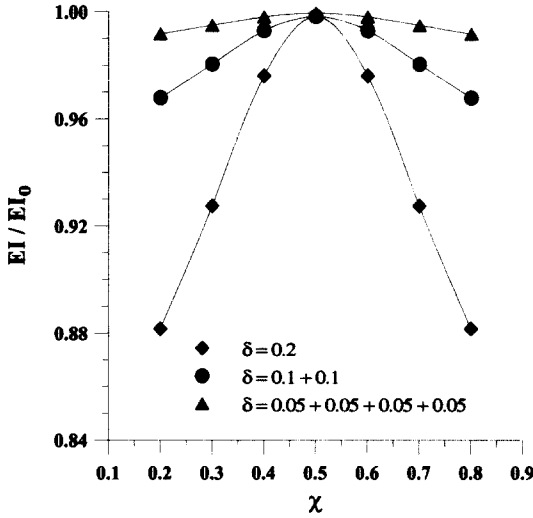


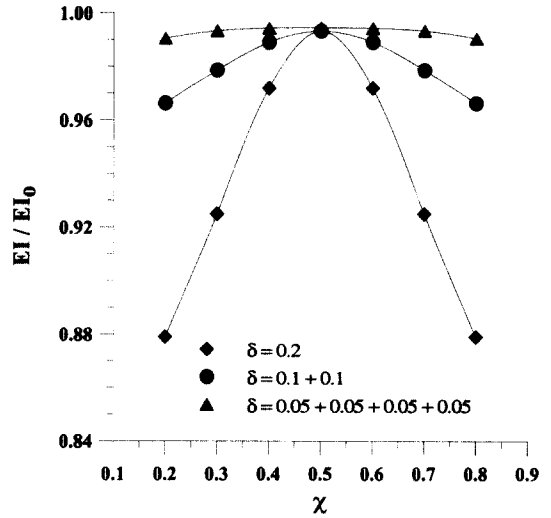
Fig. 3 The comparison of present results with references<sup>3</sup> for the flexural rigidity.

\* ( $[90/0]_{10T}$ ,  $\delta=0.25$ ,  $\bar{h}=0.5$ , SSb.c.)

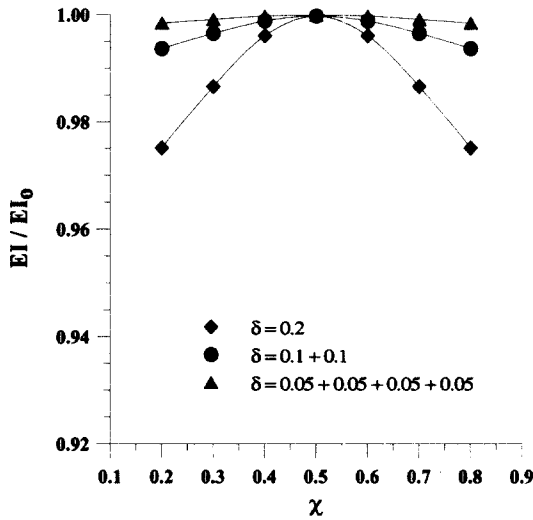
Fig. 4 Geometry of Beams with multiple delaminations.



