

Hybrid 구조물의 비선형 불안정 거동에 관한 연구(II)

-STEP 하중에서의 동적 면내비틀림 좌굴 특성-

A Study on the Nonlinear Instability Behavior of Hybrid Structures(II)

-Characteristic of Dynamic In-Plane Torsional Buckling under the STEP Load-

김 승 덕¹⁾ · 김 형 석²⁾ · 강 문 명³⁾

Kim, Seung Deog Kim, Hyung Seok Kang, Moon Myung

요약 : STEP 하중을 받고있는 셸형 구조물의 동적 불안정 문제를 다룬 연구결과는 다소 발표되고 있으나, Hybrid 케이블 돔의 동적 불안정 문제를 다룬 연구는 아직 없는 실정이다. 또 카오스의 생성을 파악하기 위하여 위상면을 이용하여 동적 좌굴의 기본적 현상을 다룬 연구도 거의 없다. 본 연구에서는 기하학적 비선형을 고려한 Hybrid 케이블 돔의 간접좌굴을 수치적 기법으로 조사하고 이를 정적 임계하중과 비교하였다. 동적 좌굴하중은 비선형 운동방정식을 수치적분하여 결정하고, 위상면을 이용하여 간접좌굴 현상을 규명한다.

ABSTRACT : Many papers which deal with the dynamic instability of shell-like structures under the STEP load has been published, but there have been few papers related to the dynamic instability of hybrid cable domes. And also there are a few researches which treat the essential phenomenon of the dynamic buckling using the phase plane for investigating occurrence of chaos. In this study, the indirect buckling of hybrid cable domes considering geometric nonlinearity are investigated numerically and compared it with the static critical load. The dynamic critical loads are determined by the numerical integration of the geometric nonlinear equation of motion, and the mechanism of the indirect buckling is examined by using the phase curves.

핵심용어 : 복합구조물, 케이블 돔, 간접좌굴, 비선형, 초기형상 불완전, 위상면

KEYWORDS : Hybrid Structure, Cable Dome, Indirect Buckling, Nonlinear, Initial Imperfection, Phase Plane

1) 정회원, 세명대학교 건축공학과 조교수
2) 경북대학교 건축공학과 박사과정
3) 정회원, 경북대학교 건축공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2002년 4월 30일까지 학회로 보내 주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서론

형태저항형 구조물인 셸 구조는 주로 면내력으로 힘을 전달할 수 있게 한 구조 시스템이므로 매우 우수한 역학적 특성을 가지고 있다. 그러나, 어떤 하중 상태에서는 안정 상태에서 불안정 상태로, 또는 불안정 상태에서 안정 상태로 변화하므로 불안정 현상으로 인한 파괴 메커니즘을 파악하고 설계에 반영하는 것은 중요하다. 셸형 구조시스템의 구조불안정 문제의 중요한 특징은 초기조건에 매우 민감하게 반응한다는 것이다. 따라서 비선형 해석 자체가 매우 불안정해지며, 이는 수학적 한계성에 기인한다.

구조불안정 문제는 외력이 정적으로 작용할 때의 정적 불안정과 동적으로 작용할 때의 동적 불안정으로 분류할 수 있다. 셸형 구조물의 정적 불안정은, Zoelly에 의한 구형 셸의 고전 좌굴 하중이 발표(1915년)된 후 많은 연구가 진행되어 왔고, 또 설계 기준도 갖추어져 있다.^{(1)~(19)} 그러나 셸형 구조물의 동적 불안정에 관한 연구는 그 필요성은 널리 알려져 있지만 비선형 운동방정식의 수치해석의 어려움으로 인하여 충분한 연구가 되어 있지 않다.^{(7),(10),(17)} 특히, 셸형 구조물의 동적 불안정은 외력과 구조물의 형상에 따라 매우 복잡한 거동을 하는 것이 일반적이다. 그 중에서도 대칭 변형모드와 비대칭 변형모드와의 연성작용에 의한 간접좌굴 문제는 초기조건에 민감하게 반응하며, 비선형성이 강하게 나타나는 것이 특징이다.^{(1),(3)}

