

유한대판법에 의한 복합적층절판의 해석

FINITE STRIP ANALYSIS OF FOLDED LAMINATED COMPOSITE PLATES

윤 석 호¹⁾ · 한 성 천²⁾ · 장 석 윤³⁾

Yoon, Seok Ho Han, Sung Cheon Chang, Suk Yoon

요 약 : 본 연구에서는 복합재료로 구성된 구조물로서 박스거더와 같이 임의의 각도로 연결된 절판을 유한대판법으로 해석하였다. 각 적층판의 강성으로부터 적분에 의하여 판 두께방향의 전체 강성을 구하고 최소 포텐셜 에너지 이론으로부터 구한 평형방정식에 대입하여 전체 강성매트릭스를 구하였다. 슬래브나 박스거더의 변위 함수는 횡 방향의 Hermite 다항식과 종 방향의 조화함수의 결합으로 가정하였다. 종 방향 조화함수는 단부의 경계조건을 만족시키는 함수를 사용하였다. 해석시간의 단축 및 모델링이 쉽다는 장점을 가진 유한대판법은 복합 적층 재료로 구성된 박스거더와 같은 절판해석의 경우에도 매우 정확한 해를 얻을 수 있었다.

ABSTRACT : In this paper, the analysis of laminate composite folded plates with arbitrary angle connection like box girder is studied by finite strip method. Total stiffness of laminated plate is obtained by integration of the stiffness in each layer or lamina through laminate thickness, and total stiffness matrix is obtained by substitution to equilibrium equation derived from the minimum total potential energy theorem. The assumed displacement functions for a finite strip method in plate or box girder analysis are combinations of one-way polynomial functions in the transverse direction and harmonic functions in the span-wise direction. The harmonic functions are chosen to satisfy the two end support conditions. Finite strip method with the merits of the simplification in modeling and the reduction of analytical time is accurate in the analysis of laminate composite folded plates shaped like box girders.

핵심용어 : 유한대판법, 적층절판, 박스거더, 복합재료, 강성-자중비

KEYWORDS : Finite strip method, Folded laminated plate, Box girder, composite materials, Strength-to-weight ratio

1) 정회원, 경동대학교 토목설계공학과 조교수, 공학박사
2) 정회원, 대원과학대학 토목과 조교수, 공학박사
3) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 2001년 8월 31일까지 학회로 보내 주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서론

구조물의 경량화와 내구성의 증대라는 두 가지 목적을 동시에 달성하기 위해 로켓, 비행기, 파이프, 압축용기, 해저용기 등 현대산업의 다양한 분야에서 높은 하중-강성비를 가지는 섬유보강 복합재료의 사용은 광범위하게 확대되고 있다.

이러한 복합재료로 구성된 구조물의 해석으로는 유한요소법이 널리 사용되고 있으나 토목구조물의 특성상, 종방향으로 일정한 단면과 재료의 성질을 가지는 교량의 상판과 같은 구조물이 대부분이고 구조해석시 발생하는 모델링의 복잡성과 해석시간의 단축을 고려할 때 유한대판법의 사용이 적절하다고 할 수 있다.

유한대판법은 Y. K. Cheung⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾에 의하여 일반화되었으며 유한요소법과 절판법의 중간단계로 본다. 유한요소법에서는 변위함수의 근사 화에 있어서 요소의 모든 방향으로 다항식의 변위함수를 사용하는데 반하여, 유한대판법의 대판은 횡방향으로는 다항식을 사용하고 종 방향으로는 대판의 끝단에서 경계조건을 만족시키는 미분 가능한 시리즈를 사용한다. 유한대판법은 직선 절판구조는 물론 원호곡선 절판구조에도 적용될 수 있다. 유한대판법을 이용한 해석과정은 첫 번째 단계로서 일반적으로 구조물을 길고 유한의 폭을 가지는 대판으로 분할하고 두 번째 단계로 절선에서 두 개의 대판을 상호 연결하고 해석한다. 이러한 유한대판법은 교량의 상판과 같이 종 방향으로 일정한 단면성질과 재료성질을 갖는 구조물의 적용에 있어서 상당히 효율적인 것으로 알려져 있다.

유한대판법을 적층복합판에 적용한 연구는 1975년 Hinton⁽¹³⁾에 의해 복합적층판의 휨에 관한 연구가 수행되었고 최근에 와서는 M. S. Cheung⁽¹⁰⁾에 의해 활발한 연구가 진행되고 있다. 한편 국내에서는 건설교통부에서 강상판을 갖는 곡선박스거더 교량의 해석시스템 개발의 일환으로 연구되어 보고되었다⁽⁸⁾.

본 연구에서는 유한개의 복합적층 대판이 임의의 절선에서 서로 연결되어 있는 복합적층절판을 해석하기 위하여 수치해석방법으로는 유한대판법을 사용하였고 해석방법의 정확성을 검증하기 위하여 여러 가지 참고문헌의 결과들과 비교하였으며 구조물 설계자나 프로그램의 검증을 원하는 수치해석자들을 위해 여러 가지 결과들을 도표와 그림으로 나타내었다.

