

株價時系列의 性質과 特性 : 韓美比較

李 逸 均*

Signorum igitur alia sunt
naturale, alia data.**

요 약

증권가격의 시계열을 그래프로 표시하면 이 시계열의 운동양태가 파악될 수도 있다. 그래프를 통하여 추세가 존재하고 있는지 아니면 존재하지 않는지를 파악할 수 있을 것이다. 그리고 이 그래프를 통하여 증권가격 시계열이 정상적과정에 의하여 생성되는지의 여부가 인식될 수도 있을 것이며, (조건부) 이분산이 존재하고 있는지 또는 (조건부) 동분산이 존재하고 있는지도 인식될 수 있을 것이다. 간단한 기술통계량을 통하여 증권시계열의 성질을 파악할 수도 있다. 이 시계열이 선형과정에 의하여 생성되는지 아니면 비선형과정에 의하여 생성되는지도 인식할 수 있을 것이다. 뿐만 아니라 비선형과정중 하나인 카오스 과정에 의하여 증권가격이 생성되는지의 여부도 파악할 수 있을 것이다. 증권가격의 실현된 표본경로와 시뮬레이션을 통하여 얻은 표본경로가 일치하는지 또는 불일치하는지에 대한 판별을 통하여 모형정립에서 특히 많이 사용되고 있는 확률과정들이 생성시키는 증권가격 시계열이 실제로 관찰된 가격 시계열과 일치하여 현실적합성을 가지고 있는지의 여부도 판단할 수 있을 것이다. 주가시계열 그 자체를 출발점으로 하여 이 시계열의 움직임과 행동양식을 파악해가면 수많은 연구를 통하여 축적된 이론들과 주가를 형성시키는 성질들이 현실적으로 성립하고 있는지도 밝힐 수 있고 개발된 이론들의 장점과 단점을 강도높게 밝힐 수 있는 계기도 갖게 될 것이다. 데이터를 있는 그대로 면밀하게 검토하면 이미 공개된 문제점(open question)도 확인할 수 있을 것이고 아직 알려지지 않은 문제점들과 질문들을 찾게 될 수도 있을 것이다. 이것들은 앞으로의 연구를 위한 중요한 발견이 될 수 있을 것이다. 이 논문에서는 문제와 질문의 발견에 초점을 둔다. 이 논문에서는 한국의 주식시장과 미국의 주식시장을 대비하여 다룬다. 우리가 그동안의 연구를 통하여 미국의 문헌과 미국의 시장에 대한 지식을 상당히 축적하고 있는 만큼 이 대비를 통하여 두 시장이 동일하게 가지고 있는 행동양태와 서로 상이하게 가지고 있는 점들을 파악하면 두 시장에 대한 이해의 폭도 넓어질 것이며 동시에 미국의 연구결과를 수용하는 큰 방향을 결정하는데에도 일조가 되리라고 생각된다.

* 명지대학교 경영학과 교수

** 그러므로 標識의 일부는 자연적이고 일부는 約定的이다(아우구스티누스 Augustinus, 그리스도교 교양 De doctrina christinae).

I. 서 론

주가시계열의 행동에 대한 연구가 이론적 측면과 실증적 측면에서 활발하게 이루어져 이에 대한 지식이 많이 축적되었다. 그럼에도 불구하고 주가시계열의 행동에 대하여는 밝혀져야 할 점들이 많이 있는 것 같다. 여컨대 주가가 무작위 행보(random walk)나 마팅게일 과정(martingale process)에 의하여 생성된다는 주장이 실증분석을 통하여 지지를 받아 왔으나 근래에는 이를 부정하는 실증분석이 대두되고 있다. 그러나 마팅게일 과정에는 현실적합성이 결여되어 있다는 증거가 제시되어 있음에도 불구하고 효율적 시장가설, 특히 약형 효율성은 아직도 광범위하게 현실적 타당성이 있는 가설로 수용되고 있는 것 같다. 그래서 기술적분석은 학계에서 거의 수용되지 못하고 있는 실정이다.

교과서에서 중요시되고 있는 자본자산의 가격을 결정하는 모형들은 이론의 타월성이 높지 평가 되면서도 현실분석에서는 많이 이용되고 있는 것 같지 않다. 이 모형들이 교과서에 중요시되는 것은 자본자산의 가격을 결정하는데 관련이 되는 요소가 위험이라는 점을 극명하게 제시하고 있고 위험의 성질을 분명하게 드러내 주는 데 있는 것 같다. 근래에는, 특히 자본자산 가격결정 모형의 실증분석에서는 β 가 가격을 결정해주는 유일하고 단일하며 분할이 불가능한 위험이 아니라 β 가 위험들이 단일요소로 용해된 위험이라는 전제하에 여러 개의 위험 요소로 분할하고 이 위험 요소들의 역할과 아울러 이 요소들의 긴밀한 결합형태를 파악하려는 시도가 활발히 이루어지고 있다는 감이 크다.

이시적(intertemporal) 관점과 연속시간의 측면에서 재무현상을 파악하려는 연구에 있어서는 브라운 운동 과정(Brownian motion process)이 전가의 보도 역할을 담당하고 있는 것 같다. Itô 확률 과정을 전제로 하고 동태적 관점에서 목적함수와 제약조건을 설정하면 동태계획법에 의하여 해를 구하고 이 해를 통하여 자본자산가격의 결정과정에 대한 성질은 도출하고 나아가 자본자산의 가격을 결정하는 모형을 얻는다. Merton(1973a)과 Cox, Ingersoll과 Ross(1985)는 이 방법을 통하여 주식의 가격을 결정하는 이시적 자본자산 가격 결정모형을 정립하고 채권가격을 결정하는 모형을 정립한 바 있다. 다른 측면에서는 위험 중립적 평가(risk neutral valuation) 개념을 사용하여 자본자산 가격을 생성시

키는 근본적 편미분방정식을 도출하고 이 방정식의 해를 통하여 자본자산의 가격을 결정하는 모형들이 정립되고 있다. 이 방법을 통하여 성공을 이룩한 모형이 Black과 Scholes(1973)의 옵션가격 결정모형이다. Merton(1973b)은 근본적 편미분 방정식의 정립을 통하여 옵션의 성질을 광범위하고 깊이 있게 도출한 바 있다.

동태계획법을 이용하거나 근본적 편미분방정식을 사용하여 자본자산의 가격의 성질을 파악하고 가격결정모형을 도출하는데에는 한계가 있다. 이것은 폐형해를 얻기가 어려우며 방정식들의 행동을 추적하기가 불가능한 경우가 허다하기 때문이다. 이를 극복하기 위한 것이 마팅계일 방법이다. 이 방법은 동태계획법이 진행되는 순서를 역으로 하여 자본자산의 성질을 파악하는 것이다. Duffie와 Huang(1985)이 이 방법을 성공적으로 수행하여 오래 생존하고 있는 자본자산의 성질을 훌륭하게 규명하고 있다.

연속시간의 관점에서 도출된 모형과 성질들은 몇몇 경우를 제외하면 실증분석이 이루어지지 못하고 있다. 이것은 수식이 복잡하여 실증분석 모형을 도출하기가 용이하지 않다. 또한 데이터가 이산적으로 관찰되므로 그대로 시간 연속모형에 적용하기가 어려우므로 이산적 시계열을 연속 시계열로 변환시키거나 아니면 연속모형을 이산모형으로 전환시켜야 하는 이산화(descretization)이 요청되고 있기 때문인 것 같다. 이자율의 가간구조 모형과 옵션모형에 실증분석이 한정되어 있는 것 같다. 그러나 브라운 운동과정 그 자체와 Itô 확률과정 그 자체에 대한 실증분석은 거의 이루어지고 있지 않은 것 같다. 李逸均(1998)은 Uhlenbeck-Ornstein과정, 기하브라운 운동과정과 평균회귀과정이 주가형성 과정으로 적합성을 가지는지의 여부를 검정하였는데, 기하브라운 운동과정이 주가확률과정으로 타당하다는 결과를 얻었다.

증권 가격의 운동을 파악하고 그 운동의 성질을 도출하기 위하여 다각적인 면에서 연구가 활발히 진행되어오고 있다. 고도의 기법을 사용하여 이론적으로 연구된 결과가 현실적합성을 가지고 있는지 또는 가지고 있지 않은지를 검정하고 있다. 모수추정방법, 반모수추정방법(semiparametric estimation method), 비모수추정방법이 실증분석에서 검정도구로 사용되고 있다.

베이지통계학의 방법론도 응용되고 있다. 뿐만아니라 모든 증권에 공통적으

로 영향을 미치고 있는 요소들의 인식에도 연구의 초점이 맞추어지고 있기도 하다. 횡단면 분석 뿐만 아니라 시계열의 분석 방법도 활발히 사용되고 있다. 자기회귀모형, 자기회귀이동평균모형, 적분 자기회귀 이동평균모형에 대한 연구를 통하여 주가형성 과정에 대한 지식이 많이 축적되었다. 분수적분 자기회귀 이동평균모형과 chaos모형도 연구가 진행되고 있다. 자기회귀 조건부 이분산과정(autoregressive conditional heteroscedastic process)계통의 모형을 통하여 주가형성에 조건부 이분산이 큰 역할을 담당하고 있음이 밝혀지고 있다. 그리고 분수적분 일반자기회귀 조건부 이분산 과정에 대한 연구도 진행되고 있다.

위에서 제시된 여러 연구방법은 훌륭한 것으로 이 연구를 통하여 증권가격의 운동에 대한 성질을 여러 각도에서 파악하게 되었다. 훌륭한 성과인 것이다. 그러나 이러한 연구들에서는 상반된 결과가 제시되기도 한다. 고도의 기법을 사용하는 연구가 중요하다는 것은 아무리 강조해도 지나치지 않을 것이다. 그러나 이에 앞서 증권가격의 시계열 그 자체를 있는 그대로 파악해 보는 것도 증권가격의 움직임에 파악하는데 도움이 되리라고 판단된다. 어느 의미에서는 증권가격의 시계열 데이터 그 자체가 가격형성과 가격의 행동의 성질과 특성을 파악하기 위한 출발점이기도 하다. 시계열의 면밀한 검토에 의하여 연구 주제나 방향 또는 이 양자가 정하여 지기도 한다. 그만큼 중요시 되어야 할 것이다.

증권가격의 시계열을 그래프로 표시하면 이 시계열의 운동양태가 파악될 수도 있다. 그래프를 통하여 추세가 존재하고 있는지 또는 존재하고 있는지 아니면 존재하지 않는지를 파악할 수 있을 것이다. 그리고 이 그래프를 통하여 증권가격 시계열이 정상적과정(stationary process)에 의하여 생성되는지의 여부가 인식될 수도 있을 것이며, (조건부) 이분산이 존재하고 있는지 또는 (조건부) 동분산이 존재하고 있는지도 인식될 수 있을 것이다. 간단한 기술통계량을 구하고 이 통계량에 의한 simulation을 통하여 증권시계열의 성질을 파악할 수도 있다. 기술통계량은 시계열의 운동양태에 관한 무척 많은 정보를 제공하고 있는 통계량 인 것이다. 이 시계열이 선형과정에 의하여 생성되는지 아니면 비선형과정에 의하여 생성되는지도 인식할 수 있을 것이다. 뿐만아니라 비선형과

정중 하나인 카오스 과정에 의하여 증권가격이 생성되는지의 여부도 파악할 수 있을 것이다. 증권가격의 실현된 표본경로(sample path)와 simulation을 통하여 얻은 표본경로가 일치하는지 또는 불일치하는지에 대한 판별을 통하여 모형정립에서 특히 많이 사용되고 있는 확률과정들이 생성시키는 증권가격시계열이 실제가격 시계열과 일치하여 현실적합성을 가지고 있는지의 여부도 판단할 수 있을 것이다. 이 점이 이 논문의 목적이다.

주가시계열 그 자체를 출발점으로 하여 이 시계열의 움직임과 행동양식을 파악해가면 수많은 연구를 통하여 축적된 이론들과 주가를 형성시키는 성질들이 현실적으로 성립하고 있는지도 밝힐 수 있고 개발된 이론들의 장점과 단점을 강도높게 밝힐 수 있는 계기도 갖게 될 것이다. 데이터를 있는 그대로 면밀하게 검토하면 이미 공개된 문제점(open question)도 확인할 수 있을 것이고 아직 알려지지 않은 문제점들과 질문들을 찾게 될 수도 있을 것이다. 이것들은 앞으로의 연구를 위한 중요한 발견이 될 수 있을 것이다. 이 논문에서는 문제와 질문의 발견에 초점을 둔다. 그 해결책의 강구는 할애하고자 한다. 이 논문에서는 한국의 주식시장과 미국의 주식시장을 대비하여 다룬다. 우리가 그 동안의 연구를 통하여 미국의 문헌과 미국의 시장에 대한 지식을 상당히 축적하고 있는 만큼 이 대비를 통하여 두 시장이 동일하게 가지고 있는 행동양태와 서로 상이하게 가지고 있는 점들을 파악하면 두 시장에 대한 이해의 폭도 넓어질 것이며 동시에 미국의 연구결과를 수용하는 큰 방향을 결정하는데에도 일조가 되리라고 생각된다.