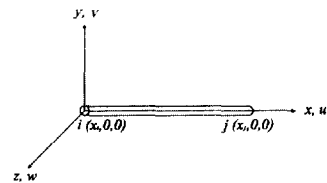
연속체 셸을 이산화한 구조시스템은 돔형 구조물을 만들기 위해 많이 이용되고 있으며, 구조체가 경량이라는 점과 잉여력이 증가한다는 점으로 인해 대공간 구조물에 널리 이용되고 있다. 이러한 구조물은 하중 레벨이 어느 임계값에 도달하면 구조물의 형상에 따라 뿔좌굴(snap-through) 또는 분기좌굴(bifurcation)에 의한 불안정 현상이 일어난다. 특히 외력이 동적일 경우, 불안정 현상으로 인한 파괴 메커니즘에 관한 연구는 아직

초기적 단계에 있는 실정이다. 동적 불안정 문제에서는 정적 불안정 문제의 뿔좌굴은 직접좌굴(direct buckling)에, 분기좌굴은 간접좌굴(indirect buckling)에 대응한다.^{(9),(13),(14),(19)}

본 연구에서는 hybrid 케이블 돔 구조물 중 가장 잘 알려져 있는 Geiger 모델을 대상으로 간접좌굴을 수치적 기법으로 조사하고, 정적임계하중과 비교하였다. 동적좌굴하중은 비선형 운동방정식을 수치적분하여 구하고, 동적좌굴 발생경로를 파악하기 위해 비선형 시각력 응답곡선과 이들의 위상면에서의 끌개(attractor) 특성을 관찰한다. 또 초기형상 불완전에 의해 민감하게 반응하는 동적 비선형 문제인 간접좌굴에 관해서 카오스(chaos)의 생성여부를 관찰한다.

2. 비선형 강성방정식

국부 좌표계에서 입체 케이블 요소의 요소 좌표계를 그림 1에서와 같이 정의한다.



$$\begin{cases} x, y, z : \text{요소 좌표계} \\ u, v, w : \text{요소내 변위} \end{cases}$$

그림 1. 케이블 요소의 요소 좌표계

가상일의 원리를 이용하여 요소의 비선형 강성방정식을 구하면 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(0)} + \mathbf{f} &= A I (\mathbf{A}_1^T \sigma_x^{(0)}) \\ &+ A I (\sigma_x^{(0)} \mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{d} \\ &+ A I E (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1) \mathbf{d} + \text{고차항} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,

A : 요소의 단면적

l : 요소의 길이

d : 절점변위벡터

$$A_1 = [N_{i,x} \ 0 \ 0 \ N_{j,x} \ 0 \ 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & N_{j,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & N_{j,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & N_{j,x} \end{bmatrix}$$

식 (1)에서 d 에 관한 고차항의 소거로 인하여 생기는 불평형력(residual force)을 식(2)와 같이 정의한다.

$$r = A l A_1^T \sigma_x^{(0)} - f^{(0)} \quad (2)$$

식 (2)를 이용하면 증분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f - r &= A l E (A_1^T A_1) d \\ &+ A l (\sigma_x^{(0)} B^T B) d \\ &= (k_E + k_G) d \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,

$k_E = A l E (A_1^T A_1)$: 요소의 탄성 강성행렬

$k_G = A l (\sigma_x^{(0)} B^T B)$: 요소의 기하 강성행렬

변환 매트릭스 T 를 이용하여 전체좌표계에서의 증분구간에 관한 강성매트릭스를 구하면 다음과 같다.

$$F - R = [K_E + K_G] D \quad (4)$$

여기서,

$K_E = T^T k_E T$: 전체 좌표계에서의 탄성 강성 매트릭스

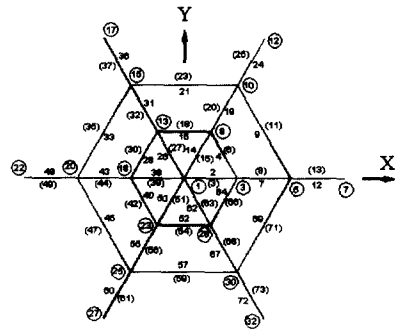
$K_G = T^T k_G T$: 전체 좌표계에서의 기하 강성 매트릭스

3. 동적 비선형 불안정해석

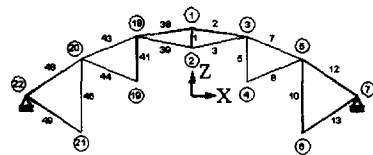
케이블 돔의 동적 비선형응답을 얻기 위해 Newmark의 직접적분법을 이용하였으며 이때 각 step의 증분구간 마다 절점좌표와 부재내력을 새로 구하여 다음 step에서의 기하강성행렬을 갱신하여 사용할 수 있게 하였다.