2. 적층복합판의 강성매트릭스

2-1 요소 휨 강성 및 면내 강성매트릭스

N개의 유한대판요소로 분할된 적층복합판의 부재치수와 좌표계는 그림 1-(a)와 같이 고려하고 i번째 유한대판요소의 부재치수, 좌표계와 자유도는 그림 1-(b)와 같이 고려할 수 있다.

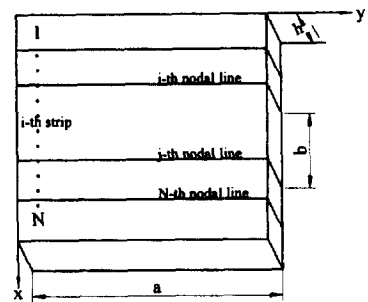


그림 1(a). 적층복합판의 유한대판요소

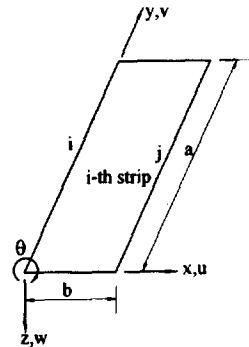


그림 1(b). 적층복합판의 유한대판요소

스트립내에서의 변위함수 w 는 x 방향의 다항식과 y 방향의 급수의 곱으로 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

$$w = \sum_{m=1}^r X_m(x) Y_m(y) \quad (1)$$

여기서 r 은 조화함수의 차수이다.

이때 스트립에서 가정한 변위장은 절점에서의 변위로 식(2)와 같이 표현할 수 있다.

$$w = \sum_{m=1}^r [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}_m Y_m(y) = \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta\}_m \quad (2)$$

여기서

$[N]_m = [C] Y_m(y)$, $\{\delta\}_m = \{w_i \ \theta_i \ w_j \ \theta_j\}_m^T$ 이고
 윗첨자 T 는 전치를 나타낸다.

이때 급수항으로 일반적인 보 진동함수를 사용하는 경우는 식(3)과 같다.

$$Y_m(y) = A_1 \sin \frac{k_m y}{b} + A_2 \cos \frac{k_m y}{b} + A_3 \sinh \frac{k_m y}{b} + A_4 \cosh \frac{k_m y}{b} \quad (3)$$

여기서 $k_m = m\pi/a$ 이다.

또한 다항식은 식(4)와 같은 Hermite 다항식을 사용한다.

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3 & C_2 &= x(1 - 2\bar{x} + \bar{x}^2) \\ C_3 &= 3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3 & C_4 &= x(\bar{x}^2 - \bar{x}) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $\bar{x} = x/b$ 이다

스트립내에서의 변위함수 u, v 는 x 방향의 다항식과 y 방향의 급수의 곱으로 식 (5)와 같이 표현할 수 있다.

$$u, v = \sum_{m=1}^r X_m(x) Y_m(y) \quad (5)$$

이때 스트립에서 가정한 변위장은 절점에서의 변위로 식(6)과 같이 표현할 수 있다.

식(6)부터 $Y_m(y)$ 는 Y_m 으로 표시한다.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^r [(1-\bar{x})(\bar{x})] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_j \end{Bmatrix}_m Y_m \\ v &= \sum_{m=1}^r [(1-\bar{x})(\bar{x})] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_j \end{Bmatrix}_m \frac{a}{k_m} Y_m' \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\bar{x} = x/b$.

식(6)의 변위장은 식(7)과 같이 매트릭스 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta\}_m \quad (7) \\ [N]_m &= \begin{bmatrix} (1-\bar{x})Y_m & 0 & (\bar{x})Y_m & 0 \\ 0 & (1-\bar{x})\frac{a}{k_m}Y_m' & 0 & (\bar{x})\frac{a}{k_m}Y_m' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

적층판의 변형률 및 곡률 매트릭스는 식(8)과 같다.

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [B]_m^b \{\delta\}_m^b \\ \{x\} &= \begin{Bmatrix} -x_x \\ -x_y \\ 2x_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 [N]_m}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 [N]_m}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 [N]_m}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{\delta\}_m^b = \sum_{m=1}^r [B]_m^b \{\delta\}_m^b \quad (8) \end{aligned}$$

여기서

$$[B]_m^b = \begin{bmatrix} B^{11} & B^{12} & B^{13} & B^{14} \\ B^{21} & B^{22} & B^{23} & B^{24} \\ B^{31} & B^{32} & B^{33} & B^{34} \end{bmatrix}$$

$$B^{11} = -\frac{1}{b} Y_m, \quad B^{13} = \frac{1}{b} Y_m,$$

$$B^{22} = (1-\bar{x}) \frac{a}{k_m} Y_m'', \quad B^{24} = (\bar{x}) \frac{a}{k_m} Y_m'',$$

$$B^{31} = (1-\bar{x}) Y_m', \quad B^{32} = -\frac{1}{b} \frac{a}{k_m} Y_m',$$

$$B^{33} = (\bar{x}) Y_m', \quad B^{34} = \frac{1}{b} \frac{a}{k_m} Y_m',$$

$$B^{12} = B^{14} = B^{21} = B^{23} = 0.$$

$$[B]_m^b = \begin{bmatrix} B^{11} & B^{12} & B^{13} & B^{14} \\ B^{21} & B^{22} & B^{23} & B^{24} \\ B^{31} & B^{32} & B^{33} & B^{34} \end{bmatrix}$$

