

Pasternak지반 위에 놓인 Timoshenko보-기둥의 안정해석

The Stability Analysis of Timoshenko Beam-Column on Pasternak Foundation

이 용 수¹⁾ · 이 병 구²⁾ · 김 선 균³⁾

Lee, Yong-Soo Lee, Byoung-Koo Kim, Sun-Gyun

요 약: 본 연구에서는 스패의 중간지점에 신축 스프링과 회전 스프링을 가지며, Pasternak지반 위에 놓인 Timoshenko보-기둥에 대해 유한요소법을 이용하여 안정해석을 한 것이다. 이 유한요소법에 의하여 얻어진 해는 신축스프링과 회전스프링, 전단지반이 없는 Timoshenko보-기둥의 경우에 대하여 기존해와 비교되었다. 동적안정해석에 의해 스패 중간지점에 신축 및 회전 스프링을 가진 Pasternak지반 위에 놓인 Timoshenko보-기둥의 동적안정영역을 결정하였다.

ABSTRACT: This paper is to analyze the stability of Timoshenko beam-column on Pasternak foundation, with the extensional and the rotational spring at center point of span by Finite Element Method. To verify this Finite Element Method, the results by the proposed method are compared with the existing solutions of Timoshenko beam-column without the extensional and the rotational spring and the shear foundation. The dynamic stability regions are decided by the dynamic stability analysis of Timoshenko beam-column on Pasternak foundation with the extensional and the rotation spring at center point of span.

핵심용어: Pasternak지반, Timoshenko보-기둥, 동적안정

KEYWORDS: Pasternak Foundation, Timoshenko Beam-Column, Dynamic Stability

1. 서론

여러 종류의 자연재해 중 지진은 인명과 재산에 가공할 만한 피해를 가져온다. 국내의 지진활동은 지진대에 속하는 세계 다른 지역에 비하여 낮은 편이나 최근에 그 규모는 적지만 지진발생빈도가 증가하고 있는 추세이다. 지진발생시 구조물의

응답은 지반-구조물 상호작용에 의해 해석이 단순치 않다. 그러나 지진발생 빈도가 증가하고 있는 우리나라에서도 지진에 의한 구조물의 응답을 정확히 규명해야 할 필요성이 날로 증대되고 있다.

지반 위에서 보는 구조물을 직접 지지하거나 지중구조물과의 연결을 위한 구조부재로 이용되고 있어 지반 위에 놓인 보의 정적·동적해석은 구조

1) 정회원, 원광대학교 건축공학과, 교수
2) 정회원, 원광대학교 토목공학과, 교수
3) 원광대학교 대학원 건축공학과, 공학석사

본 논문에 대한 토의를 2001년 8월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구 대상이 되고 있다. 지반위에 놓인 구조물의 거동 해석을 위해 지반을 무한개의 독립적인 스프링으로 모델화 한 Winkler모형이 사용되었다. 독립적인 스프링으로 구성된 Winkler모형은 그림 1과 같이 하중작용점의 처짐이 근접한 지역의 처짐에 영향을 미치지 못하는 문제점이 있다. 이 문제 해결을 위해 그림 2와 같이 전단층을 이용하여 지반 연속성을 고려한 Pasternak지반⁽¹⁾이 제시되었다.

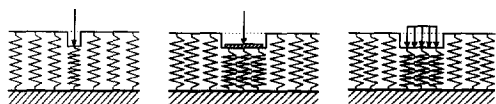


그림 1. 집중하중 및 분포하중이 작용하는 Winkler 지반모형

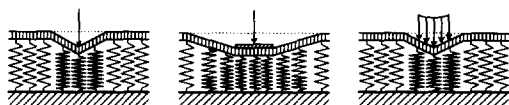


그림 2. 집중하중 및 분포하중이 작용하는 Pasternak지반모형

지금까지의 국외 연구는 Pasternak 지반상의 Timoshenko 보-기둥의 고유진동수나 Winkler 지반상의 Timoshenko 보-기둥의 안정영역을 결정하는 연구^{(1),(2),(3),(4),(5)}가 주를 이루고 있다. 국내의 경우 고유진동수를 구하는 논문⁽⁶⁾들은 있으나 안정영역을 결정하는 논문은 찾아볼 수 없다.

본 연구에서는 Pasternak지반에 의해 지지된 스패의 중간지점에 탄성스프링을 갖는 Timoshenko 보-기둥에 대하여 하중, 탄성스프링 강성, 단부조건 및 지반파라미터의 변화에 따른 안정해석을 행할 수 있는 프로그램을 개발하고 그 특성을 분석하는데 목적이 있다.

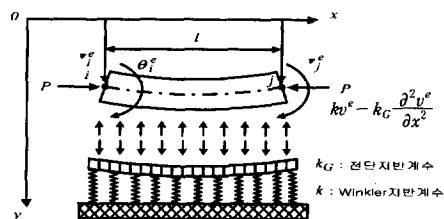
Timoshenko보-기둥의 안정해석을 위한 기본적인 가정은 다음과 같다.