해석모델은 Geiger형 케이블 돔을 해석 대상으로 한다.⁽¹⁴⁾ 해석 모델의 절점 및 요소번호를 그림 2에 나타낸다. 원으로 둘러싸인 것은 절점번호이고, 그렇지 않은 것은 요소번호이다. 요소번호는 상현과 하현부재를 각각 나타내기 위해 하현부재는 괄호를 이용하였다. 각 절점의 좌표를 표 1에 나타낸다. 여기서 모델의 형상이 축대칭 모델임을 고려하여 한 개의 strip만을 나타내었다. 또 각 부재의 물성치로는, cable 과 post 모두 영계수 $E=1.6 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, 밀도 $\rho = 7.85 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3$ 이고, 단면적은 표 2에서와 같다.

경계조건은 외곽의 절점들, 즉 7, 12, 17, 22, 27, 32 등 6개 절점을 고정시키고, 나머지 절점은



(a) 평면도



(b) 단면도

그림 2. 해석모델

표 1. 절점좌표 (단위:cm)

절점번호	1	2	3	4	5	6	7
X 좌표	0.0	0.0	20.0	20.0	40.0	40.0	60.0
Z 좌표	21.0	15.0	18.5	4.50	11.5	-11.5	0.0

표 2. 부재의 단면적 (단위:cm²)

부재번호	1	2	3	4	5	6	7
단면적	1.00	0.01	0.01	0.01	1.00	0.02	0.02
부재번호	8	9	10	11	12	13	
단면적	0.02	0.01	1.00	0.04	0.04	0.04	

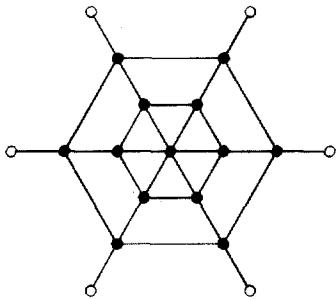


그림 3. 하중모드

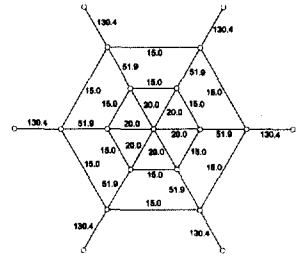
자유로 한다.

하중조건은 그림 3에서와 같이 상부절점 전체에 -Z 방향으로 동일한 하중이 작용하는 것으로 가정하였고, 시간변화에 따른 하중 지속형태는 STEP 함수 하중으로 한다. 또 하중레벨은 정적 임계하중 11.9kgf로 규준화한 하중 파라메타 α 를 이용한다. 즉 $\alpha=1$ 은 정적 임계하중 레벨을 의미한다. ●는 하중이 작용되는 절점을, ○는 하중이 작용되지 않는 절점을 각각 나타낸다.

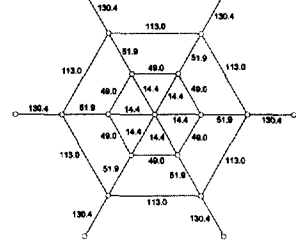
케이블 돔 구조물은 초기 불안정 구조물이므로 구조물의 안정화를 위해 초기장력을 도입하여야 한다. 초기장력은 형상해석을 수행하여 얻어지는 평형상태에서의 값으로 그림 4에 나타낸다.

각 하중레벨에서 동적 비선형응답을 얻고, 이중 최대 변위값을 구해 그래프로 나타내 본다. 이때 시각증분 Δt 는 1차 고유주기 T_1 의 1/100로 하고, 계속시간은 10 T_1 으로 하였다.