$$B^{11} = \frac{6}{b^2} (1-2\bar{x}) Y_m, \quad B^{12} = \frac{2}{b} (2-3\bar{x}) Y_m,$$

$$B^{13} = \frac{6}{b^2} (-1+2\bar{x}) Y_m, \quad B^{14} = \frac{6}{b^2} (-3\bar{x}+1) Y_m,$$

$$B^{21} = -(1-3\bar{x}^2+2\bar{x}^3) Y_m'', \quad B^{23} = -(3\bar{x}^2-2\bar{x}^3) Y_m''$$

$$B^{22} = -x(1-2\bar{x}+\bar{x}^2) Y_m'', \quad B^{24} = -x(\bar{x}^2-\bar{x}) Y_m'',$$

$$B^{31} = \frac{2}{b} (-6x+6\bar{x}^2) Y_m', \quad B^{32} = 2(1-4\bar{x}+3\bar{x}^2) Y_m',$$

$$B^{33} = \frac{2}{b} (6\bar{x}-6\bar{x}^2) Y_m', \quad B^{34} = 2(3\bar{x}^2-2\bar{x}) Y_m'$$

이고 윗첨자 p 와 b 는 각각 면내 강성과 휨 강성으로 구분하여 표시하기 위한 것이다.

k 번째 적층판의 응력-변형을 관계는 식(9)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서 \bar{Q}_{ij} 는 구조축 방향의 강성이다.

전체 판 두께에 대하여 적분하여 판의 내력을 구하면 적층판의 힘-변형을 관계는 식(10)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \\ \chi_x^0 \\ \chi_y^0 \\ \chi_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i=1, 2, 6,)$$

적층판의 배열이 대칭이라면 힘-변형을 관계는 식(11)과 같이 단순화 할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^l [A] \{\epsilon\} = [A] \sum_{m=1}^l [B]_m^b \{\delta\}_m^p$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^l [D] \{\epsilon\} = [D] \sum_{m=1}^l [B]_m^b \{\delta\}_m^b \quad (11)$$

대판의 변형에너지는 식(12)와 같다. (11)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^b [\{\epsilon\}^T \{N\} + \{\chi\}^T \{M\}] dx dy \quad (12)$$

식(12)에 최소 포텐셜 에너지이론을 적용하면 면내 강성매트릭스와 휨 강성매트릭스는 식(13)과 같다.

$$[S]_{mn} = \int [B]_m^b{}^T [A] [B]_n^b dA,$$

$$[T]_{mn} = \int [B]_m^b{}^T [D] [B]_n^b dA \quad (13)$$

적층판에 작용하는 수직 하중항은 식(14)와 같이 표현할 수 있으며,

$$\{F\}_m = \int_0^a \int_0^b \begin{Bmatrix} [N_1]_m^T \\ [N_2]_m^T \end{Bmatrix} \{q_z\} dx dy \quad (14)$$

$$= \{q_z\} \int_0^a \begin{Bmatrix} [C_{1,2}]_m^T \\ [C_{3,4}]_m^T \end{Bmatrix} dx \int_0^b Y_m dy$$

여기서 $C_{1,2}, C_{3,4}$ 는 식(4)에 나타내었다.

적층판에 작용하는 면내 하중항은 식(15)와 같이 표현할 수 있다.

$$\{F\}_m = \frac{b}{2} \begin{Bmatrix} q_x \int_0^a Y_m dy \\ q_y \frac{a}{k_m} \int_0^a Y_m' dy \\ q_x \int_0^a Y_m dy \\ q_y \frac{a}{k_m} \int_0^a Y_m' dy \end{Bmatrix} \quad (15)$$

2-2 요소 전체강성매트릭스

면내강성과 휨 강성이 자유도를 서로 분리하여 표현하면 임의의 조화항 m 에 대한 요소 강성매트릭스는 식(16)과 같다.

$$[K]_m = \begin{bmatrix} [S_{ii}] & 0 & [S_{ij}] & 0 \\ 0 & [T_{ii}] & 0 & [T_{ij}] \\ [S_{ij}] & 0 & [S_{jj}] & 0 \\ 0 & [T_{ij}] & 0 & [T_{jj}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

요소 하중매트릭스와 변위매트릭스는 식(17)과 같다.

$$\{P\}_m = \begin{Bmatrix} \{F_i\}_p \\ \{F_i\}_b \\ \{F_j\}_p \\ \{F_j\}_b \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta\}_m = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\}_p \\ \{\delta_i\}_b \\ \{\delta_j\}_p \\ \{\delta_j\}_b \end{Bmatrix} \quad (17)$$

만약, 스트립의 양단이 단순지지되어 있다면 I_1 에서부터 I_5 까지의 적분값은 $m \neq n$ 일 때 식(18)과 같이 항상 0이 된다.

$$I_1 = \int_0^a Y_m Y_n dy = 0, \quad I_4 = \int_0^a Y_m'' Y_n'' dy = 0,$$

$$I_2 = \int_0^a Y_m'' Y_n dy = k_m^2 \int_0^a \sin k_m y \sin k_n y = 0,$$

$$I_3 = \int_0^a Y_m Y_n'' dy = -k_n^2 \int_0^a \sin k_m y \sin k_n y = 0,$$

$$I_5 = \int_0^a Y_m' Y_n' dy = k_m k_n \int_0^a \cos k_m y \cos k_n y = 0$$

(18)

여기서 $k_m = m\pi/a$ 이고 $k_n = n\pi/a$ 이다.