이 논문의 진행은 다음과 같다. 제2장에서는 증권시계열의 그래프를 통하여 이 시계열의 여러 가지 특성을 밝히고자 한다. 제3장에서는 극단값들을 검토하고 대규모의 시장교정을 분석한다. 이 극단값의 발생시기와 발생량을 인지하고 예측할 수 있으면 위험관리를 보다 용이하게 수행할 수 있다. 제4장에서는 정상성 및 변동성과 주가와와의 관계를 천착한다. 제5장에서는 주가가 장기기억과정에 의하여 생성되는지, 단기기억과정에 의하여 생성되는지를 고찰한다. 제6장에서는 주가가 선형과정을 따르고 있는지, 아니면 비선형 과정을 따르고 있는지를 인식하고자 한다. 제7장에서는 결론은 제시한다.

II. 주가시계열의 행동

1. 데이터

주가시계열의 성질과 특성을 파악하기 위하여 사용한 데이터는 한국종합주가지수, 미국의 Dow Jones 산업평균지수, NASDAQ지수와 S&P 500지수이다. 표본기간은 1980-1998년이며 일별자료를 사용한다. 한국종합주가지수의 표본수는 5564개이고 미국지수들의 표본수는 4958개이다. 각 주가지수의 수익률은 다음과 같이 계산한다.

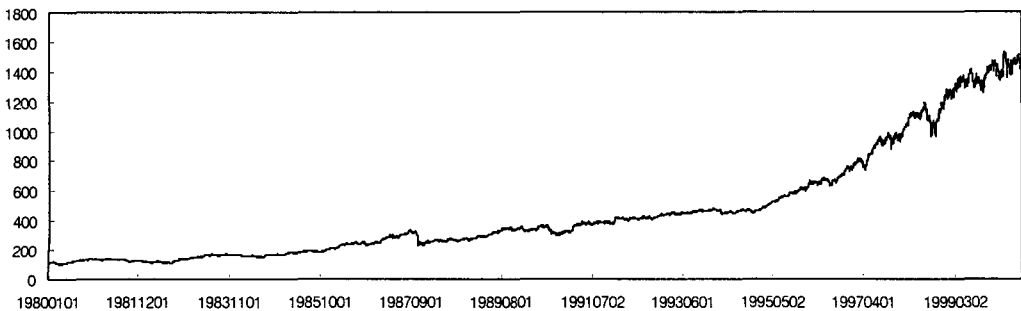
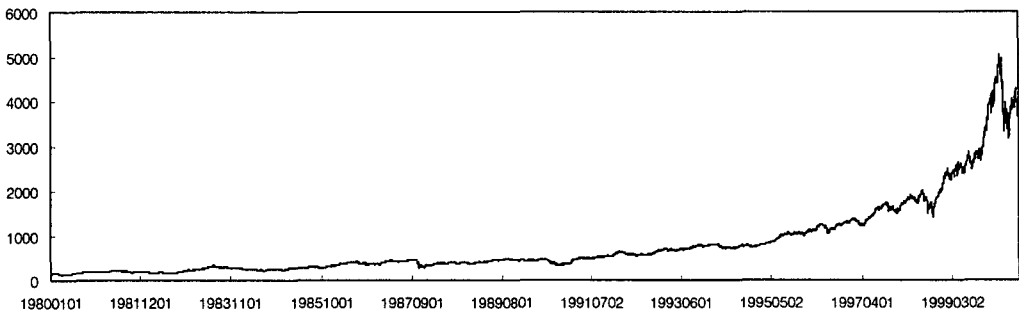
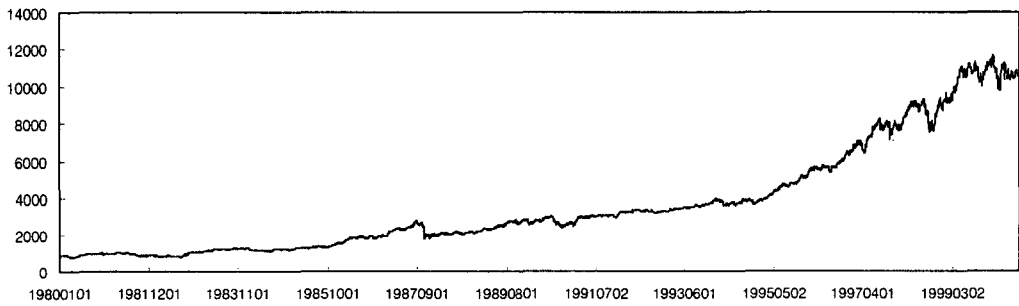
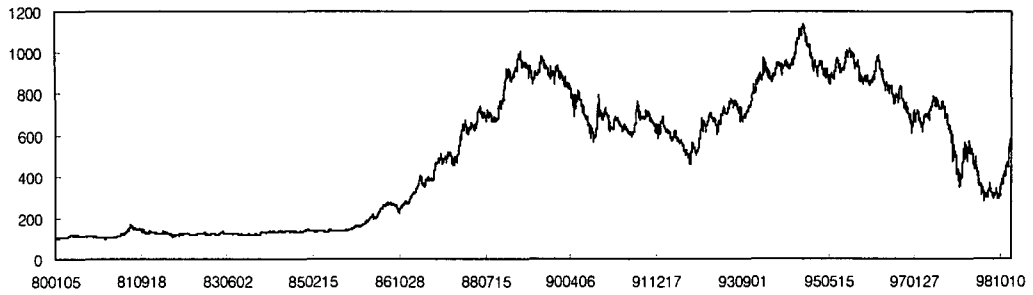
$$y_t = 100 \cdot (p_t - p_{t-1})$$

위에서 P_t 를 시간 t 의 주가지수라 할 때 $p_t = \log P_t$ 이다. 따라서 각 지수의 수익률은 퍼센트로 표시된 것이다. 독해의 편의를 위하여 퍼센트로 표시한 것이며 계산단위를 율로 사용하거나 퍼센트로 사용하거나 주가 시계열의 성질과 특성을 파악하는데에는 내용의 차이점이 발생되지 않는다. 주식의 가격을 대수화하여 수익률을 구하면 연속복리의 수익률을 얻는 것은 부인할 수 없다. 따라서 연속성에서 발생하는 특성도 파악될 수 있다.

각 지수의 시계열을 시간의 흐름에 대비하여 그래프화하면 [그림 1]과 같다. [그림 1]의 상단은 한국종합주가지수의 시계열그래프이다. 1985년말 이전의 지수는 거의 수평선을 유지하고 있다. 그 이후부터 IMF사태 이전까지는 두 개의 유사한 양태를 보여주고 있다. 92년말경의 저점을 중심으로 두 기간의 주가의 행동이 유사하다고 할 수 있다. 그러나 92년말 이후의 한국종합주가지수의 평균이 그 이전의 평균보다 높다. 따라서 표본기간에 구조변화가 두 번 또는 세 번 발생했을 가능성도 배제하기가 어렵다. 구조 변화가 발생하였다면 평균회귀는 발생하지 않는다. 그리고 이 시계열은 비선형과정에 의하여 생성된다. 여기에서 구조변화에 대한 연구가 요청되고 있다.

미국의 경우 Dow Jones 산업평균지수와 S&P 500지수는 유사한 행동을 하고 있다. NASDAQ지수는 추세에 있어서는 이 두 지수와 유사점을 가지고 있다. 그러나 진폭성(volatility)이나 변동성(variability)은 NASDAQ지수가 오히려

[그림 1] 주가지수의 시계열(KOSPI, Dow Jones, NASDAQ, S&P 500)



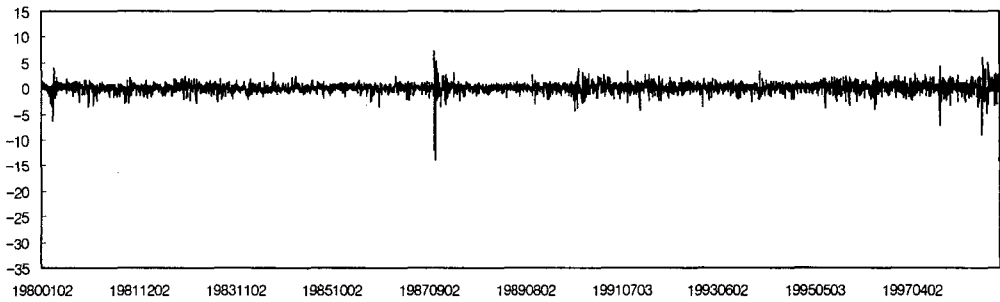
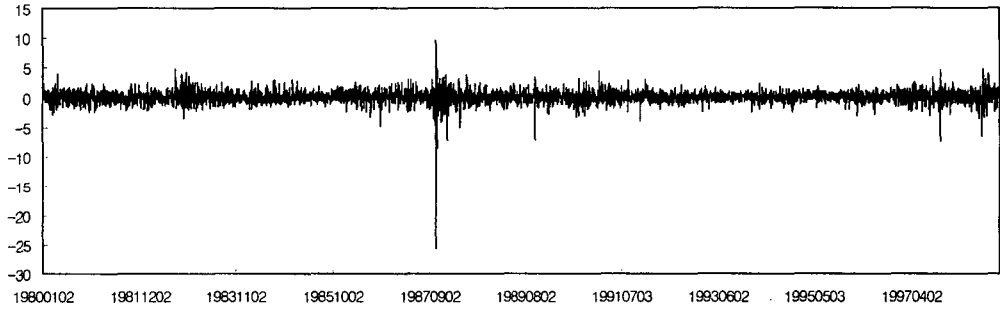
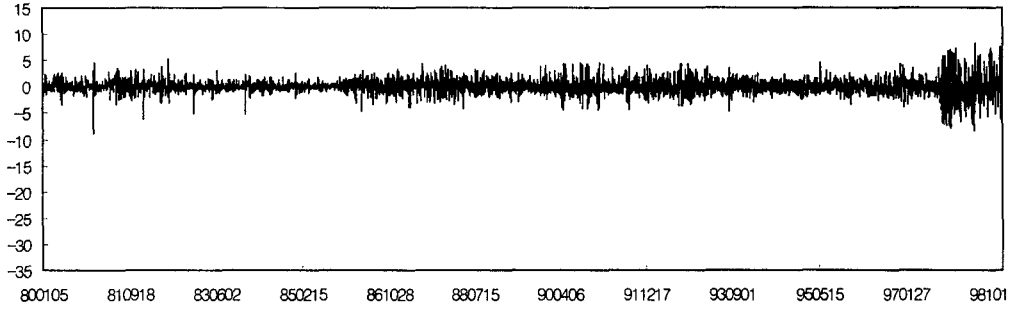
려 약하게 보인다. 1999년말경에는 열외점들(outliers)의 현상이 보이고 있음이 특징이라 할 수 있다. 이 점들을 열외점으로 인정하지 않는다면 급격한 진폭성과 변동성이 지배하고 있는 시기라고도 할 수 있다. 이것은 이 기간에 NASDAQ지수가 급속한 상승을 이룩하고 있다는 해석도 가능하다. Dow Jones와 S&P 500이 NASDAQ에 비하여 가격의 상승폭이 높은 것이 특징이라 할 수 있다. NASDAQ시장의 주식이 거래소 시장의 주식보다 높은 수익률을 낼 수 있을 것이라고 일반적으로 추측되고 있다. 그런데 이 추측을 배반하고 있다. 이것은 NASDAQ시장이 다른 두 시장에 비하여 거래의 비동시성(nonsynchronicity)이 강하기 때문에 야기된 현상으로 추측된다.

각 지수의 수익률 시계열을 시간의 흐름과 대비한 그래프가 [그림 2]이다. KOSPI의 수익률이 미국지수의 수익률보다 변동성이 심하다. 특히 KOSPI는 1998년에는 변동성이 다른 기간에 비하여 크다. IMF시대인 이 기간은 [그림 1]에 의하면 가격이 대폭 하락한 기간이다. 그러나 양의 일별 수익률의 폭도 크고 음의 일별 수익률도 크다. 연속적으로 매일 매일 가격이 하락하는 것이 아니라 등락을 연속적으로 수행하면서 가격이 하락하는 과정을 거치고 있음이 특징이라 할 수 있다. 좋은 소식보다는 나쁜 소식(bad news)이 정보의 주된 내용이 되는 시기에는 진폭성과 변동성이 둘 다 크다는 것을 인식할 수 있다.