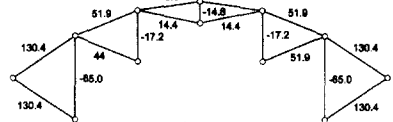
절점 #3의 최대 변위응답을 그림 5에 나타내었다. 최대 변위응답은 완전형상인 경우는 비선형



(a) 상현 평면도



(b) 하현 평면도

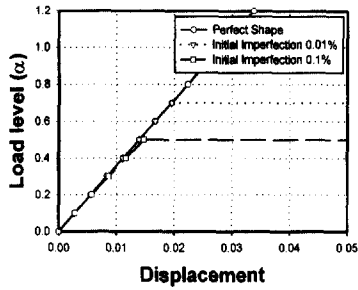


(c) 단면도

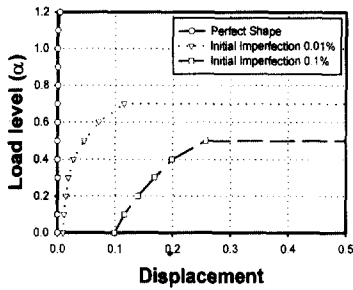
그림 4. 초기장력 (단위:kgf)

효과가 나타나지 않으나, 초기형상 불완전을 고려 하였을 경우는 비선형 효과가 뚜렷이 나타나는 것을 알 수 있다. 즉 초기형상 불완전이 0.01%인 경우에는 $\alpha=0.76$ 을 초과하는 하중레벨에서, 0.1%인 경우에는 $\alpha=0.58$ 을 초과하는 하중레벨에서 변위가 발산한다. 이는 Y 방향 변위 그래프에서 알 수 있듯이 하중레벨의 증가에 따라 면내비틀림에 의해 불안정 현상이 발생하고, 이로 인해 변위가 급격히 증가하여 X 방향 및 Z 방향의 변위도 함께 발산하게 됨을 알 수 있다. 이러한 현상은 정적 좌굴의 분기현상(bifurcation)에 대응되는 간접좌굴(indirect buckling)이다.

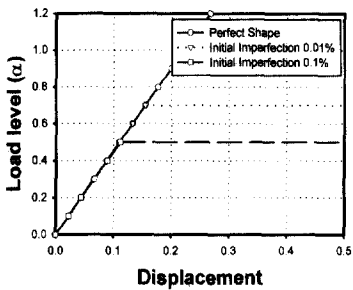
따라서 hybrid 구조물인 Geiger형 케이블 돔은 면내비틀림에 의한 간접좌굴에 의해 파괴 메커니즘이 형성되고, 임계하중레벨은 초기형상 불완전량에 크게 의존함을 알 수 있다. 본 연구에서 이용된 Geiger 모델인 경우, 동적 임계하중은 정



(a) X 방향



(b) Y 방향



(c) Z 방향

그림 5. 최대 동적응답 (Node #3)

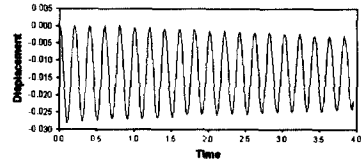
적 임계하중의 50~80%까지 저하된다.

케이블 돔의 동적 불안정현상을 규명하기 위해 동적임계하중 근방에서의 시가이력곡선을 분석해 본다.

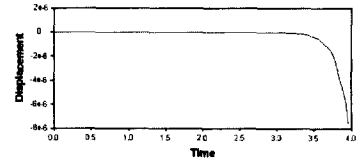
완전형상 모델인 경우, $\alpha=1.0$ 에서 절점 #3의 변위이력곡선을 그림 6에 나타내었다.

Y 방향 변위응답은 거의 0에 가까운 값을 나타내고 있으며, 따라서 면내비틀림 좌굴을 발생시키기 어렵다. X 방향과 Z 방향의 변위응답은 같은 진동주기를 가지며 진동하고 있다.

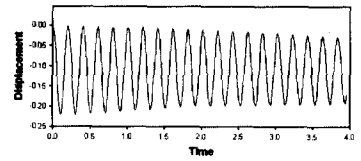
0.01% 불완전형상 모델인 경우, 동적좌굴은



(a) X 방향



(b) Y 방향



(c) Z 방향

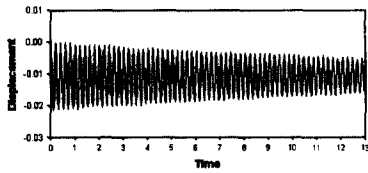
그림 6. 완전형상 모델의 변위이력곡선 (Node #3)

$\alpha=0.76$ 부근에서 일어난다. 따라서 pre-buckling 레벨인 $\alpha=0.76$ 과 post-buckling 레벨인 $\alpha=0.77$ 에서의 변위응답을 알아본다. 절점 #3의 결과를 $\alpha=0.76$ 인 경우는 그림 7에, $\alpha=0.77$ 인 경우는 그림 8에 각각 나타낸다.