요소 강성매트릭스를 전체 구조물에 대하여 조합하면 식(19)과 같은 구조물 전체 강성매트릭스를 구할 수 있다.

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad (19)$$

2-3 적층복합판의 좌표변환

그림 2에서 보는바와 같이 적층복합판이 y, \bar{y} 축을 경계로 절곡되어 있을 때 B 상태의 대판요소가 A 상태의 대판요소로 회전되어있다고 볼 수 있으며 이 경우 절선에서 하중의 평형을 세우기 위해 전체좌표계의 좌표변환이 필요하게된다. 여기서 각 스트립의 요소좌표계는 x, y, z 이고 전체좌표계는 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 일 때 y 와 \bar{y} 는 두개의 인접한 스트립의 연결선에서 일치하게 된다. 그러므로 전체좌표계와 요소좌표계사이에서 식(20)과 같은 변환관계를 얻을 수 있다.

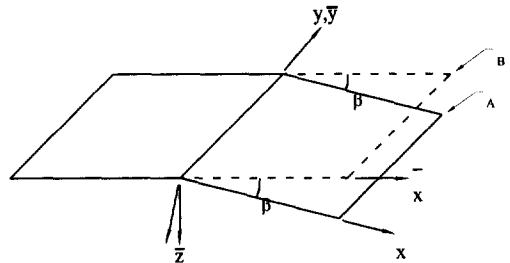


그림 2. 적층복합판의 좌표변환

$$\{\Delta\}_m = \begin{bmatrix} [t] & 0 \\ 0 & [t] \end{bmatrix} \{\bar{\Delta}\}_m = [T] \{\bar{\Delta}\}_m \quad (20)$$

여기서,

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그러므로 하중벡터, 변위벡터와 강성행렬은 식 (21)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} [\bar{K}]_m &= [T]^T [K]_m [T] \\ \{\bar{P}\}_m &= [T]^T \{P\}_m \end{aligned} \quad (21)$$

좌표변환된 구조물 전체의 강성매트릭스는 식 (22)와 같다.

$$[\bar{K}]\{\bar{Z}\} = \{\bar{P}\} \quad (22)$$

이와 같은 유한대판법에서 변위함수는 u, w 와 같이 선택되고 변환에 포함되는 두 요소는 종방향 (y 방향)으로 같은 변화를 갖게 되므로 좌표축 x 와 z 의 회전은 결과적으로 절선에서 변위의 적합조건에 영향을 끼치지 않는다. 그러나 평판 유한요소의 대부분은 u, w 변위요소로 다른 차수의 다항식을 사용하기 때문에 u, w 모두가 적합변위 함수라 하더라도 변환 후 그들은 요소 방향여현에 의지하는 영역에서 조합되고 변화 적합조건을 상실한다. 평판 유한요소는 각 절점에서 단지 5개의 자유도 만이 존재하지만, 전체 좌표계로 변환될 때 6개의 자유도가 필요하다. 이 경우 z 축을 중심으로 한 회전 자유도 θ_z 에 해당하는 강성은 변환되기 전에는 무한대로 강성행렬에 포함되지 않았고 이와 관련된 자유도는 0 으로 취급하였기 때문에 국부좌표계와 전체좌표계가 일치하는 같은 평면상의 경우에는 특이치가 발생한다. 결과적으로 유한요소법에서는 인공적인 6번째 자유도 혹은 실제로 어떠한 인공적인 강성계수가 더해지던

가, 또는 5개의 자유도를 유지하기 위해 절점에서 절점까지의 방향변화가 표면좌표축에서 사용되어야 한다. 반면에 유한대판법에서 사용되는 대판은 절선 당 4개의 자유도가 항상 유지되므로 평면해석에 사용된 표준적인 좌표변환만이 사용된다. 이러한 이유로 유한요소법으로는 해석하는데 어려움이 많은 절판구조는 유한대판법을 이용하여 해석하면 쉽게 해석이 가능하다 하겠다.

3. 수치해석 및 결과분석

본 연구의 정확도를 검증하기 위하여 여러 가지의 예제를 해석하여 참고문헌의 결과와 비교하였다.

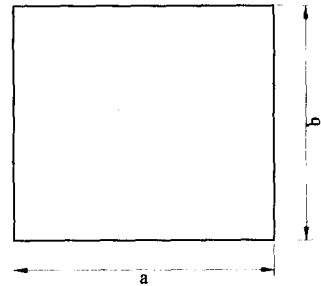


그림 3. 판의 부재치수

[예제 1] 2변이 단순지지되어 있고 타단이 자유단인 등방성 판의 경우

그림 3과 같은 해석예제의 부재치수와 재료의 특성은 식(23)과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \text{판의 길이 } a, b &\text{ 는 각각 } 60 \text{ cm 이고} \\ h &= 1 \text{ cm}, E_1 = E_2 = 1911 \text{ kg/cm}^2, \nu_{12} = 0.3, \\ q &= 0.01 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned} \quad (23)$$

중양점에서의 처짐과 모멘트를 유한요소법과 참고문헌(8), (11)의 결과와 비교하여 표 1에 나타내었다.