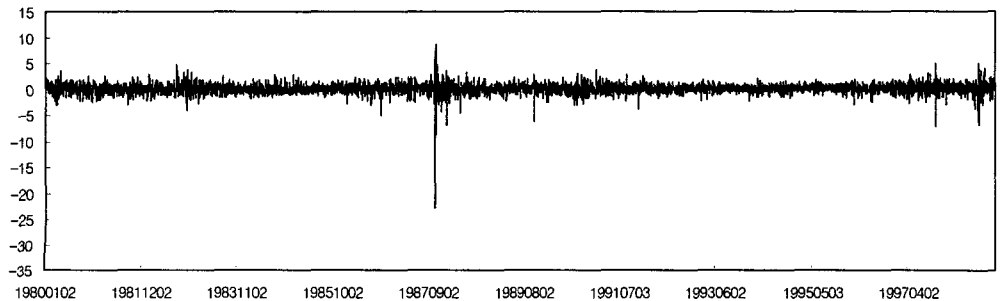
미국의 경우 암흑의 월요일이 대수수익률에 뚜렷하게 나타나있다. 그런데 그 충격의 효과가 NASDAQ이 다른 두 지수에 비하여 오히려 적다. Dow Jones 산업 평균지수가 우량 대형기업의 주식들로 구성되어 있어 충격의 크기가 적을 수도 있으리라고 생각할 수도 있는데, 그렇지않고 S&P 500지수와 유사한 운동 양태를 보이고 있다. Dow Jones가 S&P 500보다 하락폭이 약간 크다. 충격이 Dow Jones에 가장 강하게 미쳤다.

이것은 흥미있는 일이다. Dow Jones 시장과 S&P 500시장은 연속적 거래가 강한 시장이다. 반면 NASDAQ시장은 이 두 시장에 비하여 거래의 시간연속성이 약한 편이다. 뿐만아니라 NASDAQ시장은 비동시성(nonsynchronicity)이 Dow Jones시장과 S&P 500 시장에 비하여 강하다. 거래의 시간연속성의 약화와 비동시성의 강화에 의하여 암흑의 월요일 효과가 다른 두 시장에 비하여 약화된 것 이라고도 생각된다. 시장의 거래양태와 충격의 효과에 대한 연구가 필요하다고 하겠다.

[그림 2] 주가지수 대수수익률의 시계열(KOSPI, Dow Jones, NASDAQ, S&P 500)



<그림 2-C> 지수수익률의 시계열(NASDAQ)



대수수익률의 시계열적 운동에 대한 그래프를 통하여 인식될 수 있는 것은 시간이 연속적 축을 형성하고 있으므로 이 연속축이 측면에서 파악할 때 시간 축의 한 부분수익률에서 진폭성과 변동성이 강하게 나타나고 있다는 것이다. 값이 큰 양의 수익률이 발생하면 그 다음에도 값이 큰 양의 수익률이 뒤따라오고 값이 큰 음의 수익률이 일단 발생하면 그 다음에도 값이 큰 음의 수익률이 발생하는 성향이 존재하고 있다. 말하자면 절대값이 큰 수익률이 군집을 형성하여 발생하는 경향이 지배하고 있다. 이같은 현상이 (조건부) 이분산, 비정상성(nonstationarity), 비선형성과 같은 성질을 주가시계열에 발생시킬 가능성이 현상자체내에 내포하고 있다. 이 성질들은 값이 유사한 수익률들이 형성시키는 군집성의 강도의 정도에 따라 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다. 이 점은 뒤에 보다 자세히 살펴보겠다.

표본으로 사용한 4개 지수의 대수수익률의 기술통계량을 <표 1>로 제시한다. 이 표에의하면 NASDAQ지수의 수익률이 가장 크다. 동시에 표준편차가 가장 작다. 이 점은 거의하면 NASDAQ지수의 수익률이 가장 크다. 동시에 표준편차가 가장 작다. 이 점은 거래의 비동시성에서 기인한 것 같다. Dow Jones 산업평균지수와 S&P 500지수의 수익률은 거의 비슷하다. 그러나 표준편차는 S&P 500이 작다. KOSPI의 수익률이 가장 적지만 표준편차는 가장 크다. KOSPI 시장이 다른 두 시장에 비하여 위험성이 강하다. 李逸均(Rhee, 1994)은 한국과 미국의 주식시장을 분석하는 과정에서 KOSPI시장에 참여하는 투자자들의 위험기피(risk aversion)의 성향이 미국시장의 참여자보다 약하는 점을 발견한 바 있는데, 이 표에 의하여 이일군의 발견이 확인되고 있다.

<표 1> 기술통계량

지 수	평 균	표준편차	왜 도	첨 도	최 소	최 대	정규성*
KOSPI	0.03102	1.35419	0.07902	8.05504	-8.76666	8.16129	5935.65210
DOW	0.04828	1.01720	-3.39436	90.31876	-25.63196	9.66618	1585630.08270
NASDAQ	0.05373	0.93447	-1.81408	26.85403	-14.00219	7.08327	120328.27308
S&P 500	0.04930	0.97753	-2.85088	69.13514	-22.83303	8.70888	910497.69860

* 정규성은 Bera-Jarque 통계량임.

왜도와 첨도는 KOSPI가 미국지수보다 이론적 값으로부터 가장 적게 이탈되어 있다. 왜도는 0.079로 이론적 값인 0에 접근해 있다. 첨도는 8.055로 이론적 값보다 5.055 초과되어 있다. 따라서 정규성이라는 귀무가설에 대한 검정통계량인 Bera-Jarque통계량의 값이 미국의 지수에 비하여 상당히 작다. 최대값은 4개 지수가 상당한 유사점을 갖고 있는 반면 최소값은 Dow Jones와 S&P 500은 상당히 적다. NASDAQ의 최소값이 Dow Jones와 S&P 500에 비하여 상당히 크다. Bera-jarque의 통계량에 의하면 4개지수 모두 정규분포를 따르고 있지 않다. 이 점은 뒤에 보다 자세히 살펴보겠다.

2. 값이 큰 양의 수익률과 음의 수익률

첨도는 표준 정규분포의 경우 평균이 0이고 이 평균 0에 데이터가 집중될 확률을 의미한다. 첨도가 높으면 높을수록 데이터가 평균에 집중된다. 극단적인 경우 첨도만 존재하면 모든 데이터가 첨도에만 집중된다. 이 경우 시계열은 각 시기에 평균값만 존재하게 된다. 평균에서 이탈된 값은 존재하지 않는다. 실증 분포에서 이같은 분포를 보게되는 경우가 있다.

평균에서 떨어진 값들이 왜도를 구성한다. 첨도가 분포의 평균이 발생하는 확률을 표상하는 모수인 반면 왜도는 분포의 형태를 규정하는 모수이다. 왜도가 분포가 허용되는 범위에 있으면 이론적 분포의 형태와 실증적 분포의 형태가 일치한다. 그러나 실증적 왜도의 값이 이론적 왜도의 값에서 이탈하면 실증 분포의 형태는 이론분포의 형태에서 떨어진 변형의 형태가 된다. 실증적 왜도의 값이 이론적 왜도의 값에서 멀리 이탈해가면 갈수록 극단값들(extreme values)이 많아진다. 극단값들은 시계열의 변동성과 진폭성을 야기시킨다. 절대값이 무척 큰 극단값이 발생하면 주가의 경우 폭락이나 폭등이 발생한다. 따라서 왜도가 중요시되며 왜도를 통하여 극단값들의 발생확률과 극단값들의 군집성을 파악할 수 있다. 특히 음의 극단값은 주가분석에 무척 중요시 되어 한다. 잘 알려진 바와같이 시계열 y_t ($t = 1, \dots, n$)의 왜도는 다음과 같다.

$$SK_y = E \left[\frac{(y_t - \mu)^3}{\sigma^3} \right]$$

위에서 μ 는 기대값이고 σ 는 표준편차이다. 분포의 왜도는 y_t 의 분포의 대칭성의 측도이다. 시계열관찰치의 왜도는 다음의 식에 의하여 추정된다.

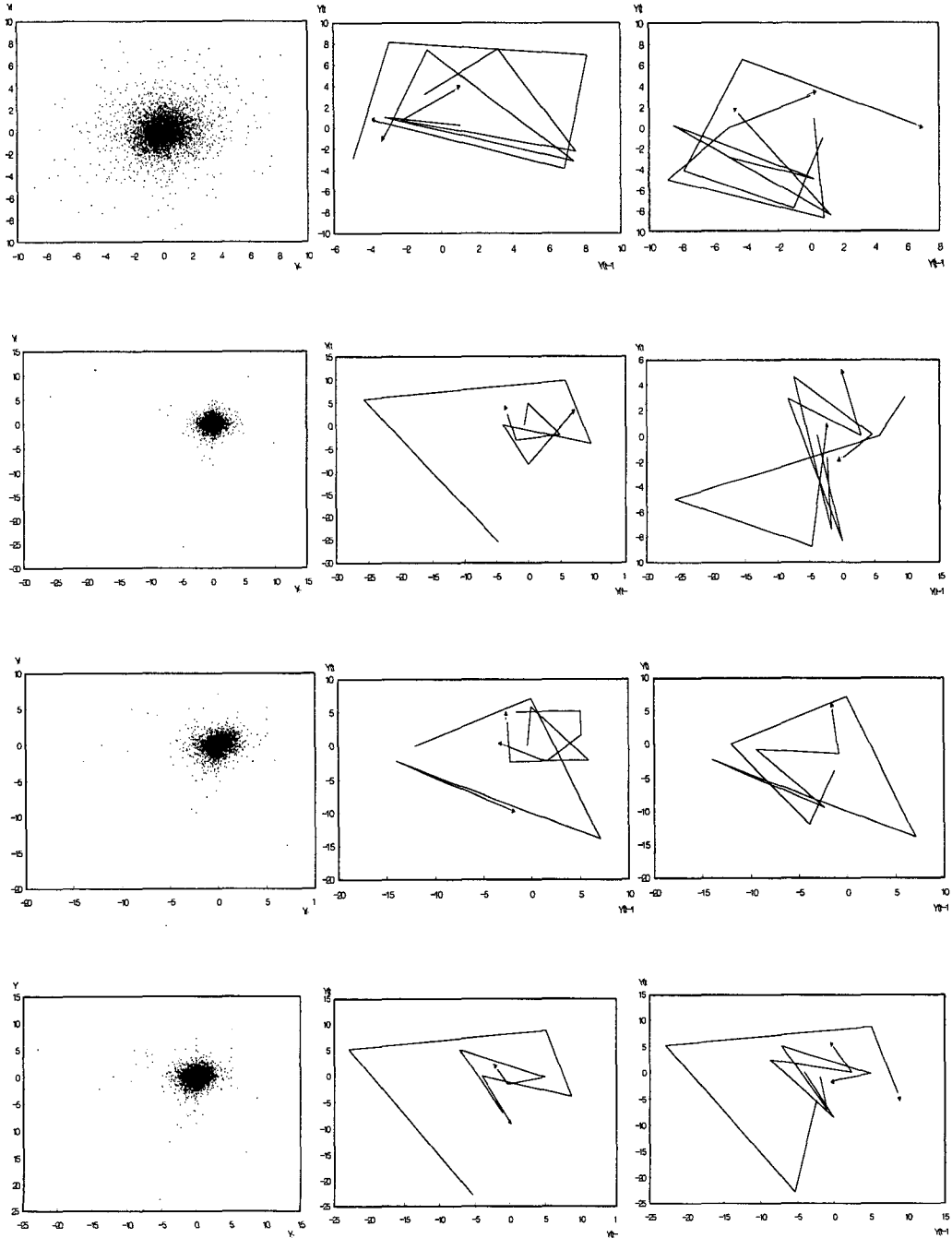
$$S\widehat{K}_y = n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \widehat{\mu})^3}{\widehat{\sigma}^3}$$

정규분포를 포함한 모든 대칭분포는 왜도가 0이다. <표 1>에 의하면 KOSPI를 제외하면 모든 미국지수들은 왜도가 음수이다. 이것은 분포의 왼쪽꼬리가 바른쪽꼬리보다 두껍다는 것을 의미한다. 분포의 꼬리부분에는 앞절에서 설명한 바와같이 절대값이 큰 수익률들이 놓인다. 양수의 값이 큰 수익률은 바른쪽꼬리에 위치하고 음수이지만 절대값이 큰 수익률은 왼쪽꼬리에 자리를 잡는다. 따라서 왜도가 음수라는 것은 값이 큰 음의 수익률들(large negative returns)이 값이 큰 양의 수익률들(large positive returns)보다 자주 발생하고 있다는 것을 의미한다. 이 점은 [그림 3]의 좌측 그래프에서도 확인이 가능하다. 이 그림에 의하면 Dow Jones, NASDAQ과 S&P 500시장에서는 음의 극단적 대수수익률들이 각각 -30, -20과 -25%에 접근해있는 반면 양의 극단적 대수수익률들은 각각 5% 이내이다. 그런데 KOSPI는 양수이다. 그러나 0에 접근하고 있다. KOSPI의 왜도를 의미있는 양수로 인정하면 값이 큰 양의 수익률들이 값이 큰 음의 수익률들보다 자주 발생한다고 할 수 있다. 반면 왜도를 0이라고 인정하면 값이 큰 음의 수익률과 값이 큰 양의 수익률이 과도하게 발생하는 것이 아니라 정규분포가 요구하는 만큼 발생하고 있다고 할 수 있다. [그림 3]에 의하여 KOSPI의 이같은 행동을 파악할 수 있다. 이 그림에서 볼 수 있는 바와같이 양의 극단적 값이 7%를 약간 상회하고 음의 극단적 값이 -7%를 약간 상회하고 있다. 음의 극단값과 양의 극단값이 거의 동일하다. 따라서 왜도의 값이 양수이지만 거의 0에 접근하고 있는 만큼 양의 극단값과 음의 극단값이 거의 동등하게 발생하는 경향이 KOSPI 시장에 존재하고 있다고 할 수 있을 것이다.