- 1) 부재는 길이를 따라 균일한 단면을 갖으며, 부재축은 직선이고 축하중은 중심축에 작용한다.
- 2) 재료는 후크의 법칙을 따른다.
- 3) 보-기둥의 횡방향 변위만을 고려하고 지반의 관성과 damping 효과는 무시한다.

2. 정적, 동적 안정해석

그림 3은 이상화된 Pasternak 지반 위의 Timoshenko보-기둥 모델이다.

보 요소의 절점에서만 탄성스프링이 있는 것으로 가정하여 보-기둥요소의 변형에너지를 구하면 다음과 같다.



여기서 i, j : 요소의 절점, v^e : 절점변위
 θ^e : 절점회전각,

그림 3. 이상화된 모델

$$\begin{aligned}
 U^e = & \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial \theta^e}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k' GA \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} - \theta^e \right)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^l k (v^e)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k_G \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (k_{st,i} v_i^e + k_{st,j} v_j^e) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (k_{s\theta,i} \theta_i^e + k_{s\theta,j} \theta_j^e) \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

여기서 k' : 전단계수, G : 전단탄성계수,

A : 단면적,

$k_{st,i}$: i 점의 신축스프링강성,

$k_{s\theta,i}$: i 점의 회전스프링강성

운동에너지 T^e 는 다음과 같다.

$$T^e = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial v^e}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \left(\frac{\partial \theta^e}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

여기서 ρ : 보의 질량밀도

축압축력 P 에 의한 일 W^e 은 다음과 같다.

$$W^e = -P \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

요소의 변위함수는 다음과 같이 가정한다.

$$v^e = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (4)$$

여기서 a_0, a_1, a_2, a_3 : 일반화된 좌표계

전단변형각 $\phi^e (= \partial v^e / \partial x - \theta^e)$ 의 효과를 고려한 요소의 회전각 θ^e 는 다음과 같다.

$$\theta^e = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 6 \frac{EI}{kGA} a_3 \quad (5)$$

식(4)과(5)를 이용하여 $a_0 - a_3$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_0 = v_i^e \quad (6a)$$

$$a_1 = \frac{1}{1+\phi} \left[-\frac{\phi}{l} v_i^e + \left(1 + \frac{\phi}{2}\right) \theta_i^e + \frac{\phi}{l} v_j^e - \frac{\phi}{2} \theta_j^e \right] \quad (6b)$$

$$a_2 = \frac{1}{1+\phi} \left[-\frac{3}{l^2} v_i^e - \frac{1}{l} \left(2 + \frac{\phi}{2}\right) \theta_i^e + \frac{3}{l^2} v_j^e - \frac{1}{l} \left(1 - \frac{\phi}{2}\right) \theta_j^e \right] \quad (6c)$$

$$a_3 = \frac{1}{1+\phi} \left[\frac{2}{l^3} v_i^e + \frac{1}{l^2} \theta_i^e - \frac{2}{l^3} v_j^e + \frac{1}{l^2} \theta_j^e \right] \quad (6d)$$

여기서 $\phi = 12EI / (kGA l^2)$ 로 전단변형 파라미터이다.

식(4)와(5)에 식(6a-d)을 대입하면

$$v^e = [N_{v1} \ N_{v2} \ N_{v3} \ N_{v4}] \begin{pmatrix} v_i^e \\ \theta_i^e \\ v_j^e \\ \theta_j^e \end{pmatrix} = [N_v] \{q\}^e \quad (7)$$

$$\theta^e = [N_{\theta 1} \ N_{\theta 2} \ N_{\theta 3} \ N_{\theta 4}] \begin{pmatrix} v_i^e \\ \theta_i^e \\ v_j^e \\ \theta_j^e \end{pmatrix} = [N_\theta] \{q\}^e \quad (8)$$

여기서 $\{q\}^e$ 는 요소절점 변위벡터이고 $[N_v]$,

$[N_\theta]$ 는 형상함수 매트릭스로 다음과 같다.

$$N_{v1} = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (1 - \xi)\phi] / (1 + \phi)$$

$$N_{v2} = [\xi - 2\xi^2 + \xi^3 + (\xi - \xi^2)\phi/2] / (1 + \phi)$$

$$N_{v3} = [3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\phi] / (1 + \phi)$$

$$N_{v4} = [-\xi^2 + \xi^3 - (\xi - \xi^2)\phi/2] / (1 + \phi)$$

$$N_{\theta 1} = 6(-\xi + \xi^2) / [l(1 + \phi)]$$

$$N_{\theta 2} = [1 - 4\xi + 3\xi^2 + (1 - \xi)\phi] / (1 + \phi)$$

$$N_{\theta 3} = 6(\xi - \xi^2) / [l(1 + \phi)]$$

$$N_{\theta 4} = (-2\xi + 3\xi^2 + \xi\phi) / (1 + \phi)$$

여기서 $\xi = x/l$: 무차원 축좌표계

식(7),(8)을 식(1)-(3)에 대입하면 다음과 같다.