표 1. 등방성 평판 해석 결과

항 목	FSM(Ref. 8)		FEM	Timoshenko(Ref. 11)	FSM(본연구)	
	6Strip	8Strip			4Strip	8Strip
중양변위(cm)	9.46	9.538	9.555	9.694	9.698	9.697
Mx(kg·cm)	-	4.430	4.407	4.410	4.434	4.423
My(kg·cm)	-	-	-	0.976	1.019	0.987

중양점의 처짐값은 대판요소를 6개와 8개 사용하고 조화함수의 수를 6개까지 사용한 참고문헌의 결과와 비교해서 4개의 대판만을 사용하고 조화함수의 수도 3개만 사용한 본 연구의 결과가 이론적인 값에 더욱 정확하게 수렴함을 알 수 있었다. 중양점의 모멘트역시 참고문헌의 결과와 비교하여 볼 때 이론값에 가까운 값을 나타내었다.

두 개의 예제를 통한 결과 유한대판법으로 판요소를 해석할 때 4개의 대판만 사용하여도 공학적 오차한계를 만족하는 결과를 얻을 수 있음을 알았다. 예제 2는 대판의수를 4개만 사용하여 해석하였다.

[예제 2] 2변이 단순지지되어 있고 타단의 경계조건이 임의인 적층복합판

그림 3과 같은 해석예제의 부재치수와 재료의 특성은 식(24)와 같이 가정한다.

x 및 y 방향의 판의 길이는 각각 25.4 cm 이고

$$E_1 = 13.223 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, E_2 = 1.075 \times 10^6 \text{ N/cm}^2,$$

$$\nu_{12} = 0.24, G_{12} = 0.565 \text{ N/cm}^2, q = 68.9 \text{ N/cm}^2,$$

$$h = 0.254 \text{ cm} \tag{24}$$

적층판의 보강방향이 0/90/0 인 경우, 임의의 경계조건을 갖는 적층복합판의 중앙점에서의 무차원 처짐을 참고문헌의 결과와 비교하여 표 2에 나타내었다.

표 2. 적층복합판의 해석 결과 ($w_o = wE_2h^3/qa^4$)

항 목	SS	SC	CC	FF	FS	FC
Levy Solution(Ref. 12)	0.475	0.214	0.110	4.299	2.359	0.935
FSM(본연구)	0.475	0.215	0.111	4.299	2.359	0.935

(SS : 양단 단순지지, SC : 한단 단순지지 타단 고정, CC : 양단고정, FF : 양단 자유, FS : 한단 자유 타단 단순지지, FC : 한단 자유 타단 고정)

0/90/0으로 적층되어 있고 양단은 단순지지, 나머지 경계의 조건이 임의인 적층복합판의 해석 결과를 해석적인 방법인 Levy 해법과 비교한 결과 등방성판에서와 같이 적층복합판의 경우에도 유한대판법의 수렴도는 매우 빠르고 정확함을 알 수 있었다.

[예제 3] 임의의 형상을 갖는 절판 구조

그림 4와 같은 해석예제의 부재치수와 재료의 특성은 식(25)와 같이 가정한다.

$$L = 70 \text{ m}, E = 1 \text{ N/m}^2, G = 0.5 \text{ N/m}^2 \tag{25}$$

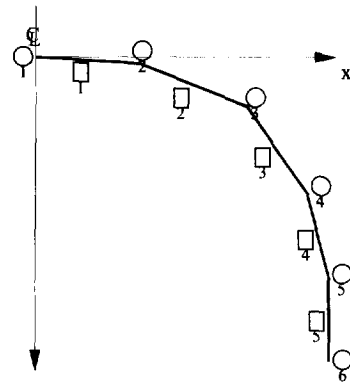


그림 4. 임의형상 절판구조의 노드번호와 대판요소번호

절점의 좌표가 표 3과 같고 각 대판의 특성이 표 4과 같은 절판 구조의 처짐값과 응력을 참고문헌과 비교하여 표 5에 나타내었다.

표 3. 절점의 좌표

절점	x 좌표(m)	z 좌표(m)
1	0.000	0.000
2	4.915	0.875
3	9.830	1.750
4	14.165	4.250
5	18.500	6.750
6	18.500	9.750

표 4. 대판의 특성

요소	좌측 절점	우측 절점	두께(m)	분포하중 (N/m^2)
1	1	2	0.25	80
2	2	3	0.25	80
3	3	4	0.25	80
4	4	5	0.25	80
5	5	6	0.50	75

표 5. 절판구조의 중앙점 요소 응력

요소	응 력 (N/m^2)	
	참고문헌(5)	본 연구
1	-0.13368E+05	-0.13368E+05
2	-0.11947E+05	-0.11947E+05
3	-0.85004E+04	-0.85007E+04
4	-0.35713E+04	-0.35714E+04
5	-0.39030E+03	-0.39032E+04