3. 값이 큰 수익률과 군집성

앞절에서 주가지수의 대수수익률 시계열에 평균적인값을 크게 상회하거나

[그림 3] 시계열 y_t 와 y_{t-1} 의 대비비율, 최대값 및 최소값
 (KOSPI, Dow Jones, NASDAQ, S&P 500)



크게 하회하는 값들이 존재하고 있음을 발견하였다. 그런데 이러한 값들이 산발적으로 존재하고 있는지 아니면 군집성을 이루고 있는지를 파악하는 것은 주요한 과제이다. 군집성이란 값이 큰 양(음)의 수익률이 일단 발생하면 상당기간에 걸쳐 값이 큰 양(음)의 수익률이 이어지면서 발생하며 그러다가 변동성이 적은, 잠잠한 기간이 지속되는 성향을 의미한다. 절대값이 큰 수익률이 산발적으로 발생하면 무시할 수도 있을 것이다. 이 값이 단 한번 발생하고 통상적인 상태로 복귀하므로 투자활동에서 무시하면 된다. 그러나 군집성을 이루면 투자 전략에 중요시되어야 하는 변수인 것이다. 현재의 수익률과 전기의 수익률을 대비시켜보면 군집성을 파악하기가 용이하다. [그림 3]은 수익률 y_{t-1} 와 y_t 를 대비하여 그래프화한 것이다. [그림 3]의 좌측은 시계열표본내에의 추출된 모든 관찰치에 대한 그래프다. 중간에 있는 그림은 최대값 3개씩을 추출하고 뿔힌 최소값의 각각에 대하여 최대값 직전 2개와 직후 2개의 수익률, 합계 총 5개의 수익률을 그래프로 나타낸 것이다. ■표시는 출발점을 표시한 것이고 화살표는 출발점으로부터 이동해나가는 과정과 종착점을 나타내주고 있다.

화살표가 지시하는 방향으로 따라가보면 수익률 시계열은 상당기간동안 관찰치의 집중부분(main cloud)의 주위에서 자주 맴돌고 있음을 알 수 있다. KOSPI의 경우 이 그림에서 볼 수 있는 것은 주가지수의 대수수익률 y_t 에 대하여 y_t/y_{t-1} 의 대비가 구름(cloud)의 형태를 띠고 있다는 것이다. 대비수익률이 구름의 중심으로 향하여 진입해가고 일단 운성구름(main cloud)의 중심점에 도착하면 운성구름의 주위에서 맴돌고 있음을 발견할 수 있다. KOSPI 시장이 미국의 시장보다 산포성이 강하다. KOSPI의 운성구름 주위의 범위가 미국보다 상당히 넓다. Dow Jones는 대형우량기업이라는 현실이 뒷받침하고 있는 바와 같이 산포성이 상당히 약하다. 극단값은 2개에 불과하다. 서북쪽에 위치한 5개 점은 군집성을 형성하면서 운성구름에서 이탈해 있고, 동북에 2개점이 떨어져 있다. 이점은 S&P 500시장에서도 유사하다. 그러나 NASDAQ시장은 KOSPI시장에 비하여 산포성의 범위가 작고 그 강도가 무척 약한 것은 사실이나, Dow Jones시장과 S&P 500시장에 비하여는 산포성의 범위가 넓고 그 강도가 강하다. NASDAQ시장의 이같은 현상은 거래의 비동시성에서 야기될 가능성이 높다.

NASDAQ시장의 거래의 비동시성은 KOSPI시장에 대하여 시사하는 바가 크다. KOSPI시장은 미국의 Dow Jones시장과 S&P 500시장보다 거래의 비동시성이 강한 시장이라는 가설이 성립될 수 있다. 미국의 시장도 비동시성이 존재하고 있다. 그리고 한국의 시장도 비동시성이 존재하고 있다 (李逸均(1989)). 그러나 거래의 비동시성의 정도와 강도에 대한 연구는 거의 없다. 거래가 활발히 전개되고 있지 않은 시장(thin market)에서 거래가 형성되는 주식은 거래가 이루어지지 않는 기간이 시간연속적 거래에 비하여 상당히 길다. 예컨대 2일간 거래가 없었다 하자. 그러면 휴일효과가 발생할 가능성이 존재한다. 휴일효과를 해명하려는 시도로 정보가설을 취하고 있는 입장에 의할때, 거래가 발생하면 정보가설에 의하여 휴일효과와 유사한 효과가 발생해야 한다. KOSPI시장에서 발생하는 운성구름 주위의 산포성의 범위와 강도는 거래의 비동시성에 의하여만 발생한다는 가설은 용납될 수가 없을 것이다. 정보로 수용되기 이전의 소문(rumor)이나 유행(fad)같은 현상을 발생하는 즉시 주가에 반영시키고 동시에 소문이나 유행의 빈도가 미국에 비하여 빈번하게 발생할 수도 있을 것이다. 다각도에서의 연구가 요청되다고 할 수 있다.

요컨대, 이 그림에서 보이는 바와같이 각 화살표를 따라가 볼 때 대수수익률 시계열은 운성구름 주위에서 상당기간 운행하고 있음을 알 수 있다. 따라서 값이 큰 수익률들이 군집을 형성하고 있음을 알 수 있다.

4. 규모가 큰 진폭성과 규모가 큰 음의 수익률

앞장의 산포도를 통하여 추출할 수 있는 것은 대규모의 진폭성(volatility)은 대규모의 음수수익률이 발생한 후에 종종 이루어지는 성향이 있다는 것이다. 한국종합주가지수의 대수수익률을 제외한 미국의 지수들은 대수수익률 시계열이 중심운성구름을 떠나 남쪽으로 향하고 있음을 알 수 있다. 이것은 오늘의 수익률이 크고 음수라는 것을 의미한다. 시계열이 진폭적 시기를 벗어나 평온한 시기로 접어들고 그 후 이 관찰치들이 다시 중심운성으로 진입해 들어가는 데는 시간이 상당히 소요되고 있다. 따라서 진폭적 시기는 대규모의 음수수익률의 발생과 더불어 종종 시작하고 있다고 할 수 있다. 그러나 한국종합주가

지수의 움직임은 미국의 지수들과는 다르다. 미국의 특성과 같은 뚜렷한 성향을 갖고 있지 않다. KOSPI는 대수수익률 시계열이 중심운성구름을 떠나 남쪽으로 향하는 구름과 중심운성구름을 떠나 북쪽으로 향하는 두 집단이 있음을 볼 수 있다. 이것은 진폭적 시기가 대규모의 음수수익률이 발생할 때 시작되고, 또 다른 편에서는 진폭적 시기가 대규모의 양수수익률이 발생할 때 시작된다는 점을 보여주고 있다.

이 점을 보다 분명하게 파악하기 위하여 대수수익률 y_t^2 과 y_{t-1} 의 상관관계를 계산하였다. 이것을 <표 2>에 제시한다. 이 표에 의하면 한국종합주가지수는 이 상관계수가 0.00952로 0에 접근해 있다. 따라서 진폭성 시기는 대규모의 양수 수익률과 대규모의 음수 수익률이 발생하면 시작된다는 점을 확인시키고 있다. 반면 미국의 지수들은 이 상관계수가 음수이며 0과는 거리가 멀다. 상관계수가 음수라는 것은 대규모의 진폭성은 흔히 음의 수익률이 발생하면 발생한다는 것을 의미한다.

<표 2> y_t^2 과 y_{t-1} 의 상관계수

KOSPI	DOW	NASDAQ	S&P 500
0.00952	-0.07996	-0.03209	-0.09228

5. 고수익률의 기대빈도와 실제빈도

증권의 가격은 대수정규분포(lognormal distribution)를 따르고 있으며 이에 따라 수익률은 정규분포에 의하여 생성된다는 가정이 일반적으로 용인된 가설인 것 같다. 李逸均(1989)은 1970-1986까지 연속해서 상장된 주식들을 표본으로 하여 주식수익률의 정규성 여부를 분석하였다. 그는 한국의 주식수익률이 완벽하게 정규분포를 따르고 있는 것은 아니지만 정규분포를 상정해도 좋을 만큼 정규분포로부터의 이탈이 크지 않다는 점을 실증분석을 통하여 제시한 바 있다. Fama(1965)는 미국의 Dow Jones 산업지수 산정에 삽입되는 주식들의 정규분포성을 검토하였다. 그는 주식수익률이 정규성에서는 꽤 이탈된 분포형

을 가지고 있으나 뚜렷한 대안이 없는 한 정규성을 가정하여 사용하여도 왜곡 현상이 크지 않을 것이라고 주장하고 있다.

어느 확률변수의 분포 $f(y)$ 의 추정은 핵밀도함수 추정량(kernel density estimator)에 의하여 가능하다. 이 식은 다음과 같다.

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{nh} \sum_{t=1}^n K\left(\frac{y_t - y}{h}\right)$$

위에서 $K(z)$ 는 핵함수로 $\int K(z)dz = 1$ 을 만족하는 함수이다. h 는 폭넓이(bandwidth)이다. $K(z)$ 는 단일변량 확률밀도함수가 많이 사용되고 있다. 정규성을 검정하기 위하여 분포형을 파악하는 것이므로 다음의 Gauss핵을 사용한다.

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$

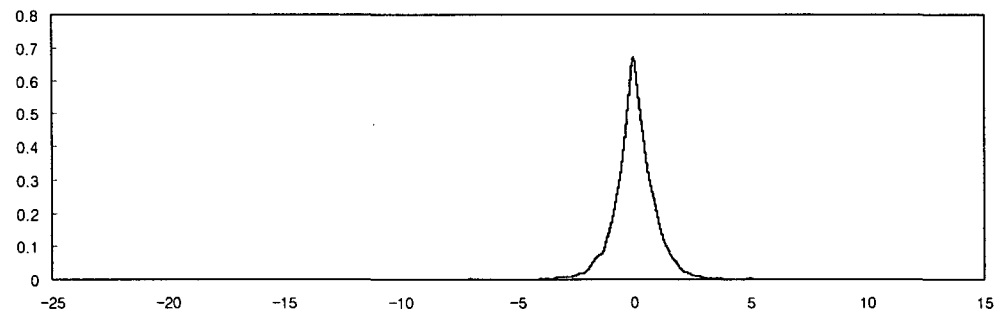
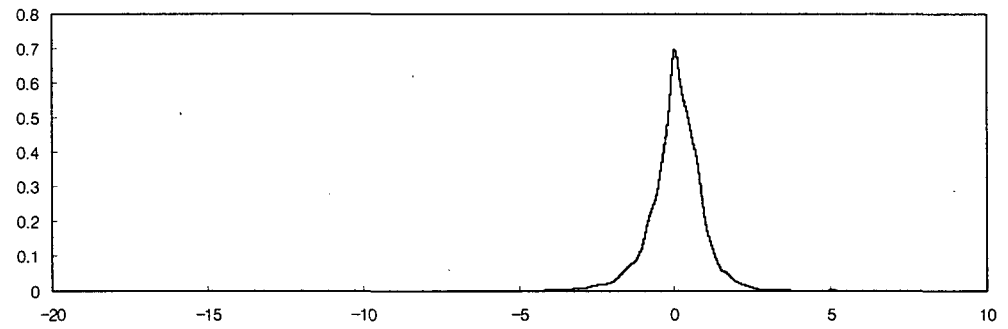
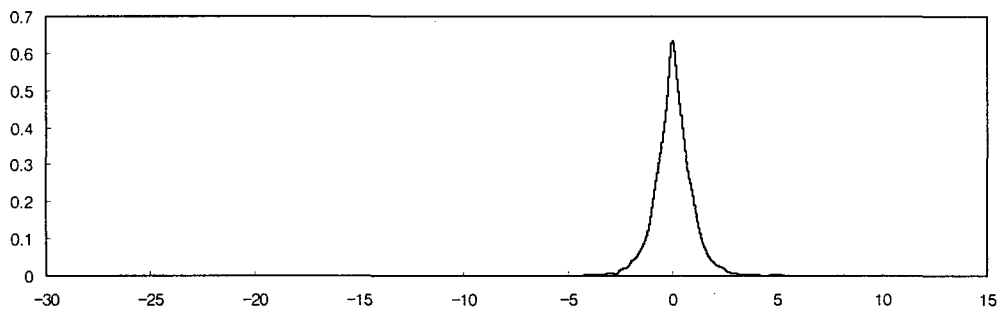
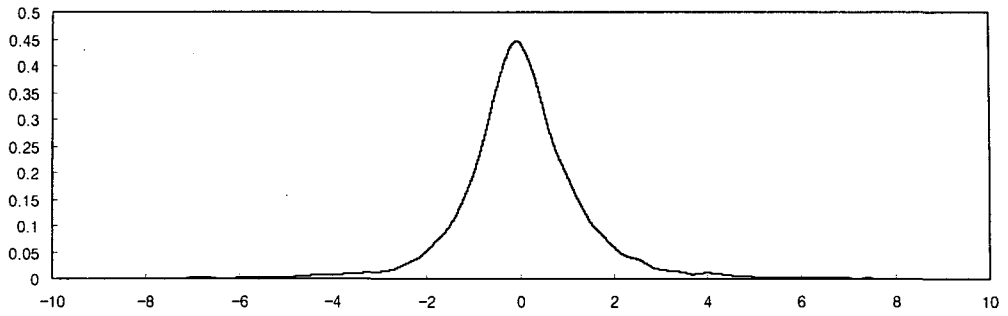
폭넓이 h 는 Silverman(1986)에 의하면 다음과 같이 결정된다.