$$U^e = \frac{1}{2} \{q\}^e T [K_b]^e \{q\}^e + \frac{1}{2} \{q\}^e T [K_s]^e \{q\}^e + \frac{1}{2} \{q\}^e T [K_L]^e \{q\}^e + \frac{1}{2} \{q\}^e T [K_R]^e \{q\}^e + \frac{1}{2} \{q\}^e T [K_{sp}]^e \{q\}^e \quad (9)$$

$$T^e = \frac{1}{2} \{q\}^e T [M_i]^e \{q\}^e + \frac{1}{2} \{q\}^e T [M_r]^e \{q\}^e \quad (10)$$

$$W^e = -\frac{1}{2} \{q\}^e T [K_g]^e \{q\}^e \quad (11)$$

여기서 $[K_b]^e$ 는 휨강성 매트릭스, $[K_s]^e$ 는 전단강성 매트릭스, $[K_L]^e$ 는 Winkler지반 강성 매트릭스, $[K_R]^e$ 는 전단지반 강성매트릭스, $[K_{sp}]^e$ 는 스프링의 강성 매트릭스, $[M_i]^e$ 는 병진관성에 대한 연속질량매트릭스, $[M_r]^e$ 는 회전관성에 대한 연속질량매트릭스, $[K_g]^e$ 는 기하강성 매트릭스로 다음과 같다.

$$[K_b]^e = \int_0^l [B_b]^T E A [B_b] l d\xi = \frac{EI}{l^3(1+\phi)^2} \times \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ (4+2\phi+\phi^2)l^2 & -6l & (2-2\phi-\phi^2)l^2 & -6l \\ SYMM. & 12 & -6l & (4+2\phi+\phi^2)l^2 \end{pmatrix}$$

$$[K_s]^e = \int_0^l [B_s]^T k' GA [B_s] l d\xi = \frac{k' GA \phi^2}{4(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} 4 & 2l & -4 & 2l \\ l^2 & -2l & l^2 & -2l \\ SYMM. & 4 & -2l & l^2 \end{pmatrix}$$

$$[K_n]^e = \int_0^l [N_v]^T k A [N_v] l d\xi = \frac{kl}{(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3} & \left(\frac{11}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24}\right)l & \frac{9}{70} + \frac{3\phi}{10} + \frac{\phi^2}{6} & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24}\right)l \\ \left(\frac{1}{105} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120}\right)l^2 & \left(\frac{13}{420} + \frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24}\right)l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120}\right)l^2 & -\left(\frac{1}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24}\right)l \\ SYMM. & \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3} & -\left(\frac{11}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24}\right)l & \left(\frac{1}{105} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120}\right)l^2 \end{pmatrix}$$

$$[K_{\theta}]^e = \int_0^l [B_v]^T k_G [B_v] l d\xi = \frac{k_G}{\kappa(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} + 2\phi + \phi^2 & \frac{1}{10} l & -\left(\frac{6}{5} + 2\phi + \phi^2\right) & \frac{1}{10} l \\ \left(\frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{12}\right)l^2 & -\frac{1}{10} l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{12}\right)l^2 & -\frac{1}{10} l \\ SYMM. & \frac{6}{5} + 2\phi + \phi^2 & -\frac{1}{10} l & \left(\frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{12}\right)l^2 \end{pmatrix}$$

$$[K_{sp}]^e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_{st,i} & 0 & 0 & 0 \\ k_{s\theta,i} & 0 & 0 & 0 \\ SYMM. & k_{st,j} & 0 & 0 \\ k_{s\theta,j} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

여기서 $k_{st,i}$, $k_{s\theta,i}$ 는 각각 i 점의 신축스프링 강성과 회전스프링 강성을 나타낸다.

$$[M_s]^e = \int_0^l [N_v]^T \rho A [N_v] l d\xi = \frac{\rho A l}{(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3} & \left(\frac{11}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24}\right)l & \frac{9}{70} + \frac{3\phi}{10} + \frac{\phi^2}{6} & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24}\right)l \\ \left(\frac{1}{105} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120}\right)l^2 & \left(\frac{13}{420} + \frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24}\right)l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120}\right)l^2 & -\left(\frac{1}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24}\right)l \\ SYMM. & \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3} & -\left(\frac{11}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24}\right)l & \left(\frac{1}{105} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120}\right)l^2 \end{pmatrix}$$