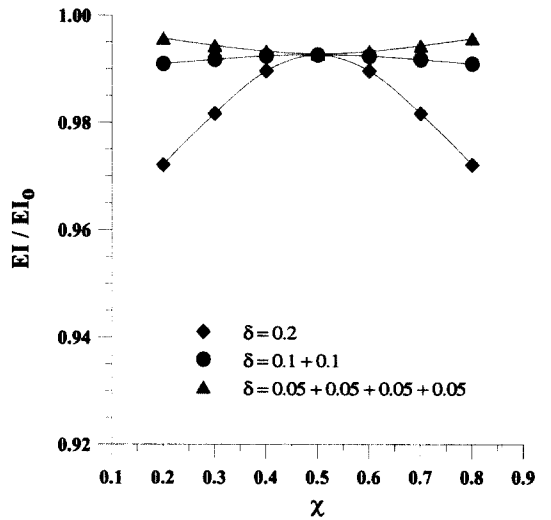
(a) Layout: UDL & APL , B.C.: CC



(b) Layout: CPL , B.C.: CC



(c) Layout: UDL & APL , B.C.: SS



(d) Layout: CPL , B.C.: SS

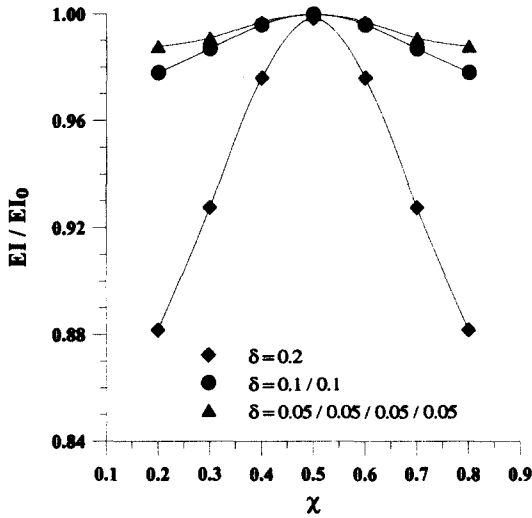
Fig. 5 Variations of the flexural rigidity for Fig. 4(a).

\* CC: Clamped-Clamped B.C. , SS: Simply Supported

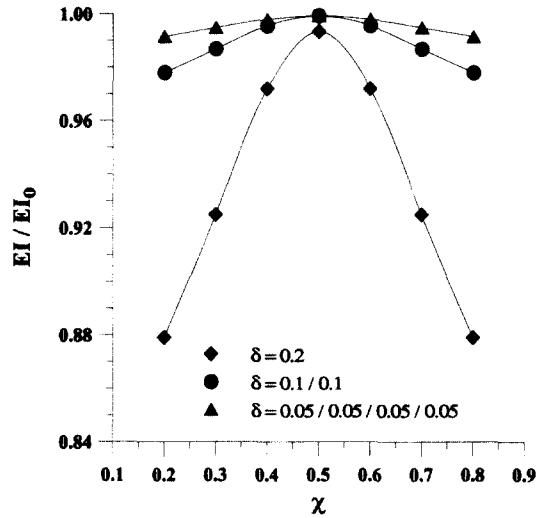
Fig. 5와 6에서 보는 바와 같이 층간분리부의 위치변화와 분포변화는 전체적인 보의 휨강성을 변화시켰다. 여기에서 층간분리부가 지지점에 가까울수록 최대의 휨강성 감소를 보이고 있는데 이러한 이유는 지지점에 모멘트가 크게 작용하므로 유발된 결과라고 생각된다. 이러한 이유로 경

계조건이 단순지지보일 때는 휨강성 감소가 모멘트의 차이로 양단고정보일 때보다 작아진다. 이러한 결과는 캔틸레버보에서도 일어난다. 층간분리부가 고정단 부근에 존재하면 최대의 휨강성 감소를 유발한다.

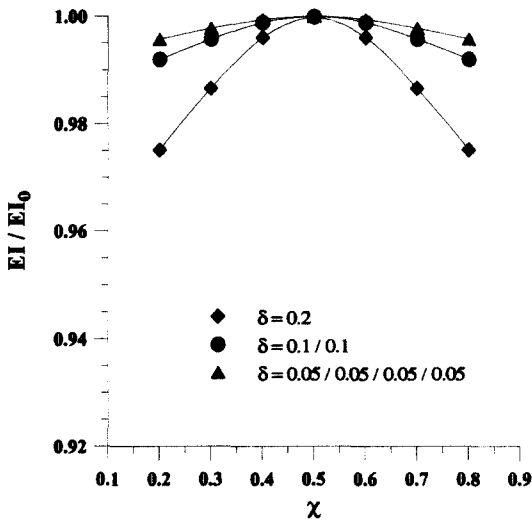
Fig. 5의 결과에서 보듯이 양단고정보일 때에



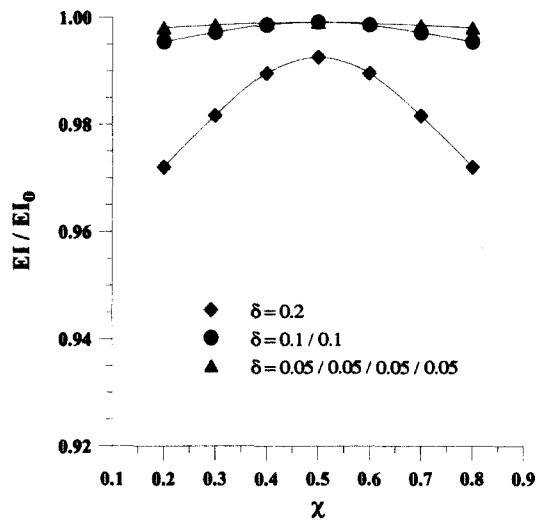
(a) Layup: UDL & APL , B.C.: CC



(b) Layup: CPL , B.C.: CC



(c) Layup: UDL & APL , B.C.: SS



(d) Layup: CPL , B.C.: SS

Fig. 6 Variations of the flexural rigidity for Fig. 4(b).