표 6. 절판구조의 중앙점 처짐

절점	변 위 (m)	
	참고문헌(5)	본 연구
1	-0.65460E+07	-0.65462E+07
2	0.23542E+07	0.23543E+07
3	0.15383E+08	0.15384E+08
4	0.30597E+08	0.30598E+08
5	0.36961E+08	0.36962E+08
6	0.36960E+08	0.36961E+08

절판구조의 응력과 처짐또한 매우 정확한 결과를 나타내었다. 위의 3가지의 예제를 통한 본 연구의 정확도는 검증되었고 유한대판법으로 적층복합절판을 해석한 결과들을 수치해석자들과 프로그램의 검증을 원하는 구조해석자들을 위하여 도표화하고 그림으로 나타내었다.

[예제 4] 임의의 형상을 갖는 복합적층 절판 구조
예제 3의 절판구조와 모양이 비슷한 복합적층절판구조를 예로 해석하기 위해 부재치수와 재료의 특성은 식(26)와 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}
 L &= 100 \text{ cm}, E_1 = 30 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, \\
 E_2 &= 3.0 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, G_{12} = 1.0 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, \\
 \nu_{12} &= 0.30
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

정확한 재료의 물성치들을 사용하기 위하여 단위를 통일 시켰으며 각 절점의 좌표와 대판요소의 특성은 표 7, 8와 같다.

표 7. 절점의 좌표

절 점	x 좌표(cm)	z 좌표(cm)
1	0.0	0.0
2	5.0	1.0
3	10.0	2.0
4	15.0	4.0
5	20.0	6.0
6	20.0	10.0

표 8. Strip의 특성

요소	좌측 절점	우측 절점	두께 (cm)	분포하중 (N/cm^2)
1	1	2	0.25	1.0
2	2	3	0.25	1.0
3	3	4	0.25	1.0
4	4	5	0.25	1.0
5	5	6	0.25	1.0

표 9. 복합적층절판구조의 절점 처짐

절점	3층 적층복합절판의 변위(cm)		4층 적층복합절판의 변위(cm)	
	0/0/0	0/90/0	0/90/90/0	90/0/0/90
1	0.71212	0.06665	0.05211	0.00897
2	0.74114	0.08378	0.06795	0.06444
3	0.80818	0.11837	0.09797	0.14430
4	0.89458	0.15699	0.12873	0.19113
5	0.98284	0.18909	0.15043	0.16851
6	0.98270	0.18882	0.15005	0.16811

[예제 5] 등방성 박스거더 교량의 해석

그림 5와 같은 박스거더 교량의 각 대판요소가 복합적층판으로 형성되어있을 때 $y-z$ 평면의 복합적층 박스거더 교량의 부재치수와 하중상태는 그림 6과 같고 $x-z$ 평면의 노드번호와 대판요소의 번호는 그림 7과 같다. 재료의 특성은 식(27)과 같이 가정한다.

$$L = 40 \text{ m}, E = 30000 \text{ MPa}, \nu = 0.15, \gamma = 24 \text{ kN/m}^3
 \tag{27}$$

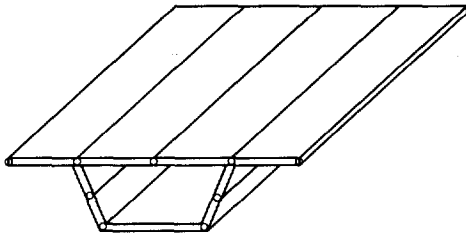


그림 5. 박스거더 형태의 교량

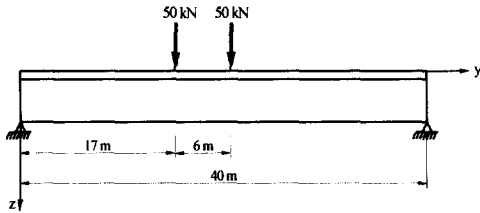


그림 6. 복합적층 박스거더 교량의 y-z 평면
부재치수와 하중상태

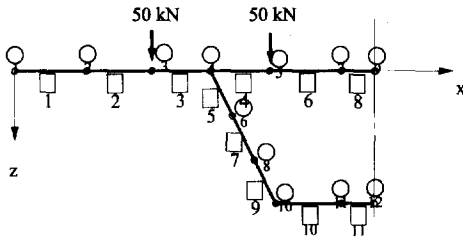


그림 7. 복합적층 박스거더 교량의 x-z 평면
하중상태, 노드번호와 대판요소번호

각 노드의 좌표는 표 10과 같으며 각 노드에서의 처짐, 모멘트, 응력등을 참고문헌과 비교하여 정리한 것이 표 11이다.