$$[M_r]^e = \int_0^l [N_\theta]^T \rho A [N_\theta] l d\xi = \frac{\rho A l}{(1+\phi)^2} \left(\frac{r_g}{l}\right)^2 \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \left(\frac{1}{10} - \frac{\phi}{2}\right)l & -\frac{6}{5} & \left(\frac{1}{10} - \frac{\phi}{2}\right)l \\ \left(\frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{3}\right)l^2 & -\left(\frac{1}{10} - \frac{\phi}{2}\right)l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\phi}{6} - \frac{\phi^2}{6}\right)l^2 & -\left(\frac{1}{10} - \frac{\phi}{2}\right)l \\ SYMM. & \frac{6}{5} & -\left(\frac{1}{10} - \frac{\phi}{2}\right)l & \left(\frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{3}\right)l^2 \end{pmatrix}$$

$$[K_g]^e = \int_0^l P [B_v]^T [B_v] l d\xi = \frac{P}{\kappa(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} + 2\phi + \phi^2 & \frac{1}{10} l & -\left(\frac{6}{5} + 2\phi + \phi^2\right) & \frac{1}{10} l \\ \left(\frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{12}\right)l^2 & -\frac{1}{10} l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{12}\right)l^2 & -\frac{1}{10} l \\ SYMM. & \frac{6}{5} + 2\phi + \phi^2 & -\frac{1}{10} l & \left(\frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{12}\right)l^2 \end{pmatrix}$$

전체의 보-기둥에 대한 전체 동적 운동에너지 Π 는 다음과 같다.

$$\Pi = \sum_e (U^e - T^e + W^e) \quad (12)$$

Hamilton의 원리에 Π 를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$[K]\{q\} - [S]\{q\} + [M]\{\ddot{q}\} = 0 \quad (13)$$

여기서 각각의 매트릭스는 다음과 같다.

$$[K] = \sum_e [[K_b]^e + [K_s]^e + [K_{\beta 1}]^e + [K_{\beta 2}]^e]$$

: 전체 강성매트릭스

$$[S] = \sum_e [K_g]^e : \text{전체 기하강성매트릭스}$$

$$[M] = \sum_e [[M_i]^e + [M_r]^e] : \text{전체 질량매트릭스}$$

$$\{q\} = \sum_e \{q\}^e : \text{전체 절점변위벡터}$$

주기적인 축하중 $P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t$ 가 작용된 시스템에서 정적좌굴하중 P^* 을 이용해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P(t) = \alpha P^* + \beta P^* \cos \Omega t \quad (14)$$

여기서 Ω : 작용하는 축하중의 진동수

α, β : 정적좌굴하중 P^* 에 대한 비율

식(14)을 식(13)에 대입하면 다음과 같다.

$$[[K] - \alpha P^* [S_s] - \beta P^* \cos \Omega t [S_r]]\{q\} + [M]\{\ddot{q}\} = 0 \quad (15)$$

여기서 $[S_s]$: 축하중의 정적성분

$[S_r]$: 축하중의 시간의존성분

식(15)은 Mathieu-Hill의 주기적인 계수를 가진 2계 미분방정식이다.

1차근사에 의하여 해가 존재하기 위한 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$[[K] - \alpha P^* [S_s] \pm \frac{\beta}{2} P^* [S_r] - \frac{\Omega^2}{4} [M]]\{q\} = 0 \quad (16)$$

$[S_s] = [S_r] = [S]$ 이면, 식(16)은 다음과 같다.

$$[[K] - (\alpha \pm \frac{\beta}{2}) P^* [S] - \frac{\Omega^2}{4} [M]]\{q\} = 0 \quad (17)$$

식(17)은 α, β, ω 의 값에 따라 다음과 같은 세 가지 경우에 대하여 해석이 가능하다.

$$1) [[K] - P^* [S]]\{q\} = 0 \quad (18)$$

$$2) [[K] - \omega^2 [M]]\{q\} = 0 \quad (19)$$

$$3) [[K] - (\alpha \pm \frac{\beta}{2}) P^* [S] - \frac{\Omega^2}{4} [M]]\{q\} = 0 \quad (20)$$

3. 유한요소법의 적용 및 비교분석

3.1 적용조건 및 모델

유한요소 프로그램의 신뢰성을 검증하기 위해 Winkler지반이 없는 Euler-Bernoulli 보와 Winkler지반이 있는 Timoshenko 보-기둥을 문헌과 비교하였다. 유한요소법 적용모델은 그림4과 같이 Timoshenko보-기둥의 중간지점에 신축 및 회전스프링($k_{st}, k_{s\theta}$)을 가지며, Pasternak 지반 위에 놓인다.