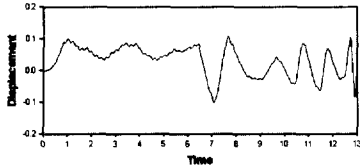
Pre-buckling 레벨에서는 단순한 진동만 나타내지만, post-buckling 레벨에서는 약 12초경에 응답이 발산하는 것을 보여주고 있다. 즉 주진동 모드들에 의한 진동을 어느 정도 지속하다, 12초경에 주진동모드와는 독립적인 좌굴모드가 서로 연성(coupling)하게 되며, 이로 인해 주진동모드가 발산하는 것을 알 수 있다.

0.1% 불완전형상 모델인 경우, 동적좌굴은 $\alpha=0.58$ 부근에서 일어난다. 따라서 pre-buckling 레벨인 $\alpha=0.58$ 과 post-buckling 레벨인 $\alpha=0.59$ 에서의 변위응답을 알아본다. 절점 #3의 결과를 $\alpha=0.58$ 인 경우는 그림 9에, $\alpha=0.59$ 인 경우는 그림 10에 각각 나타낸다.

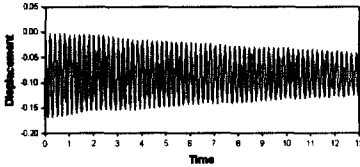
Pre-buckling 레벨에서는 단순한 진동만 나타



(a) X 방향

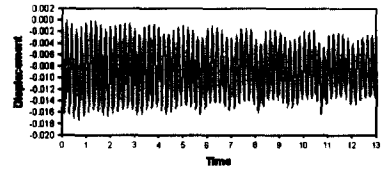


(b) Y 방향

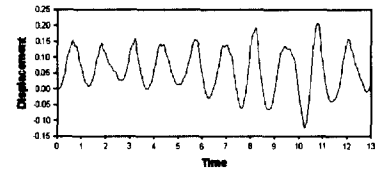


(c) Z 방향

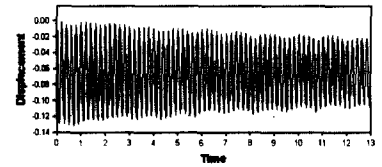
그림 7. 0.01% 불완전형상의 변위이력곡선
(Node #3, $\alpha=0.76$)



(a) X 방향

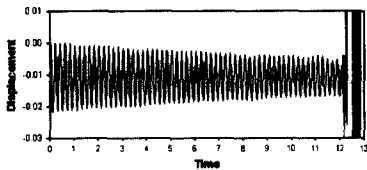


(b) Y 방향

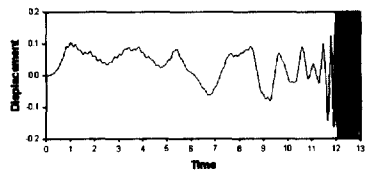


(c) Z 방향

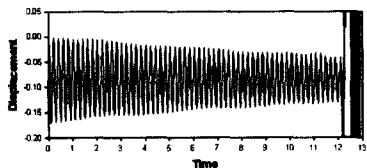
그림 9. 0.1% 불완전형상의 변위이력곡선
(Node #3, $\alpha=0.58$)



(a) X 방향

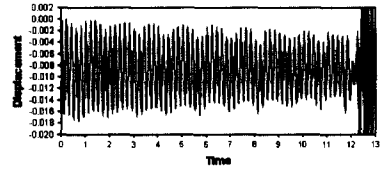


(b) Y 방향

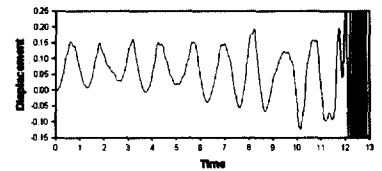


(c) Z 방향

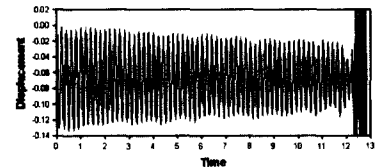
그림 8. 0.01% 불완전형상의 변위이력곡선
(Node #3, $\alpha=0.77$)