표 10. 노드의 좌표

노드	x좌표(m)	z좌표(m)
1	0.0	0.0
2	1.1	0.0
3	2.1	0.0
4	3.0	0.0
5	3.9	0.0
6	3.33	0.67
7	5.0	0.0
8	3.67	1.34
9	5.5	0.0
10	4.0	2.0
11	5.0	2.0
12	5.5	2.0

표 11. 박스거더 교량의 처짐, 모멘트 와 응력

노드	처짐(mm)		모멘트(kN-m/m)		응력(MPa)	
	Cheung [3]	본연구	Cheung [3]	본연구	Cheung [3]	본연구
1	43.2	43.25	0.0	0.75	-4.95	-4.94
2	-	42.42	-	-3.33	-	-5.00
3	-	41.78	-	-14.98	-	-5.12
4	41.4	41.43	-35.0	-38.91	-5.25	-5.26
5	-	41.39	-	-1.91	-	-5.37
6	-	41.39	-	-8.66	-	-0.457
7	-	41.44	-	6.95	-	-5.09
8	-	41.37	-	-4.19	-	4.36
9	41.4	41.45	6.8	7.26	-5.08	-5.08
10	41.3	41.33	-2.0	-2.30	9.08	9.12
11	-	41.32	-	10.63	-	8.96
12	41.3	41.32	11.3	11.36	8.95	8.95
39.0		보 이론(Beam- Theory)[3]				

[예제 6] 복합적층 박스거더 교량의 해석

그림 5와 같은 박스거더 교량의 각 대판요소가 [0/90/90/0]으로 적층된 복합적층판으로 형성되어 있을 때 y-z 평면의 복합적층 박스거더 교량의 부재치수와 하중상태는 그림 8과 같고 x-z 평면의 절점번호와 대판요소의 번호는 그림 9와 같다. 복합적층판으로 구성된 경우와 강재로 구성된 경우의 처짐을 비교하기 위하여 복합적층재료와 강재의 특성은 식(28)을 사용한다.

복합적층재료의 특성 :

$$E_1 = 206850 \text{ MPa}, E_2 = 82740 \text{ MPa},$$

$$G_{12} = 48265 \text{ MPa}, \nu = 0.23, \gamma = 26.3 \text{ kN/m}^3$$

강재의 특성 :

$$E = 206850 \text{ MPa}, G = 77500 \text{ MPa},$$

$$\nu = 0.29, \gamma = 76.6 \text{ kN/m}^3$$

(28)

각 노드의 좌표는 표 10과 같으며, 각 노드에서의 처짐을 표 12에 나타내어 복합재료로 적층된 경우를 범용프로그램(LUSAS)의 결과와 비교하였다.

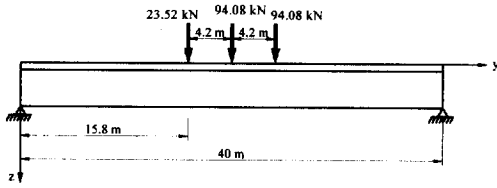


그림 8. 복합적층 박스거더 교량의 y-z 평면 부재치수와 하중상태

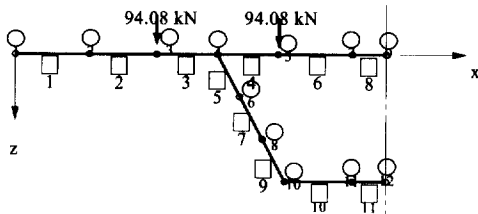


그림 9. 복합적층 박스거더 교량의 x-z 평면 하중상태, 노드번호와 대관요소번호

그림 10에서 박스거더 교량의 각 대관요소가 [0/90/90/0]으로 적층된 복합적층판은 강재로 구성된 경우에 비하여 처짐량이 최대 45% 줄어들어 휨강성에 있어서 우수한 효과를 나타냄을 알 수 있다.

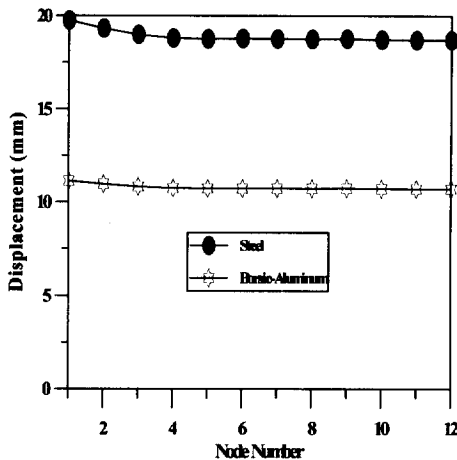


그림 10. 복합적층 박스거더 교량의 처짐비교

표 12. 복합적층 박스거더 교량의 처짐

절점	처짐(mm)		
	Steel	Borsic-Aluminum	LUSAS(14)
1	19.75	11.14	11.56
2	19.31	10.97	11.30
3	18.98	10.83	10.94
4	18.79	10.74	10.89
5	18.75	10.73	10.91
6	18.77	10.73	10.88
7	18.75	10.73	10.89
8	18.74	10.72	10.87
9	18.75	10.73	10.87
10	18.71	10.71	10.87
11	18.69	10.70	10.87
12	18.69	10.70	10.86

그림 11은 박스거더의 길이를 늘렸을때의 각 절점에서의 처짐을 나타내었다. 40m에서 60m로 증가될 경우에는 약 4배로 처짐이 증가되었고 80m로 증가되는 경우에는 약 15배로 처짐이 증가됨을 알 수 있었다.