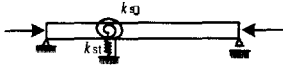
Timoshenko보-기둥은 다음과 같은 조건을 갖는다.

$$1) \text{탄성계수 } (E) : 20,390,000,000 \text{ kgf/m}^2$$

$$2) \text{프와송비 } (\nu) : 0.3$$

$$3) \text{전단계수 } (k') : 0.85$$

- 4) 보폭 × 보춤 : $0.03m \times 0.277m$
- 5) 단위체적당 질량 (ρ) : $798.1413kgf/m^3$
- 6) 중간지점 스프링강성의 변화
 k_{st} (kgf/m): $10^5, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}$
 $k_{s\theta}$ ($kgf \cdot m/radian$): $10^5, 10^7, 10^8, 10^9$
- 7) 정적좌굴하중비 (α)의 변화: 0, 0.5, 1.0
- 8) Winkler지반파라미터 ($WF_P = kL^4/\pi^4EI$)
: 0, 0.2, 0.6
- 9) 전단지반파라미터 ($SF_P = k_G L^2/\pi^2EI$)
: 0, 1.0
- 10) 좌굴하중 파라미터 ($BL_P = PL^2/\pi^2EI$)
- 11) 고유진동수 파라미터 ($NF_P = (\rho AL^4/EI)w^2$)



k_{st} : 신축스프링 상수
 $k_{s\theta}$: 회전스프링 상수

그림 4. 유한요소법의 적용 모델

3.2 검증

표 1. Timoshenko 보-기둥의 좌굴하중파라미터 (회전-회전)

	비교 문헌	요소 수	모드				
			1	2	3	4	5
$WF_P = 0.0$	문헌(1)	16	8.275	22.340	32.650	38.960	42.790
	본 연구	10	8.275	22.459	33.006	39.535	43.501
		20	8.276	22.359	32.868	39.395	43.381
$WF_P = 2.0$	문헌(2)	16	27.260	28.010	34.820	40.160	43.540
	본 연구	10	27.363	28.017	35.134	40.679	44.186
		20	27.300	28.043	34.858	40.441	43.804

표 2. Timoshenko 보-기둥의 좌굴하중파라미터 (자유-고정)

	비교 문헌	요소 수	모드				
			1	2	3	4	5
$WF_P = 0.0$	문헌(1)	16	2.354	15.500	28.080	36.200	41.110
	본 연구	10	2.354	15.543	28.316	36.685	41.754
		20	2.354	15.558	28.598	36.975	46.623
$WF_P = 2.0$	문헌(2)	16	12.640	31.750	36.310	41.570	43.960
	본 연구	10	12.668	31.930	36.652	42.084	44.563
		20	12.647	32.257	36.517	42.735	47.868

표 1-2는 Timoshenko보-기둥에 대하여 Winkler 지반이 있는 경우와 없는 경우에 대해 문헌 [1],[2]의 해와 본 유한요소법에 의한 좌굴하중 파라미터 해를 비교한 것이다. 지지단이 회전-회전인 경우에는 문헌[1],[2]의 해와 거의 일치한다. 지지단이 자유-고정인 경우는 4차모드까지 거의 일치하나 5차 모드에서 최대 13.41%의 큰 오차를 나타내었다.

표 3-5는 Timoshenko보-기둥에 대하여 지지점의 조건, 지반조건에 의한 고유진동수파라미터의 변화를 비교한 것이다. 표 3-4의 경우에는 문헌[3], [4]과 비교하여 본 연구의 해가 문헌[3]보다 문헌[4]에 근접함을 보이고 있다. 문헌[4]의 3차 모드를 기준으로 표 3-4중 표3에서 약 1.031%정도의 가장 큰 오차를 보이고 있다. 표5는 문헌[3]와 비교하여 3차 모드의 경우에 대해 오차가 회전-회전인 경우에는 약 2.56%이고, 회전-고정인 경우에는 0.08%정도의 차이를 보이고 있다.

표 3. Winkler지반이 없는 Timoshenko보-기둥의 고유진동수파라미터 ($BL_P = 0.6$ $WF_P = 0.0$)

	비교 문헌	요소 수	모드				
			1	2	3	4	5
회전 / 회전	문헌(4)	-	3.470	19.220	35.080	-	-
	문헌(3)	16	3.470	19.310	35.480	-	-
	본 연구	10	3.483	19.439	36.107	52.306	53.471
20		3.471	19.279	35.442	52.367	52.534	
회전 / 고정	문헌(4)	-	7.320	20.930	35.700	-	-
	문헌(3)	16	7.330	21.030	36.130	-	-
	본 연구	10	7.348	21.181	36.800	53.388	55.580
20		7.330	20.998	36.065	52.459	55.367	

표 4. Winkler지반이 있는 Timoshenko보-기둥의 고유진동수파라미터 ($BL_P = 0.6$ $WF_P = 0.6$)

	비교 문헌	요소 수	모드				
			1	2	3	4	5
회전 / 회전	문헌(4)	-	8.210	20.590	35.860	-	-
	문헌(3)	16	8.220	20.670	36.250	-	-
	본 연구	10	8.221	20.791	36.860	52.221	54.077
20		8.216	20.644	36.186	52.562	52.678	
회전 / 고정	문헌(4)	-	10.460	22.200	36.500	-	-
	문헌(3)	16	10.490	22.200	36.900	-	-
	본 연구	10	10.497	22.441	37.533	53.803	55.686
20		10.485	22.272	36.856	52.555	55.077	