$$h = 0.9 \cdot \min\{\hat{\sigma}, \text{iqr}/1.349\}n^{-1/5}$$

위에서 $\hat{\sigma}$ 는 추정 표준편차이고, iqr 은 4분위 범위(interquartile range)이다. 즉 $y_{(i)}$ 를 시계열 y_t ($t = 1, 2, \dots, n$)의 i 번째 순서통계량(order statistic)이라 하면 $\text{iqr} = y_{[3n/4]} - y_{[n/4]}$ 이다. 여기에서 y 의 첨자 $[\]$ 은 Euler정수이다.

대수수익률의 분포형태를 핵밀도함수 추정량에 의하여 파악하기 위하여 <표 1>에 제시된 평균과 표준편차를 이용하였다. 추정된 평균과 표준편차를 사용하여 각 지수의 대수수익률의 분포를 그래프화하면 [그림 4]와 같다. 이 그림들에 의하면 KOSPI의 확률분포는 꼬리부분이 정규분포보다 길고 첨도가 정규분포보다 높다. 그러나 정규분포에 매우 근접해 있다. 그러나 미국지수들의 분포는 꼬리부분이 상당히 길고 첨도가 꽤 높다. 따라서 모든 지수들이 정규분포에 비하여 값이 무척 작은 관찰치와 값이 무척 큰 관찰치들이 발생하고 있음을 알 수 있다. 따라서 절대값이 큰 수익률이 기대치보다 자주 발생하고 있음을 알 수 있다.

[그림 4] 확률분포(KOSPI, Dow Jones, NASDAQ, S&P 500)



Ⅲ. 극단값과 대규모 시장교정

1. 극단값과 위험관리

주가시계열의 그래프를 통하여 발견한 것의 하나가 극한값들(extreme values)의 존재이다. 이것들을 열외점들(outliers)이라고 간단히 취급하면 주가 시계열의 분석과 증권시장의 행동을 파악하기는 보다 용이해진다. 그러나 이러한 현상이 일시적이고 일회적이고 예외적인 현상이라면 무시해도 관계가 없을 것이다. 그러나 그래프를 통하여 극단값들이 일회적이고 일시적인 현상이 아니라는 점을 볼 수 있다. 극단값들 중 극단값은 미국의 암흑의 월요일이나 대공황시 발생하는 값들일 것이다. 이 두 현상을 제외하더라도 극단값들은 투자전략이나 포트폴리오 형성에 중요시 된다. 극단값이 예외적 현상이 아니라 주가형성과정에서 당연히 영향을 발휘하는 요소라면 극단값의 발생가능성과 그 시기의 포착은 무척 중요시 되어야 할 것이다. 음의 극단값이 발생하게 된다면 그 증권은 매도해야 할 것이고 반대로 양의 극단값이 발생하게 되리라고 예상되면 당연히 그 증권은 매수하는 전략을 따라야 할 것이다. 반면 극단값의 발생시기와 발생양의 예측이 불가능하다면 위험관리적 측면에서 이 극단값들이 고려되어야 한다. 또는 매수·매도전략과 위험관리가 동시에 이루어져야 한다. 극단값들은 진폭성을 야기시킨다. 그러나 이 극단값들의 진폭성은 시간의 흐름에 걸쳐 변하는 조건부 이분산을 파악하는 ARCH과정 계통의 모형에서도 예외적인 진폭성을 야기시킨다. 따라서 ARCH과정 계통의 모형으로 극단값을 파악하기가 용이하지 않다.

극단값을 접근하는 방법중의 하나가 분포의 꼬리확률들(tail probabilities)이다. Bollerslev(2001)은 대규모의 시장교정(big market correction)의 확률에 대한 연구가 중요하다는 점을 강조하고 있다. 꼬리확률의 군집화현상을 모형하기 위한 연구가 요청되고 있다. 이 현상은 단일 변량적 방법을 통한 접근도 필요하지만 다변량 접근법이 보다 유용할 수 있다. 이 연구는 하루내의 거래(intra-day trading)에서 발생하는 거래빈도가 높은 주식의 가격 운동을 파악하는데 무척 유용한 결과를 제시할 수 있다. 이 분야가 새로이 관심의 초점을 받게 되는 분야라고 할 수 있다.

2. 극단값과 꼬리분포

꼬리확률을 파악하기 위한 방법중의 하나가 분위수회귀(quantile regression)이다. 장기기억 진폭성의 의존성을 파악하기 위하여서는 절대값 수익률의 분포를 다루는 것이 일반적이다. 절대값 수익률의 꼬리분포에 대하여는 앞으로 다룰 장기기억에서 분석하도록 한다. 여기에서는 대수수익률 그 자체의 꼬리확률에 대하여서만 다루기로 한다. 그러나 꼬리확률의 꼬리분포에 대하여 본격적으로 다루지 않고 그대신 꼬리 확률의 존재여부에 대하여서만 분석하도록 한다. 이것은 이 논문의 목적에 의하여 본격적인 분석의 허용되지 않기 때문이다.

위에서 본 것처럼 각 시계열은 정규분포에 비하여 꼬리가 두껍고 첨도가 높은 분포를 형성하고 있다. 안정적 분포족은 형태요소(scale factor)와 특성지수(characteristic exponent)의 두 모수에 의하여 규정된다.

대부분의 안정분포는 폐형 밀도함수가 존재하고 있지 않으므로 특성지수에 관심을 두고 있다. 특성지수가 존재하면 이 지수에 의하여 분포를 규정할 수 있기 때문이다. 특성지수를 α 라 하면 $\alpha < 2$ 일 때 안정과정의 꼬리들은 α 의 함수이다. 이 때 꼬리부분은 점근적 Pareto 분포를 따른다. 따라서 $Y > 0$ 에 대하여 $P_r(Y > y) = P_r(Y < -y) = C^\alpha Y^{-\alpha}$ 이다. 여기에서 C 는 산포를 측정하는 유한의 양수모수이다. 꼬리지수(tail index) ζ 는 모든 $0 \leq k < \zeta$ 에 대하여 $E(|Y|^k) < \infty$ 이다. $\zeta < 2$ 이면 Y 의 분산은 무한하고 Y 는 $\alpha = \zeta$ 에 대하여 안정분포에 의하여 생성되는 것과 동일한 특성을 갖는다. $\zeta \geq 2$ 이면 Y 의 분산은 유한하다. 그러나 이 분포는 반드시 정규분포가 되는 것은 아니다. 따라서 꼬리가 두껍다. Loretan 과 Phillips(1994)는 Y 의 분포의 꼬리부분의 행동을 다음과 같이 정의한 바 있다.

$$P_r(Y > y) = C^\zeta y^{-\zeta}(1 + \zeta_R(y)), y > 0$$

$$P_r(Y < -y) = C^\zeta y^{-\zeta}(1 + \zeta_L(y)), y > 0$$

위에서 $y \rightarrow \infty$ 함에 따라 $i = R$ 과 $i = L$ 에 대하여 $\zeta_i \rightarrow 0$ 이다. 모수 C 와 ζ 는 순서통계량(order statistics)에 의하여 추정할 수 있다. $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(T)}$ 가 $(Y_t)_t^T$ 의 순서통계량이라 하면 ζ 는 다음에 의하여 추정된다.

$$\begin{aligned}\hat{\zeta} &= [s^{-1} \sum_{j=1}^s \log Y_{(T-j+1)} - \log Y_{(T-s)}]^{-1} \\ &= [s^{-1} \sum_{j=1}^s (\log Y_{(T-r+1)} - \log Y_{(T-s)})]^{-1}.\end{aligned}$$

극단값은 음수이던 또는 양수이던간에 자주 발생하면 확률분포의 형태를 변형시킨다. 따라서 시장의 형태를 대폭 교정한다. 극단값의 발생시기와 발생량을 예측할 수 있으면 위험관리는 상당량 해소되며 진폭성과 변동성에 대한 관리가 상당량 해결된다고 볼 수 있다. 따라서 극단값에 대한 인식은 무척 중요하다고 할 수 있다.

꼬리지수 ζ 는 de Haan과 Resniek(1980)이 개발하고 Groenendijk등(1995)이 수정한 방법에 의하면 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\left[\frac{\log Y_{(T-r+1)} - \log Y_{(T-s)}}{\log(s/j)} \right]^{-1}$$

그리고 형태의 산포(scale dispersion)는 다음에 의하여 추정할 수 있다.

$$\hat{C} = (s/T) Y_{(T-s)}^{\zeta}$$

위에서 $s=s(T)$ 이며 $T \rightarrow \infty$ 함에 따라 $s(T) \rightarrow \infty$ 이어야 한다. Loretan과 Phillips(1994)는 s 가 $0.1T$ 를 초과하지 않을 것을 권하고 있다. Phillips등(1998)은 $s(T) = [\lambda T^{2/3}]$ 으로 선정할 것을 권하고 있다. 이 때 λ 는 $\hat{\lambda} = |\hat{\zeta}_1 / 2|^{1/2(T/s_2)}$ ($\hat{\zeta}_1 - \hat{\zeta}_2$)^{2/3}이다. $\hat{\zeta}_1$ 와 $\hat{\zeta}_2$ 는 $s_1 = T^\sigma$ 와 $s_2 = T^\tau$ 로 하여 ζ 를 추정한 값이다. Phillips등은 $\sigma = 0.6$ 과 $\tau = 0.9$ 로 할 것을 권장하고 있다. 이 때 $s^{1/2}(\hat{\zeta} - \zeta) \sim N(0, \zeta^2)$ 이고 $s^{1/2}(\log T/s)^{-1}(\hat{C}_s - C) \sim N(0, C^2)$ 이다. 그런데 두 개의 독립된 집단의 꼬리지수를 각각 $\hat{\zeta}^{(1)}$ 과 $\hat{\zeta}^{(2)}$ 라 하면 $H_{0,\alpha}: \zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta$ 를 검정할 수 있다. $\tau_\zeta = \hat{\zeta}^{(1)} - \hat{\zeta}^{(2)}$ 라 할 때 다음 통계량은 $\chi^2(1)$ 이다.

$$V_\zeta = \frac{\hat{\tau}_\zeta^2}{\frac{\hat{\zeta}^{(1)2}}{s_1} + \frac{\hat{\zeta}^{(2)2}}{s_2}}$$

꼬리지수 ζ 가 추정되면 이 지수를 사용하여 아주 드물게 발생하는 극단값 수준을 정립할 수 있다. 이것은 실증적 분포함수를 표본영역 밖으로 외삽(extrapolation)시켜 구할 수 있다. de Haan등(1994)에 의하면 초과수준(excess level) \tilde{y}_p 의 추정은 다음과 같이 이루어진다. 확률 p 가 적고 k 가 주어질 때 $P_r(Y_1 \leq \tilde{y}_p, Y_2 \leq \tilde{y}_p, \dots, Y_k \leq \tilde{y}_p) = 1 - p$ 에 대하여 초과수준 \tilde{y}_p 는 다음에 의하여 구한다.

$$\tilde{y}_p = \frac{(kr/pT)^{\hat{\zeta}}}{1 - 2^{-\hat{\zeta}^{-1}}} (Y_{(T-n)} - Y_{(T-2n)}) + Y_{(t-r)}$$

위에서 $\hat{\zeta} = \zeta^{-1}$ 이고 $r = s/2$ 이며 k 는 고려하고 있는 기간이다. p 는 초과확률(probability excess)이다.