(a) X 방향



(b) Y 방향



(c) Z 방향

그림 10. 0.1% 불완전형상의 변위이력곡선
(Node #3, $\alpha=0.59$)

내지만, post-buckling 레벨에서는 약 12초를 조금 지나면서 응답이 발산하는 것을 보여주고 있다. 즉 주진동모드들에 의한 진동을 어느 정도 지속하다, 12초를 조금 지나면서 주진동모드와는 독립적인 좌굴모드가 서로 연성하게 되며, 이로 인해 주진동모드가 발산한다.

케이블 덩의 동적 불안정현상을 규명하기 위해 동적임계하중 근방에서의 위상곡면을 분석해 본다.

완전형상 모델인 경우, $\alpha = 1.0$ 에서 절점 #3의 위상곡면을 그림 11에 나타내었다.

X 방향과 Z 방향의 위상곡선의 궤도에서는 끌개(attractor)가 두개 이상의 한계순환(limit cycle)이 독립성을 유지한 채 운동을 계속하는 토러스(torus)를 보여주고 있다. 그러나 Y 방향의 끌개는 매우 미약하지만 독자적인 행로로 진행하고 있다.

0.01% 불완전형상 모델인 경우, pre-buckling 레벨인 $\alpha = 0.76$ 과 post-buckling 레벨인 $\alpha = 0.77$ 에서의 위상곡면을 알아본다. 절점 #3의

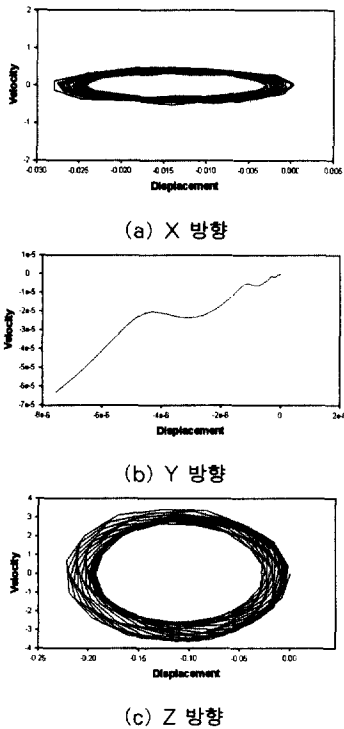


그림 11. 완전형상 모델의 위상곡면 (Node #3)

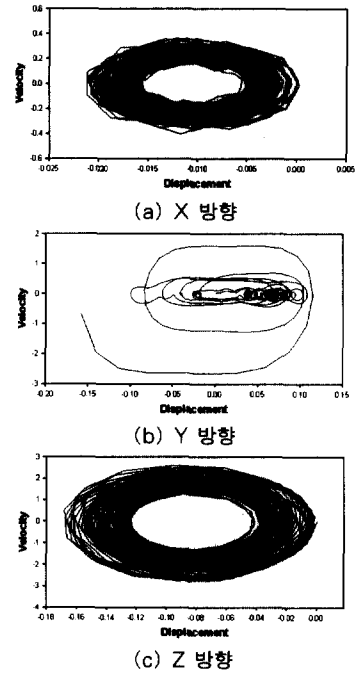


그림 12. 0.01% 불완전형상의 위상곡면 (Node #3, $\alpha = 0.76$)

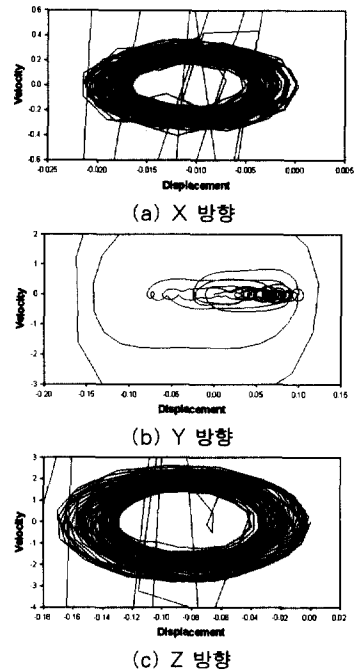


그림 13. 0.01% 불완전형상의 위상곡면 (Node #3, $\alpha = 0.77$)

결과를 $\alpha=0.76$ 인 경우는 그림 12에, $\alpha=0.77$ 인 경우는 그림 13에 각각 나타낸다.