표 5. Two-parameter지반이 있는 Timoshenko 보-기둥의 고유진동수파라미터

($BL_P=0.6$ $WF_P=0.6$ $SF_P=1.0$)

	비교 문헌	요소 수	모드				
			1	2	3	4	5
회전 / 회전	문헌(3)	16	12.650	28.340	47.610	-	-
		본 연구	10	12.644	28.227	47.007	52.220
회전 / 고정	문헌(3)	20	12.640	28.098	46.388	52.044	63.110
		본 연구	16	14.420	29.340	46.710	-
		10	14.434	29.492	47.373	55.307	67.004
		20	14.423	29.320	46.672	55.024	66.152

그림 5-6는 동적안정영역에 대한 유한요소프로그램의 신뢰성을 검증하기 위해 문헌(4) 비교한 것이다. 그림에서 Ω 는 축하중의 진동수, ω_e 는 보의와 고유원진동수, β 는 정적좌굴하중의 대한 동적좌굴하중의 크기 비를 나타낸다. Winkler지반이 없는 Euler-Bernoulli 보의 경우 $\beta=0.8$ 일 때 2차 모드에서 약 2.44% 정도의 오차를 보였다. Winkler 지반이 있는 Timoshenko 보-기둥의 경우에는 $\beta=1.0$ 일 때 4차 모드에서 약 2.60% 이내의 오차를 보였다.

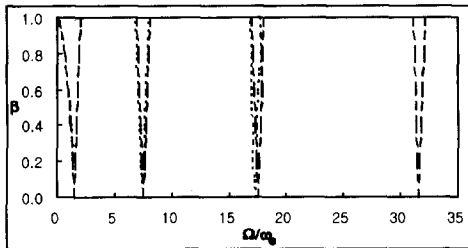


그림 5. Winkler지반이 없는 Euler-Bernoulli 보.
(-- 해석해 문헌(2))

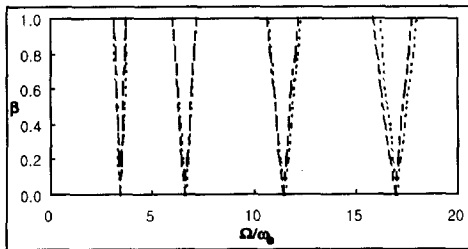
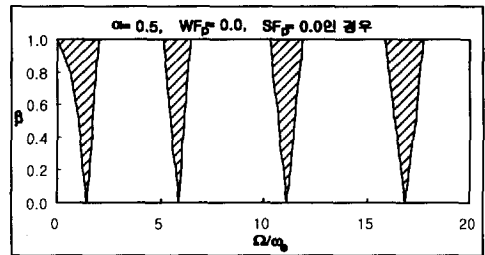


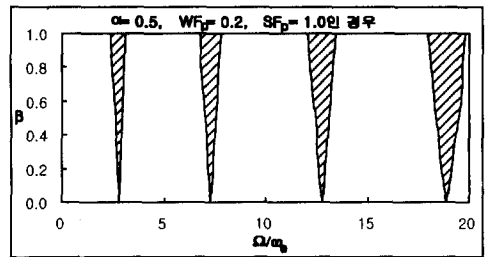
그림 6. Winkler지반이 있는 Timoshenko 보-기둥.
(-- 해석해 문헌(2))

3.3 유한요소법의 적용

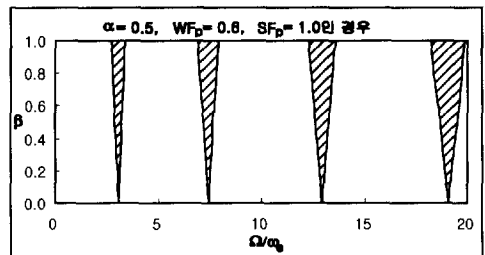
3.3.1 지반파라미터 변화에 따른 동적안정영역
그림 7의 경우는 지반파라미터 변화에 따른 Timoshenko보-기둥의 동적안정해석을 행한 것이다. 지반이 없는 경우에 비하여 Winkler지반과 전단지반이 있는 경우는 정적좌굴하중축으로부터 불안정영역이 더 멀리 분포됨을 보였고, 불안정영역도 미소하게 감소하는 현상을 보였다. 그러나 Winkler지반파라미터가 0.2에서 0.6으로 변화한 경우에는 거의 분별이 불가능한 정도의 아주 미소한 범위의 감소와 분포를 보였다.