시계열의 극단값들(extreme values)의 존재여부를 결정해주는 분포의 꼬리지수 ζ 의 추정값을 <표 3>으로 제시한다. 이표에 의하면 4개 주가지수 모두 왼쪽 꼬리와 오른쪽 꼬리의 지수가 2보다 작다. 그런데 KOSPI가 미국의 주가지수보다는 2에 근접해 있다. 왼쪽 꼬리와 바른쪽 꼬리의 지수들만 각각 사용하여 판단한다면 4개 주가지수가 모두 정규분포를 따르지 않고 분산이 무한한 안정분포, 특히 안정적 Pareto분포에 의하여 형성되고 있다. 그러나 양쪽 꼬리를 모두 고려하여 전체적으로 파악한 양쪽 꼬리 지수는 미국의 경우 2를 약간 상회하고 있다. 그러나 KOSPI는 약 1.88이다. 그림에 의하면 KOSPI가 미국의 지수보다 정규분포에 근접해있는데 꼬리지수에 대한 검정에서는 오히려 KOSPI가 정규분포에 덜 근접하고 있다. $\zeta < 2$ 이면 분포의 분산이 무한에 접근한다. 따라서 KOSPI는 정규분포보다는 오히려 Pareto분포를 따를 가능성이 높다. 미국의 경우 $\zeta > 2$ 이다. 따라서 분산이 무한한 분포에 의하여 미국의 주가시계열이 생성된다고는 볼 수 없다. KOSPI는 특성지수 $\zeta < 2$ 인 안정적 분포의 끌개영역(domain of attraction)에 들어갈 정도로 꼬리가 두꺼운 반면 미국의 주가시계열은 이 끌개영역에 들어갈 정도로 꼬리가 두껍지 않다. 말하자면 KOSPI는 안정적 분포를 따르고 있으며 미국의 지수는 안정적 분포를 따르고 있지 않다고 할 수 있다. 그러나 전체적 측면에서 파악한 꼬리지수와 개별적으로 주가시계열이 정규분포를 따르고 있는지 또는 안정적 Pareto분포를 따르고 있는지는

보다 다양한 분석을 통하여 결론을 유도해야 할 것이다. 이같은 결론의 유보는 특히 미국의 경우 최근에 발생한 암흑의 월요일에 의하여 뒷받침되고 있다. 안정적 Pareto분포는 주지하다시피 분산이 무한이다. 분산이 무한이라는 것은 정상시에는 평균을 중심으로 분포가 활동을 전개하고 있다는 것을 의미한다. 그러나 정상적 활동을 전개하다 어느 특정 시점에서는 분산이 무한으로 떨어진다 는 것을 의미한다. 이때에는 주가가 암흑의 월요일 같이 폭락한다. 4개주가지수가 모두 왼쪽꼬리와 바른쪽꼬리가 안정적 Pareto분포를 따르고 있다. 그러므로 이같은 폭락의 가능성은 상존하고 있다고 할 수 있다.

〈표 3〉 분포의 꼬리

지 수	왼쪽 꼬리	오른쪽 꼬리	양쪽 꼬리
KOSPI	1.43942 (0.04014) (1286)	1.24605 (0.03252) (1468)	1.87945 (0.04697) (1601)
Dow Jones	1.00963 (0.02566) (1548)	1.15571 (0.02866) (1626)	2.16061 (0.05907) (1338)
NASDAQ	0.98298 (0.02286) (1492)	1.24853 (0.02994) (1739)	2.15064 (0.06581) (1068)
S&P 500	0.96533 (0.2455) (1546)	0.81856 (0.01824) (2015)	2.18897 (0.05719) (1360)

* 윗괄호는 표준오차임.

** 아래괄호는 최적 S(T)임.

IV. 변동성과 정상성

1. 동분산과 이분산

어느 시계열의 분산이 시간의 흐름에 걸쳐 일정하면 동분산과정이고 분산이

변하면 이분산과정이다. 일별종합주가지수의 수익률이 동분산과정에 의하여 생성되는지 아니면 이분산과정에 의하여 생성되는지를 검토하기 위하여 McLeod와 Li(1983)방법을 사용하여 검정값을 계산하였다. 이 식은 다음과 같다.

$$MCL(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} r_k^2(y^2)$$

〈표 4〉 이분산 검정

KOSPI

시 차	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
상 관 계 수	0.279	0.310	0.310	0.289	0.296	0.250	0.246	0.221	0.240	0.221
검 정	431.909	967.724	1504.534	1969.334	2455.757	2804.786	3142.601	3415.251	3737.355	4010.785

DOW

시 차	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
상 관 계 수	0.091	0.145	0.065	0.015	0.105	0.026	0.008	0.039	0.032	0.006
검 정	41.312	145.516	166.662	167.706	222.197	225.484	225.818	233.229	238.299	238.472

NASDAQ

시 차	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
상 관 계 수	0.211	0.318	0.410	0.097	0.225	0.141	0.047	0.093	0.072	0.040
검 정	221.338	723.088	1555.376	1601.986	1853.017	1951.062	1962.178	2005.555	2031.347	2039.160

S&P 500

시 차	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
상 관 계 수	0.112	0.149	0.076	0.020	0.136	0.030	0.011	0.047	0.033	0.011
검 정	61.810	171.891	200.401	202.383	294.587	299.057	299.666	310.797	316.115	316.682

위에서 $r_k^2(y^2)$ 은 시계열 $\{y\}$ 의 제곱의 시계열의 k 차 자기상관계수의 제곱이다. 이 통계량은 $\chi^2(m)$ 확률변수이다.

주가지계열이 동분산과정에 의하여 생성된다는 것이 귀무가설이다. McLeod와 Li 검정통계량을 제시하면 <표 4>과 같다. 이 표에 의하면 모든 주가지수의 대수수익률이 이분산과정을 따르고 있음을 알 수 있다.

2. 정상성

정상성(stationarity)은 시계열과정에서 상당히 중요한 개념이다. 시계열 모형 중 대부분이 시계열의 정상성이 확보되어 있다는 가정에 입각하여 개발되었기 때문이다. 따라서 정상성이 형성되면 각종 시계열 모형을 용이하게 적용할 수 있다. 그러나 시계열이 정상적이지 않으면 이 시계열의 정상성을 확보하기 위한 데이터 수정작업(data mining)을 거쳐야 한다. 예컨대 시계열의 차분을 통하여 정상성을 확보하는 방법이 많이 이용되고 있다.

Corradi등 (2000)은 비선형의 제1계 마코브과정의 정상성을 검토하고 있다. 그들은 $Y_t = Ay_{t-1} + g_0(\theta_0^i Y_{t-1}, \dots, \theta_0^j Y_{t-1}) + \epsilon_t$ 가 비선형 제1계 마코브과정을 인식하고 이 과정이 선형성분과 유계비선형성분의 합으로 구성되고 제1계 마코브(Markov)인 비선형 데이터생성함수에 대하여 기하이고딕과정(geometric ergodic process)을 형성시키는 조건들을 찾을 수 있음을 발견하였다. 즉 $\theta_0^i Y_t$ 가 어고딕 마코브과정이 형성되도록 벡터 θ_0 를 선택할 수 있다. 그러면 이 선형결합은 공적분의 선형결합과 대응된다. 그런데 이 식의 함수 $g_0(\cdot)$ 의 형태로는 비선형함수 중 정상성을 갖는 함수를 찾으면 된다. 예컨대 $g_0(x) = xe^{-x^2}$, $g_0(x) = x/(1 + e^{x^2})$, $g_0(x) = x/(1 + e^{-x})$, $g_0(x) = x(1 - e^x)$ 등이 이에 해당된다. 따라서 공적분의 개념과 일치한다. 공적분은 선형관계에 적용되는 개념이며 이 경우는 비선형이므로 공적분이라는 용어 대신 선형확률 공시운동이라는 용어를 사용한다. 이때 θ_0^i 가 i 번째 공적분이라는 개념과 상응하는 i 번째 공시운동벡터이다.

위에서 제시된, 비선형 마코브과정을 표상하는 식에서 $\theta_0 = 1$ 이라고 하자. 그

러면 이 모형은 $Y_t = \alpha Y_{t-1} + g_0(Y_{t-1}) + \varepsilon_t$ 의 형태를 가지며 Kwiatkowski 등 (1992)이 검토한 모형과 일치한다. 이 식은 분명히 비선형과정이며 강형혼합과정이고 기하 어고딕과정이다. Corradi 등(2000)은 정상성·어고딕성과 선형 확률공시운동이라는 귀무가설 하에 있어서는 다음이 성립함을 증명하였다.

$$S_T = \frac{1}{s_{1r}^2} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^t (Y_j - \bar{Y}) \right)^2 \Rightarrow \int_0^1 V_r^2 dr$$

위에서 $V_r = V(r)$ 은 표준브라운 브리지(Brownian bridge)이며 각 변수의 정의는 다음과 같다. 즉, W 는 표준브라운운동이고 그 이외의 변수는 다음과 같다.

$$V_r = W_r - rW_1, 0 \leq r \leq 1$$

$$W_r = W(r)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t$$

$$s_{1r}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2 + \frac{2}{T} \sum_{t=1}^{l_T} \left(1 - \frac{t}{l_T + 1} \right) \sum_{j=t+1}^{l_T} (Y_j - \bar{Y})(Y_{j-t} - \bar{Y})$$

$$l_T = o(T^{1/2})$$

위 식에서 볼 수 있는 바와 같이 이 귀무가설에 의한 분포는 Kwiatkowski 등(1992)의 검정통계량의 분포와 동일하다. Kwiatkowski등의 검정과 통계량을 <표 5>로 제시한다. 이 통계량은 정상성이라는 귀무가설에 입각하여 도출된 것이다. 이 표에 의하면 모든 시계열이 정상성을 확보하고 있다. 따라서 선형적

<표 5> 정상성 검정

지수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12
KOSPI	0.4036	0.3956	0.3890	0.3856	0.3873	0.3926	0.3977	0.4023	0.4034	0.4030
DOW	0.0686	0.0699	0.0714	0.0732	0.0734	0.0738	0.0745	0.0753	0.0759	0.0762
NASDAQ	0.1610	0.1501	0.1426	0.1371	0.1319	0.1283	0.1263	0.1246	0.1233	0.1220
S&P 500	0.0948	0.0955	0.0971	0.0993	0.0996	0.1001	0.1011	0.1021	0.1029	0.1033

임계값 : 5% : 0.463 ; 2.5% : 0.574 ; 1% : 0.739.

시계열과 비선형적 시계열이 다같이 정상성이 확보되었다는 것을 의미한다.

3. 분산에 있어서의 정상성

정상성(stationarity)은 확률과정이 특정한 통계적 균형상태에 존재하고 있어야 한다는 것을 요청하고 있는 개념이다. 어느 확률과정이 그 과정의 성질들이 시간원점(time origin)을 변화시켜도 변화하지 않을 때 엄격한 정상성을 가진다고 한다. 따라서 확률과정을 y_t 라 할 때 $E|y_t|^2 < \infty$ 이고 모든 시간 t 에 대하여 분산이 동일하다. 그리고 공분산에 있어서도 $Cov(y_1, y_{1+k}) = Cov(y_2, y_{2+k}) = \dots = Cov(y_{t-k}, y_t) = Cov(y_t, y_{t-k})$ 이다. 시계열 공분산과 시계열 상관은 시차 k 에만 의존한다. 그런데 이 조건들이 확률과정의 제1차 적률과 제2차 적률에만 적용되면 이 확률과정은 공분산 정상성을 가진다고 한다. 정상성은 평균과 분산이 시간과는 독립적임으로 일정하고 시계열 공분산은 시차에만 의존하는 확률 과정의 성질이다. 그러나 시계열 과정은 시간의 흐름에 따라 평균이 변하기도 하고 또는 시간의 흐름에 따라 분산이 변하는 경우도 있다. 이와같은 과정은 비정상적 과정이며 전자는 평균에 있어서 비정상을 가지고 있고 후자는 분산에 있어서 비정상성을 가진다. 분산에 있어서의 비정상성을 살펴보자.

어느 한 시계열이 비확률적 평균수준과 확률적 오차항으로 구성된다고 하자. 즉 이 과정은 $y_t = \mu + \varepsilon_t$ 로 표현될 수 있다. 이 때 ε_t 의 분산이 평균수준 μ 와 함수관계를 갖는다고 하자. 즉 $V(\varepsilon_t) = h^2(\mu)\sigma^2$ 이다. 이 때 분산을 안정화시키는 함수 $g(\cdot)$ 가 존재한다고 하자. 이 함수를 Taylor 전개하면 $g(y_t) \approx g(\mu_t) + (y_t - \mu) g'(\mu_t)$ 를 얻을 수 있다. 따라서 $g(y_t)$ 의 분산은 $[g'(\mu_t)]^2 h^2(\mu_t)\sigma^2$ 이 된다. 분산을 안정화 시킬 수 있는 함수는 $g'(\mu_t) = 1/h(\mu_t)$ 이다. y_t 의 표준편차가 표준편차의 수준에 비례하면 $h(\mu_t) = \mu_t$ 이며 분산을 안정화시키는 변환은 $g(\mu_t)$ 가 $g'(\mu_t) = \mu_t^{-1}$ 을 만족시키는 함수이어야 한다. 이것은 $g(\mu_t) = \log \mu_t$ 을 의미한다. 따라서 y_t 의 대수(logarithm)은 분산을 안정화 시키는데 사용할 수 있다. y_t 의 분산이 분산의 수준에 비례하면 $h(\mu_t) = \mu_t^{1/2}$ 이며 $g'(\mu_t) = \mu_t^{-1/2}$ 이다. 따라서 $g(\mu_t) = 2\mu_t^{1/2}$ 이므로 제곱근 변환인 $y_t^{1/2}$ 이 분산을 안정화시킨다.