X 방향과 Z 방향의 위상곡선의 궤도는 완전형상 모델의 경우와 유사하게 끌개가 도넛과 같은 모습의 토러스를 보여주고 있다. 그러나 Y 방향의 끌개는 비선형성의 증폭으로 인해 위상곡선 상에서 서로 중복되지 않는 새로운 궤도, 즉 strange attractor를 생성하며 카오스(chaos)적 거동을 나타낸다.

0.1% 불완전형상 모델인 경우, pre-buckling 레벨인 $\alpha=0.58$ 과 post-buckling 레벨인 $\alpha=0.59$ 에서의 위상곡면을 알아본다. 절점 #3의 결과를 $\alpha=0.58$ 인 경우는 그림 14에, $\alpha=0.59$ 인 경우는 그림 15에 각각 나타낸다.

0.1% 불완전형상 모델의 결과도 0.01% 불완전형상 모델인 경우와 유사한 현상을 보이고, 불완전량이 클수록 끌개의 특성이 더 확연히 나타난다. 즉 초기조건에 민감하게 의존하는 카오스 현상을 나타냄을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 기하학적 비선형을 고려한 Hybrid 케이블 돔의 간접좌굴을 수치적 기법을 이용한 이론적 접근방법으로 조사하고, 이를 정적 임계하중과 비교하였다. 동적좌굴하중은 비선형 운동방정식을 수치적분하여 결정하고 위상면을 이용하여 간접좌굴현상을 규명하였다. STEP 함수 하중에 대한 동적 해석결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

- (1) 동적 파괴 메커니즘의 특징으로, 주진동모드에 의한 진동을 어느 정도 지속하다 주진동모드와는 독립적인 좌굴모드와 서로 연성(coupling)하게 되며, 이로 인해 주진동모드가 발산한다.
- (2) 하중레벨의 증가에 따라 면내비틀림에 의해 변위가 급격히 증가하며 발산하는 불안정 현상이 발생하고, 이는 정적 문제의 분기현상(bifurcation)에 대응되는 간접좌굴

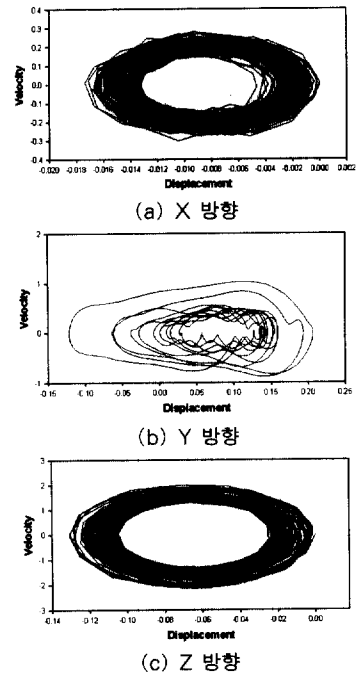


그림 14. 0.1% 불완전형상의 위상곡면 (Node #3, $\alpha=0.58$)

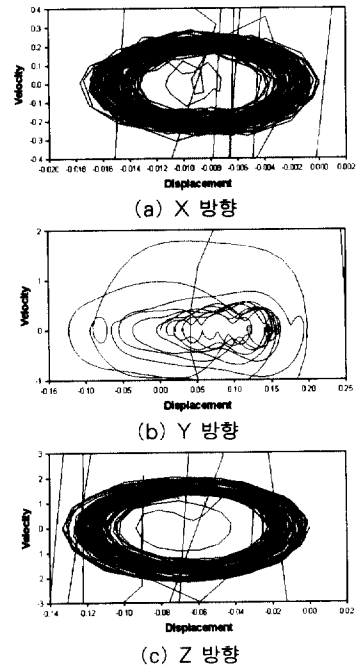


그림 15. 0.1% 불완전형상의 위상곡면 (Node #3, $\alpha=0.59$)

(indirect buckling)이다.