(a)



(b)

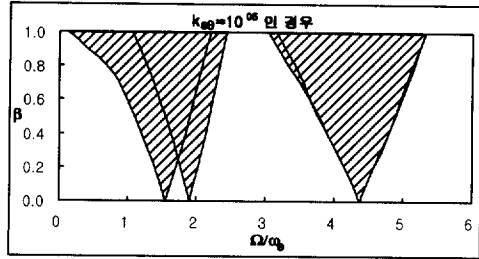


(c)

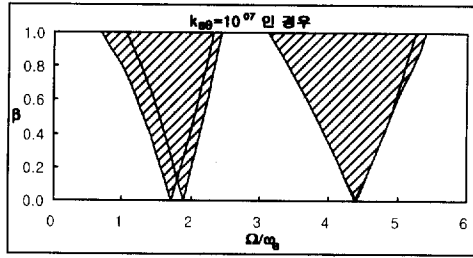
그림 7. 회전-회전, $BL_P=8.2820$, $NF_P=8.8460$

3.3.2 회전 스프링강성 변화에 따른 동적안정영역
 그림 8은 Pasternak지반에 의해 지지된 Timoshenko

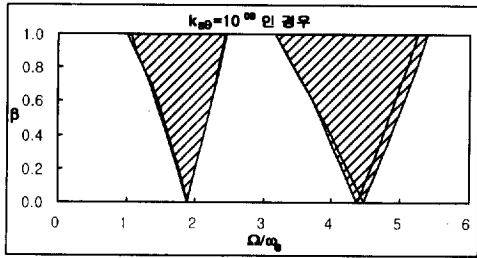
보-기둥의 부재 중앙에 위치한 회전 스프링강성을 $10^5 \sim 10^9$ 까지 변화시켰다. 회전스프링의 강성이 커짐에 따라 1,3차 모드의 불안정영역이 정적 좌굴하중축으로부터 멀어지면서 2,4차 모드와 겹쳐지는 현상을 볼 수 있으며, 특히 1차 모드의 불안정영역은 강성의 크기에 따라 불안정영역의 변화가 크게 나타났다. 그러나 일정한 회전 스프링 강성 ($k_{\theta\theta} = 10^{08}$)에 도달하면 불안정영역의 크기와 분포에는 큰 변화를 보이지 않았다.



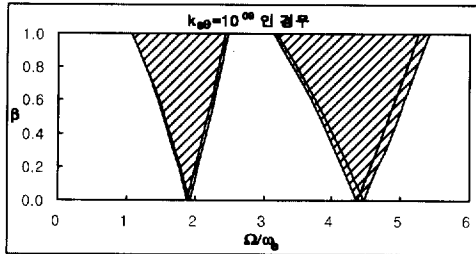
(a)



(b)



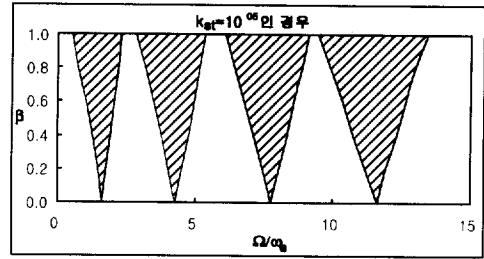
(c)



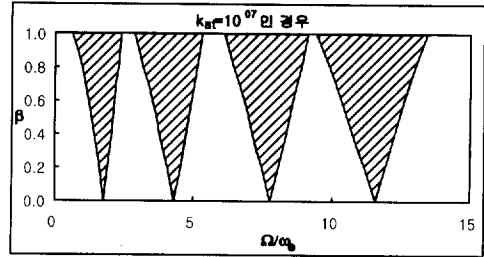
(d)

그림 8. 회전-회전, $\alpha = 0.5$, $BL_p = 33.799$,
 $NF_p = 31.8951$

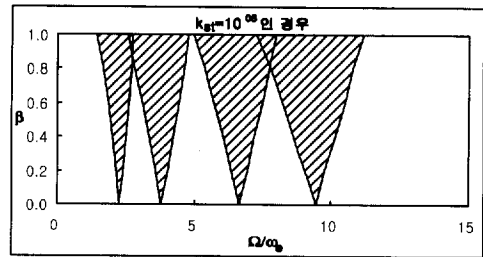
3.3.3 신축 스프링강성 변화에 따른 동적안정영역



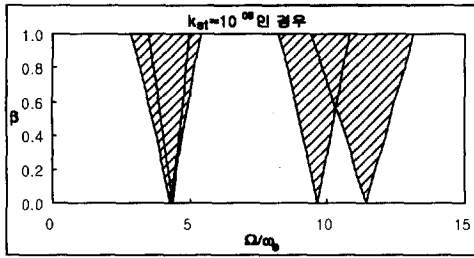
(a)



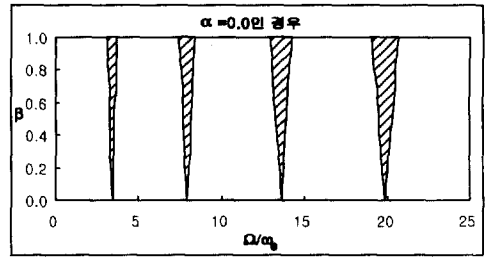
(b)