이 논문에서는 가격을 대수화 시키고 그에따른 수익률을 사용하고 있다. 이 수익률이 정상성을 확보하고 있다. 말하자면 $g(\mu_t) = \log \mu_t$ 로 $\log(y_t)$ 가 분산은 안정화 시키고 있다. 이로 인하여 정상성이 기각되지 않고 있는 것이다. ARCH 계통의 모형들의 검정결과에 의하면 조건부 분산이 시간의 흐름에 따라 변하고 있다는 결과가 도출되고 있다. 李逸均(1999)은 정보의 생성과 생성된 정보의 전파속도에 관한 탐구에서 조건부 분산이 시간의 흐름에 걸쳐 변하고 있음을 발견한 바 있으며 조건부 분산이 시간의 함수로 표현되는 것은 충격의 발생과 그 지속성에서 그 원인을 찾고 있다. 따라서 가격에 대수를 취하면 정상성이 확보된다는 것은 대수를 취하지 않은 가격은 정상성 과정이 아니라는 것을 유추할 수 있다. 이점은 여기에서 도출된 정상성의 확보에 의하여 보장되고 있다고 할 수 있다.

4. 시계열 공분산의 정상성

ARCH계통모형에 의하면 주가시계열에 이분산이 존재하고 있다. 그러나 주가시계열의 그래프에서 보이는 바 같이 주가시계열의 무조건부 시계열 공분산도 일정하지 않은 것 같다. 여기에서 무조건부 분산이 동질적인가 이질적인가를 검정할 필요성이 대두된다. 무조건부 분산의 정상성의 검정은 여러방법이 있으나 표본을 두 기간으로 나누어 두 기간의 모수의 성질의 동치성 여부를 검정하는 방법이 유용하다. 이 방법은 Loretan과 Phillips (1994)가 개발한 바 있다. 그들은 표본을 두 부분으로 나누고 있다. 즉 $n = n_1 + n_2$ 이고 $n = k_n + n_2$ 이다. 귀무가설은 $H_0: E \hat{\mu}_2^{(1)} = E \hat{\mu}_2^{(2)}$ 이다. 여기에서 $\hat{\mu}_2^{(1)} = n_1^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} y_i^2$ 이고 $\hat{\mu}_2^{(2)} = n_2^{-1} \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2$ 이다. $\hat{\tau} = \hat{\mu}_2^{(1)} - \hat{\mu}_2^{(2)}$ 라 하면 귀무가설은 $H_0: E \hat{\tau} = 0$ 이다. y_t 의 제곱이 장기적 분산은 핵(kernel)을 사용하여 추정할 수 있다. 즉

$$\hat{V} = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^l (1 - j/(l+1)) \hat{\gamma}_j$$

위에서 $\hat{\gamma}_j$ 는 y_t^2 의 j 차 시계열 공분산이고 l 은 시차한계 절단값(lag truncation)이다. 이때 표본의 분리에 의한 공분산정상에 대한 검정은 다음에 의한다.

$$V_k(\tau) = ((1+k_n) \hat{V}^2)^{-1/2} n_1^{1/2} \hat{\tau}$$

제공의 누적합에 의하여 공분산 정상성이라는 귀무가설을 검정할 수 있다. $\hat{\mu}_2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i^2$ 이 y_i^2 의 부조건 부평균이라하면 $y_i^2 - \hat{\mu}_2$ 의 누적합에 의하여 검정할 수 있으며 $r = k/(1+k)$ 라고 정의하면 이 통계량은 다음과 같다.

$$\Psi_{n(r)} = (n \hat{v}^2)^{-1/2} \sum_{i=1}^{[nr]} (y_i^2 - \hat{\mu}_2)$$

그런데 $\Psi_{n(r)}$ 는 최대값과 최소값을 구할 수 있다. 즉 $\sup_r(\Psi_{n(r)})$ 과 $\inf_r(\Psi_{n(r)})$ 를 구하고 이 두 통계량의 범위, 즉 $\sup_r(\Psi_{n(r)}) - \inf_r(\Psi_{n(r)})$ 를 얻을 수 있다. 이 범위는 장기기억의 검정통계량이다.

표본분리예측 통계량을 제시하면 <표 6>과 같다. 이 통계량은 $k=1$ 이라는 가정하에 계산된 값이다. 이 표에 의하면 KOSPI는 95%에서 기각되고 미국의 경우에는 기각되지 못하고 있다. 미국의 경우에는 두 기간의 공분산이 동일하며 공분산 정상성이 확보되고 있다. 그러나 KOSPI시장은 $V_1(\tau)$ 가 기각되므로 공분산정상성이 형성되어 있지 않는다. 이 값이 음수이므로 무조건부 분산이 첫째기간 보다 둘째기간이 크다. 따라서 무조건부분산이 증가하고 있다. 미국의 경우 일반적으로 무조건부 분산은 동분산이다. 그러나 조건부 분산이 이분산임을 ARCH계통의 모형을 통하여 확인되고 있다. 한국은 미국과는 다르다. KOSPI시장도 조건부 이분산이 형성되어 있다. 그러나 무조건부 분산에 대하여서도 이분산이 존재하고 있다. 이 점이 미국 시장과는 차이가 있는 점이다. 그러나 이 검정은 꼬리의 특성지수가 $2 < \xi < 4$ 에 대하여 적용하여 검정한 것이다. 미국은 양쪽 꼬리의 경우 특성지수가 2.1이다. 그러나 왼쪽 꼬리와 바른쪽 꼬리, 그리고 양쪽꼬리가 모두 $\xi < 2$ 이다. 따라서 검정의 신뢰도가 약하다고 할 수 있다.

공분산 정상성이 표본의 절단점(break ratio)에 대하여 민감성을 갖는지 또는 갖지 않는지를 보기 위하여 공분산 정상성에 대한 누적검정을 수행하였다. 이 통계량을 <표 7>으로 제시한다. 최소통계량에 의하면 95%에서 KOSPI는 기각

되고 다른 지수는 각각에 실패하고 있다. 범위통계량도 최소 통계량과 결과가 동일하다.

〈표 6〉 표본 분리예측에 의한 공분산 정상성

지 수	통계량 V_{ζ}	$\zeta = 2.1$ 임계값
KOSPI	-3.07405	90% : 1.26
Dow Jones	1.32112	95% : 1.51
NASDAQ	-0.80214	97.5% : 1.73
S&P 500	1.33053	99% : 1.99

〈표 7〉 공분산 정상성 누적검정

지 수	$\inf \Psi(r)$ 의 통계량*	$\Psi(r)$ 의 범위 통계량**
KOSPI	-2.02839	2.03034
Dow Jones	-0.21847	0.89650
NASDAQ	-0.91312	0.91683
S&P 500	-0.30207	0.97729

* 임계값은 $\zeta < 2.1$ 일 때 90% : 0.89 ; 95% : 0.98임.

** 임계값은 $\zeta < 2.1$ 일 때 90% : 1.23 ; 95% : 1.31임.

요컨대 3개 검정방법에 의하면 KOSPI는 분산이 두기간에 걸쳐 동일하지 않고 무조건부 이분산을 정하고 있다. 그러나 미국의 경우에는 무조건부 동분산이 지배하고 있다. 그러나 이 3개 검정방법은 검정력이 약하다. 따라서 이 통계량에 의하여 공분산 정상성에 대한 결론을 도출하기 보다는 앞에서 분석한 방법에 의존하는 것이 좋을 것 같다. 대체적으로 한국시장과 미국시장에서 정상성을 따르는 확률과정에 의하여 주가시계열이 생성된다고 할 수 있을 것이다.

공분산 정상성에 대한 누적 검정 통계량을 <표 6>에 제시되어 있다. 이 표에 의하면 KOSPI와 Dow Jones는 공분산 정상성이 형성되고 있다. 그러나 NASDAQ과 S&P 500 시장에서는 공분산 정상성이 확보되어 있지 않고 있다.

V. 장기기억과정

앞장까지는 주가 시계열이 지니고 있는 특성을 시계열의 운동양태를 통하여 파악하려는 시도를 수행하였다. 그 결과 KOSPI, Dow Jones, NASDAQ과 S&P 500 지수의 대수수익률이 선형성을 구비하고 있는 시계열의 운동양태와는 다르다는 점이 파악되었다. 이 대수수익률들이 정상성을 확보하고 있다. 그러나 높은 양의 수익률들이 군집을 이루고 있다. 낮은 음의 수익률들 역시 군집을 이루고 있다. 뿐만아니라 절대값에 있어 큰 수익이 일단 발생하면 계속하여 양의 큰 수익률이 발생한다. 이 현상이 종료되면 평탄한 시계열이 지속된다. 그러다가 절대값에 있어서 큰 수익이 발생하면 또 계속하여 큰 수익이 발생한다. 이와같은 과정이 계속 반복되어 나간다. 절대값에 있어 큰 수익은 어느 경우에는 양의 수익이 되고 어느 경우에는 음의 수익이 된다. 이상한 관찰치들(aberrant observations)이 발견되고 있다. 이분산이 존재하고 있다. 정규분포를 하고 있지 않다. KOSPI의 경우 양의 왜도를 가지고 있다. 그러나 미국지수는 음의 왜도를 가지고 있다. 따라서 미국의 경우 음의 큰 수익이 양의 큰 수익보다 오히려 많이 발생하고 있다. 그만큼 위험이 크다고 할 수 있다. 이것이 암흑의 월요일(black monday)과 같은 현상이 발생할 가능성이 한국보다 오히려 미국이 많다고 할 수 있을 것이다.

주가지계열들이 이와같은 특성을 보이고 있으므로 이 시계열들이 선형성의 시계열이라기 보다는 비선형성의 시계열일 가능성이 크다. 그리고 선형성보다는 카오스(chaos)성이 존재할 가능성도 배제하기가 어렵다. 주가가 장기기억과정에 의하여 생성되는 요소도 보이고 있다. 여기서는 주가가 장기기억과정의 과정을 따르고 있을 가능성 여부를 탐색해 보고자 한다.

1. 시계열의 절대값과 장기기억

시계열 상관계수의 추정치의 그래프인 상관도(correlogram)는 시계열의 선형성질을 기술하는데 유용한 도구이다. 상관도에서 시계열의 추정된 그래프가 지수적으로 감소하는 경우와 쌍곡선적으로 감소하는 경우가 있다. 지수적으로 감소하면 시계열 상관이 급속히 줄어 단기간에 소멸한다. 그러나 쌍곡선적으로

감소할 때에는 소멸의 속도가 무척 느리다. 따라서 장기간의 완만한 감소과정을 거친 후에 소멸된다. 시계열 상관계수가 지수적으로 소멸하는 시계열은 단기 기억과정에 의하여 생성되고 쌍곡선적으로 감소하는 시계열은 장기 기억과정에 의하여 생성된다.

장기 기억과정의 운동은 시계열에 대하여 분수적분(fractionally integrated)을 수행하는 모형에 의하여 정립되어야 한다. 시계열은 그 자체가 정상성을 유지하고 있는 경우와 차분화를 통하여 정상성이 생성되는 경우가 있다. 차분과정을 거치지 않아도 정상적인 과정은 $I(0)$ 이다. 그러나 $y_t - y_{t-1}$ 라는 차분과정을 거쳐야 비로서 이 시계열이 정상적 과정이면 $I(1)$ 이다. 이와같이 차분을 거치는 시계열을 적분시계열이다. 시차작용소를 L 이라하면 $(1-L)^d y_t$ 로 차분을 표시할 수 있다. $I(0)$ 이면 $d=0$ 이고 $I(1)$ 적분과정은 $d=1$ 이다. 그런데 d 가 반드시 정수일 필요가 없다. d 가 실수이면 분수적분과정이다.