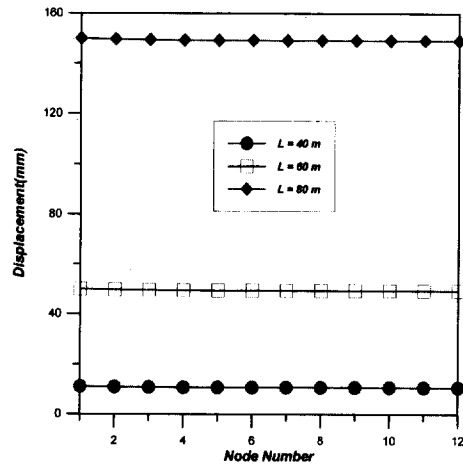


그림 11. 복합적층 박스거더 교량의 처짐비교

그림 12는 적층각도의 배열과 층수를 증가시켰을 때 각 절점에서의 처짐을 나타내었다. 길이방향으로 화이버가 보강됐을 경우 처짐이 감소함을 알 수 있었고 적층수가 증가되더라도 처짐이 증가할 수 있음을 알 수 있었다.

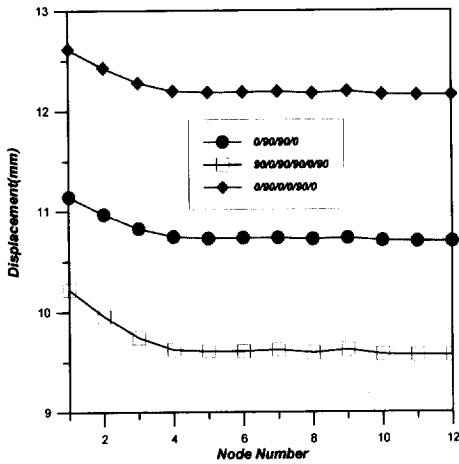


그림 12. 복합적층 박스거더 교량의 처짐비교

4. 결론

기존의 복합적층판에 관한 연구는 판의 어느 한 부분도 절곡되어 있지 않은 완전한 평판의 경우에만 해석되었다. 그러나 실제 토목구조물을 포함한 모든 복합재료가 사용되는 구조물은 임의의 각도로 절곡하여 사용할 경우가 생기게 된다. 본 연구에서는 복합재료로 구성된 임의의 형상의 구조물이 절선에서 임의의 각도로 연결된 경우를 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 유한대판법을 이용한 해석결과 등방성판의 경우는 물론 복합적층판의 경우에도 매우 빠르게 정확해에 수렴함을 알 수 있었다.
- (2) 종방향으로 일정한 단면을 가지는 교량과 같은 구조물의 해석시 단면의 두께변화를 쉽게 적용할 수 있어 변단면 복합적층구조물의 해석도 가능하였다.
- (3) 유한대판법을 사용하여 박스거더 구조물의 해석을 수행한 결과 기존의 보해석에 의한 처짐보다 큰 처짐값을 나타내었다.
- (4) 등방성 강재료만 구성된 박스거더인 경우에 비해 복합재료로 구성된 박스거더의 해석결과 처짐이 감소함을 알 수 있었고 지간길이

를 현격히 증가시키거나 거대 구조물을 설계할 때 복합재료의 사용이 부재의 단면을 줄일 수 있는 재료적 장점이 있음을 알 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 2000년도 경동대학교 학술 연구비 지원에 의하여 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고 문헌

1. Cheung, Y. K., "The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with Two Opposite Simply Supported Ends", Proc. Inst. Civ. Eng., 40, 1968, pp 1-7.
2. Cheung, Y. K., "Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs", Proc. ASCE 94, 1968, pp 1365-1378.
3. Cheung, Y. K., "Analysis of Box Girder Bridge by Finite Strip Method, Proc. 2nd Int. Symposium on Concrete Bridge Design, Chicago, ACI Publication SP 26, April, 1969, pp 357-378.
4. Cheung, Y. K. and Chakrabarti, S., "Analysis of Simply Supported Thick, Layered Plates", ASCE 97, 1971, pp 1039-1044.
5. Cheung, Y. K., "Folded Plate structures by Finite Strip Method", ASCE 95, 1969, pp 2963-2979
6. Troitsky, M. S., Orthotropic Bridges Theory and Design. James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, Ohio, 1987.
7. William, K. J. and Scordelis, A. C., "Analysis of Orthotropic Folded Plates with Eccentric Stiffeners" SESM Report No. 70-2. Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, 1970.

8. 건설교통부, 강상판을 갖는 곡선 박스거더 교량의 해석 시스템 개발, 1997
9. Khong, P. W., Development of a Micro-computer Finite Strip Analysis for Thin Walled Structures. Ph. D. thesis, Department of Mechanical and Process Engineering, University of Strathclyde, 1988.
10. Cheung, M. S., Li, W. and Chidiac, S. E., Finite Strip Analysis of Bridges. E & FN SPON, 1996.
11. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1963.
12. Reddy, J. N., Mechanics of Laminated Composite Plates, CRC Press, 1997.
13. Hinton, E., "Flexure of Composite Laminates using the Thick Finite Strip Method", Computers & Structures, Vol. 1, 1977, pp 217-220.
14. LUSAS, Ver. 12.3, FEA Ltd., 1999.

(접수일자 : 2000년 8월 7일)