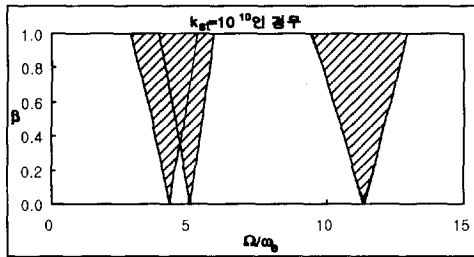
(c)



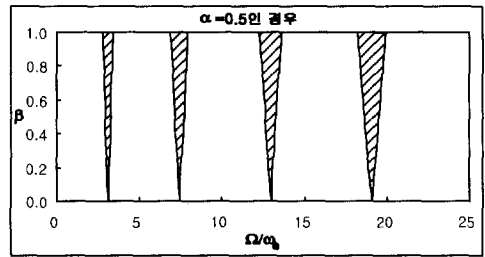
(d)



(a)



(e)



(b)

그림 9. 회전-회전, $\alpha = 0.5$, $BL_p = 24.072$,

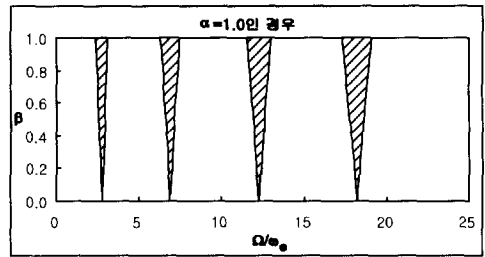
$$NF_p = 13.0928$$

그림 9는 Pasternak지반에 의해 지지된 Timoshenko보-기둥의 부재 중앙에 위치한 수직 스프링강성을 $10^5 \sim 10^{10}$ 까지 변화시킨 것이다. 수직 스프링강성이 증가할수록 불안정영역은 정적 좌굴하중축으로부터 멀어졌으며 불안정영역의 크기도 작아지는 것으로 나타났다.

특히 수직 스프링강성이 증가할수록 홀수모드의 불안정영역이 짝수모드의 불안정영역과 겹쳐지면서 전체의 영역내에서는 불안정영역이 감소하고 안정영역이 증가하는 현상을 나타냈다.

3.3.4 정적좌굴하중비의 변화에 따른 동적안정영역

그림 10은 Pasternak지반에 의해 지지된 Timoshenko보-기둥에 작용하는 정적좌굴하중비의 크기를 변화시킨 것이다. 정적좌굴하중비가 증가함에 따라 불안정영역이 정적좌굴하중축에 가까워짐을 볼 수 있으나 불안정영역의 크기에는 큰 변화를 보이지 않았다.



(c)

그림 10. 회전-회전, $BL_p = 8.2820$, $NF_p = 8.8460$

4. 결론

본 연구는 Pasternak지반에 의해 지지된 스펀의 중간지점에 신축 및 회전 스프링을 갖는 Timoshenko보-기둥에 대하여 좌굴, 진동해석 및 동적안정해석을 행하여 그 특성을 분석한 것이다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) Timoshenko보-기둥의 유한요소해는 문헌과 비교하여 4차 모드까지는 약 2.60%이내의 오차를 보였고, 저차모드에서 고차모드로 갈수록 오차가 증가하는 것으로 나타났다.

- (2) 신축 스프링강성 및 회전 스프링강성의 증가와 지반파라미터값의 변화에 따른 Timoshenko 보-기둥의 불안정영역은 정적좌굴하중축에서 멀어지고, 불안정영역의 크기도 작아짐을 보였다.
- (3) 정적좌굴하중비(α)의 크기가 증가할수록 불안정영역이 정적좌굴하중축에 가까워지므로 입력진동수에 대한 고유진동수 비(Ω/ω_e)가 감소하는 현상을 보였다.

참 고 문 헌

1. Wang, T.M, and Stephens, J.E. Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundations, *Journal of Sound and Vibration*, 51(2), pp. 149-155, 1977
2. Yokoyama, T. Parametric Instability of Timoshenko Beams Resting on An Elastic Foundation, *Computers & Structures*, vol.28(2), pp.207-216, 1988
3. Yokoyama, T. Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-parameter Elastic Foundation, *Computers & Structures*, vol.61(6), pp.995-1007, 1996
4. Cheng, F.Y, and Pantelides, C.P, Dynamics Timoshenko Beam-Columns on Elastic media. *ASCE J. Struct Engng*, 114 (ST7), pp1524-1550, 1988
5. Thomas, J, and Abbas, B.A.H, Finite Element Model for Dynamic Analysis of Timoshenko Beam, *Journal of Sound and Vibration*, 41(3), pp.291-299, 1975
6. 이병구, "전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동해석", 한국강구조학회논문집, 제6권 제3호, 1994.9

(접수일자 : 2000년 8월 26일)