- (3) 본 연구에서 이용된 Geiger 모델인 경우, 동적 임계하중은 정적 임계하중의 50~80%까지 저하된다.
- (4) 면내비틀림을 발생시키는 원주방향 변위의 끌개는 비선형성의 증폭으로 인해 위상곡선 상에서 서로 중복되지 않는 새로운 궤도를 생성하며 카오스(chaos)적 거동을 나타낸다.

따라서 hybrid 구조물인 Geiger형 케이블 돔은 면내비틀림에 의한 간접좌굴에 의해 파괴 메커니즘이 형성되고, 임계하중레벨은 초기형상 불완전량에 크게 의존함을 알 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 초대형 구조시스템 연구센터(STRESS)의 지원에 의해 수행되었으며 이에 깊은 감사드립니다.

참고 문헌

1. Hsu, C. S., "On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions," *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 4, No. 1, 1966, pp. 1-21
2. Lock, M. H., "Snapping of a shallow sinusoidal arch under a step pressure load," *AIAA J.*, Vol. 4, No. 7, July, 1966, pp. 1249-1256.
3. Hsu, C. S., "The effects of various parameters on the dynamic stability of a shallow arch," *J. Appl. Mech.*, Vol. 34, No. 2, 1967, pp. 349-358
4. Fulton, R. E., and Barton, F. W., "Dynamic buckling of shallow arches," *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 97, No. EM3, June, 1971, pp. 865-877
5. Belytschko, T., Schwer, L. and Klein, M. J., "Large displacement, transient analysis of space frames," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11, 1977, pp. 65-84.
6. Svalbonas, V., and Kalnins, A., "Dynamic buckling of shells : evaluation of various methods," *Nucl. Eng. Des.*, 44, 1977, pp. 331-356.
7. Riks, E., "An incremental approach to the solution of snapping and bucking problems," *Inter. J. Solids Structures*, vol. 15, 1979, pp. 529-551.
8. Gregory, W. E. Jr., and Plaut, R. H., "Dynamic stability boundaries for shallow arches," *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 108, No. EM6, December, 1982, pp. 1036-1050.
9. Coan, C. H. and Plaut, R. H., "Dynamic stability of a lattice dome," *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 11, 2, 1983, pp. 269-274.
10. Waszczyszyn, Z., "Numerical problems of nonlinear stability analysis of elastic structures," *Computers & Structures*, Vol. 17 No. 1, 1983, pp. 13-24.
11. 박광규, 김문겸, 황학주, "낮은 포물선아치의 동적 안정영역에 관한 연구," *대한토목학회논문집*, 제 6권 3호, 1986, pp. 1-9.
12. Kato, S., Ishikawa, K., and Takashima, H., "Dynamic analysis of a simply supported spherical shell with a square plan subjected to vertical earthquake motions," *Proceedings of the International Colloquium on Space Structures for Sports Buildings*, Beijing, 1987, pp. 153-160.
13. Hill, C. D., Blandford, G. E. and Wang, S. T., "Post-buckling analysis of steel space trusses," *Journal of structural engineering*, Vol. 115, No. 4, April, 1989, pp. 900-919.
14. 林曉光, 複合ケーブル構造の構造安定解析, 修士學位論文, 東京大學, 1990.
15. 金勝德, 偏平構造物の動的安定に關する研究, 博士學位論文, 東京大學, 1990.
16. Kim, S. D. and Hangai, Y. "Direct and indirect snappings of shallow E.P. shells

- under the up-and-down earthquake excitation," Proceedings of International IASS Symposium 91, Copenhagen, 1991, Vol. 3, pp. 289-296
17. Kouhia, R. and Mikkola, M., "Tracing the equilibrium path beyond simple critical points," Inter. Journal of structural engineering, Vol. 118, 1992, pp. 1578-1596.
 18. 김승덕, "얇은 타원포물곡면셸의 동적 불안정 현상의 규명을 위한 비선형 동적 응답의 스펙트럼 분석," 전산구조공학 논문집, 제 8권 2호, 1995, pp. 153-161.
 19. Kim, Seung-Deog, et al., "Dynamic Instability of Shell-Like Shallow Trusses Considering Damping," Computers & Structures, Vol. 64, No. 1-4, 1997, pp. 481-489.
- (접수일자 : 2001년 4월 2일)