최대 12%의 휨강성 감소를 그리고 단순지지보일 때에 최대 2.5%의 휨강성 감소를 보이는 반면에 층간분리가 보의 종방향으로 2개, 4개로 분할된 상태에서는 현저히 휨강성 감소 폭이 줄어드는 경향을 볼 수 있다. 따라서 일정길이의 층간분리는 분할될수록 현저히 휨강성 감소가 줄어든다. 이러한 결과를 층간분리가 발생된 구조물에 이용

한다면 저하된 휨강성을 확연히 높일 수 있을 것이다. 일정크기의 층간분리를 분할하는 것이 목적 이므로 층간분리가 진전되는 구조물에 보강재 (ring stiffener)로 보강한다면 분할 형성된 것 과 같은 효과를 가질 것이다.

동일한 층간분리의 길이를 가지는 보가 횡방향 으로 2개, 4개 분할 형성되어도 Fig. 5에서와 보

는 바와 같은 휨강성 감소를 Fig. 6에서 볼 수 있다. 그리고 휨강성 감소에서 일방향 적층재 ( $[0]_{100T}$ )와 사교 적층재 ( $[45/-45]_{25S}$ )가 동일한 휨강성 감소율을 보였고, 이에 비해 직교 적층재 ( $[0/90]_{25S}$ )는 최대 0.7%의 하락을 보였다. 즉, 휨강성 감소율은 직교 적층재가 일방향 적층재와 사교 적층재 보다 크다.

이상의 결과로부터 본 연구는 다층 층간분리부의 위치와 크기에 따른 보의 휨강성 저하를 평가할 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 적층보 내부에 다층 층간분리가 존재할 때 휨강성 저하를 평가하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 층간분리부는 경계조건의 모멘트 영향 때문에 지지점에 근접할수록 휨강성이 감소된다.
- (2) 층간분리부가 보의 종방향으로, 횡방향으로 분할 형성됨에 따라 휨강성 감소 폭은 줄어든다.
- (3) 층간분리에 따른 휨강성 감소율은 직교적층재가 일방향 적층재와 사교 적층재 보다 크다.
- (4) 다층 층간분리가 존재하는 적층보의 휨강성을 평가하는데 있어서 본 연구는 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

#### 참고 문헌

1. Wang, J.T.S., Liu, Y.Y., and Gibby, J.A., "Vibration of Split Beams," (1982).

Journal of Sound and Vibration, Vol. 84(4), 491-502.

2. Tracy, J.J. and Pardoen, G.C., (1989). "Effect of Delamination on the Natural Frequencies of Composite Laminates," Journal of Composite Materials, Vol.23, 1200-1215.
3. Stamos, B., Kostopoulos, V., and Paipetis, S.A., (1992). "Identification of Delamination by Eigenfrequency Degradation-An Inverse Problem," AGARD Conference Proceedings 530, Debonding/Delamination of Composites, 20-1~20-7.
4. Gummadi, L.N.B. and Hanagud, S., (1995). "Vibration Characteristics of Beams with Multiple Delaminations," AIAA 36th SDM Conference, 140-150.
5. Wang, J.T.S. and Lin, C.C., (1995). "Vibrations of Beam-Plates having Multiple delaminations," AIAA 36th SDM Conference, 3126-3133.
6. 이성희, (1998). "층간분리가 있는 복합재 보-기둥의 동적특성," 박사학위논문, 홍익대학교 대학원 기계공학과.
7. Reddy, J.N. and Miravete, A., (1995). Practical Analysis of Composite Laminates, CRC press.
8. Lee, S., Park, T., and Voyiadjis, G.Z., (2001). "Vibration Analysis of Multi-Delaminated Beams," ASME Journal of Applied Mechanics 심사중.
9. Rao, S.S., (1995). Mechanical Vibrations, Third Edition, Addison-Wesley Publishing Company.
10. 백재욱, (2001). "다층 층간분리된 복합보의 자유진동해석," 석사학위논문, 한국해양대학교 대학원 토목환경공학과.

(접수일자 : 2001년 2월 27일)