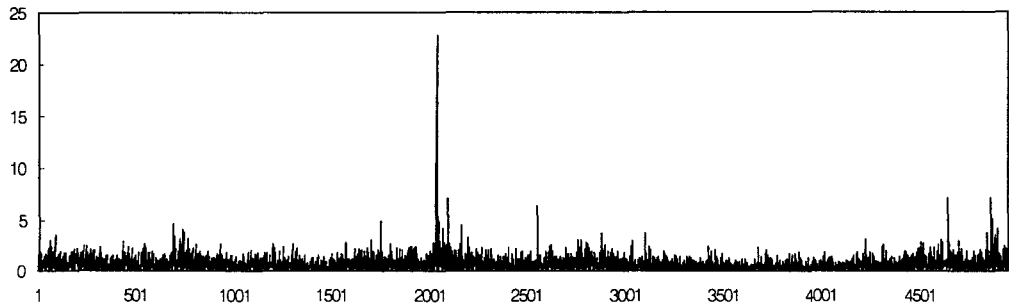
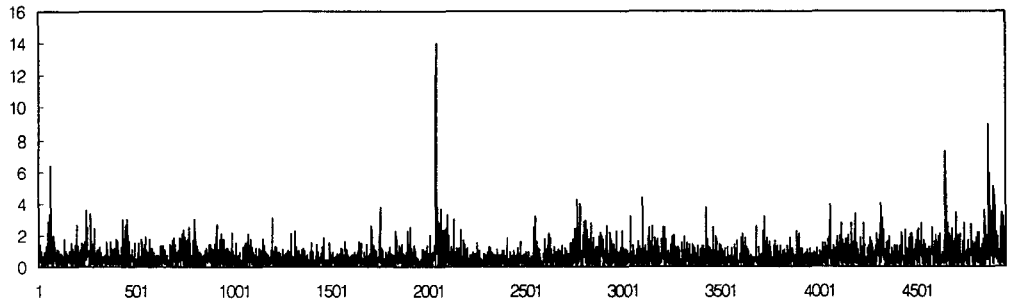
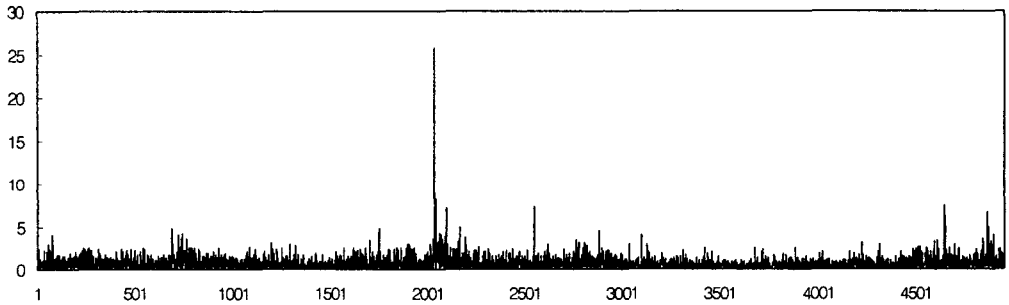
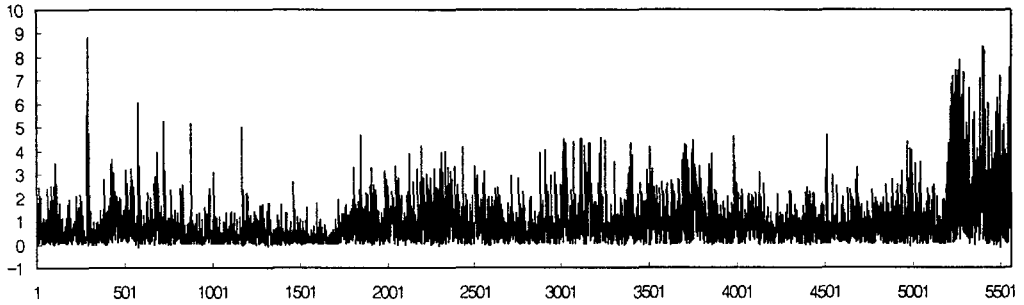
적분시계열에서 $I(0)$ 시계열은 충격이 지수율로 감소한다. $I(1)$ 은 충격이 영속하고 따라서 평균회귀가 이루어지지 않는다. $-1/2 < d < 1/2$ 의 $I(d)$ 시계열은 충격이 완만한 쌍곡선율로 감소한다.

제2장의 [그림 2]에서는 각 시계열의 대수수익률을 그래프화 하였다. [그림 5]에서는 각 시계열의 대수수익률 절대값을 그래프화하여 시계열의 운동을 파악하였다. 이 그래프를 통하여 볼 수 있는 것은 값이 큰 절대값 수익률이 발생하면 그 다음에는 값이 적은 절대값 수익률 보다는 값이 큰 절대값 수익률이 발생하는 성향이 존재하고 있다는 점이다. 이 두 그림을 통하여 주가시계열이 장기 기억에 의하여 생성되고 있을 가능성을 볼 수 있다.

2. 상관도와 장기 기억

제1계 자기회귀모형은 $AR(1)$ 은 ϵ_t 를 평균이 0이고 분산이 σ^2 인 백색잡음과정을 따를 때 $y_t - \phi y_{t-1} = \epsilon_t$ 로 표현된 이 식의 양변에 y_{t-k} ($k > 0$)를 곱하고 기대값을 취하면 $\gamma_k - \phi \gamma_{k-1} = E(\epsilon_t y_{t-k})$ 를 얻는다. 이 때 γ_k 는 시계열 공분산이다. 그런데 ϵ_t 가 백색잡음 과정이므로 이 식은 $\gamma_k = \phi \gamma_{k-1}$ 가 된다. 이 식을 $k-1$ 에 대하여 정립하고 계속하여 대입하면 $\gamma_k = \phi^k \gamma_0$ 를 얻는다. $AR(1)$ 과정

[그림 5] $|r_t|$ 의 시계열(KOSPI, Dow Jones, NASDAQ, S&P 500)



은 시계열 상관 ρ_k 에 대하여 $\rho_k = \phi^k$ 가 구해진다. $\phi > 0$ 이면 자기상관함수는 지수율로 감소하여 궁극적으로 0에 도달함을 알 수 있다.

자기회귀 이동평균과정 ARMA는 $y_t - \phi y_{t-1} = \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}$ 이다. MA(∞)이면 ARMA는 $y_t = \epsilon_t + (\phi - \theta) \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{i-1} \epsilon_{t-i}$ 으로 쓸 수 있다. 이 식의 양변에 y_{t-k} 를 곱하고 기대값을 취하면 $\gamma_k = \phi \gamma_{k-1}$ ($k > 1$)을 얻는다. $k=0$ 과 $k=1$ 에 대해서는 $\gamma_0 = \phi \gamma_1 = \sigma^2 - \theta(\phi - \theta)\sigma^2$ 과 $\gamma_1 - \phi \gamma_0 = -\theta \sigma^2$ 이 구해진다. 이 두식을 풀면 $\rho_1 = [(1 - \phi\theta)(\phi - \theta)]/[1 + \theta^2 - 2\phi\theta]$ 이다. 그리고 $\rho_k = \phi \rho_{k-1}$ ($k > 1$)이므로 ARMA(1, 1)은 시계열 상관인 ϕ 의 지수함수로 감소하여 소멸한다는 의미에서 AR(1)과 유사하다. 따라서 시계열 상관에 의하여 충격이 지수율로 감소하고 있는지를 판단할 수 있다.

시계열 상관계수를 제시하면 <표 8>과 같다. 이 표에 의하면 각 지수의 대

<표 8> 시계열 상관

시차	KOSPI		DOW Jones		NASDAQ		S & P 500	
	계수	BP	계수	PB	계수	PB	계수	PP
1	0.14087	110.39813	0.02043	2.06898	0.16369	132.82162	0.03559	6.27936
2	-0.03596	117.59245	-0.03904	9.62461	0.04586	143.24676	-0.02832	10.25408
3	0.01656	119.11881	-0.02220	12.06852	0.04580	153.64395	-0.02808	14.16331
4	-0.00374	119.19648	-0.02828	16.03167	0.03438	159.50179	-0.02760	17.93836
5	-0.03671	126.69145	0.03679	22.74019	0.05509	174.54580	0.03260	23.20715
6	-0.04187	136.44249	-0.00802	23.05898	0.00336	174.60160	-0.00965	23.66833
7	-0.01316	137.40627	-0.01981	25.00434	-0.02445	177.56501	-0.02235	26.14438
8	-0.00700	137.67914	-0.01587	26.25270	0.01098	178.16295	-0.00904	26.54927
9	0.03716	145.36172	0.00195	26.27160	-0.00435	178.25670	0.00138	26.55875
10	0.02104	147.82531	0.01509	27.39971	0.01790	179.84530	0.01331	27.43709
15	0.03040	162.73574	0.00745	29.90726	0.01446	193.04987	0.00740	30.86055
20	-0.00051	179.46536	0.01195	33.27940	0.03115	200.92083	0.01285	35.64253
30	-0.00592	206.33859	0.02837	56.49615	0.02228	219.53699	0.01877	52.98627
50	0.01449	248.44501	-0.00755	95.88689	0.02256	243.06587	-0.00790	96.80582

수 수익률은 시차가 2 이상의 시계열 상관계수가 0이라는 가설을 기각하고 있다. Box-pierce 통계량은 시차를 자유도로 하는 $\chi^2(k)$ 확률 변수이다. 따라서 이 시계열은 백색잡음과정을 따르고 있지 않다. 말하자면 대수수익률은 공정한 게임(fair game)이 아니며 충격이 지수율로 감소하여 소멸하는 과정을 따르고 있지 않다.

3. 장기기억 검정

장기기억 모수를 추정하는 방법으로서는 Geweke 와 Porter-Hudak(1983)의 반모수추정법(semiparametric estimation method), Sowell(1992)의 최대우도법, Tieslau (1996)의 편시계열 상관이용 방법이 있다. Tieslau등은 시계열을 소그룹(block)으로 나누고 소그룹 간의 관계를 포착하고 시계열 상관계수를 통하여 장기기억모수 또는 차분모수를 추정하는 방법을 개발하였다. 그러나 그들은 차수가 낮은 시계열상관(low-order autocorrelation)을 추정에 고려하지 않고 있어 효율성을 상실하고 있다. Chong(2000)은 효율성의 상실을 방지하는 추정법을 개발하였다. Tieslau등(1996)과 Chong(2000)은 시계열 상관계수를 구하고 이 상관계수를 사용하여 C 행렬을 구하였다. 이 C 행렬의 원소는 다음과 같다.

$$c_{i,j} = \sum_{s=1}^{\infty} (\rho_{s+i} + \rho_{s-i} - 2\rho_s\rho_i)(\rho_{s+j} + \rho_{s-j} - 2\rho_s\rho_j)$$

차분모수 d는 제1계 시계열상관을 $\rho_1(d)$ 라 할 때 $\rho_1(d) = d/(1-d)$ 의 관계를 형성한다. 시계열 $Y = (y_1, \dots, y_T)$ 이고 X_n 을 다음과 같이 정의하자.

$$X_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_1 & 0 & \dots & 0 \\ y_2 & y_1 & \dots & 0 \\ \vdots & y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{T-1} & y_{T-2} & \dots & y_{T-n} \end{pmatrix}$$

Y를 X_n 에 회귀시켜 얻은 회귀계수 중 $\hat{\beta}_{n,n}$ 을 취하자. 그러면 $\hat{\beta}_{n,n}$ 은 $d/(n-d) = \alpha_n(d)$ 로 확률에서 수렴한다. 따라서 목적함수는 다음과 같이 정립할 수 있다

$$\hat{d} = \arg \min_{d \in (-0.5, 0.25)} S(d) = [\hat{\alpha} - \alpha(d)]' W [\hat{\alpha} - \alpha(d)]$$

위에서 $\hat{\alpha}$ 와 $\alpha(d)$ 는 벡터이다. 여기에서 $\hat{\alpha} = (\hat{\beta}_{1,1}, \hat{\beta}_{2,2}, \dots, \hat{\beta}_{n,n})$ 이 $\alpha(d) = d/(n-d)$ 이다. 그러면 $\partial S(d)/\partial d = D = (1/(1-d)^2, 2/(2-d)^2, \dots, n/(n-d)^2)'$ 이다. 그리고 $\hat{\beta}_{i,i}$ 와 $\hat{\beta}_{j,j}$ 의 공분산행렬에 T를 곱한 후 $T \rightarrow \infty$ 할 때 얻는 행렬을 Ω 라 하자. 그러면 $W = \Omega^{-1}$ 이다. 그러면 $\sqrt{T}(\hat{d} - d) \stackrel{d}{\sim} N(0, [D' \Omega^{-1} D]^{-1})$ 이다.

$\phi(n-l)$ 을 시계열상관 ρ 로 이루어지는 $(n \times n)$ 차원 Toeplitz 행렬이라 하자. 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \phi(l, m)_{i,j} = & c_{i,j} - \sum_{h=1, h \neq i}^l \beta_{l,h} c_{|i-j|, j} - \sum_{k=1, k \neq i}^m \beta_{m,k} c_{|j-k|, i} \\ & \sum_{h=1, h \neq i}^l \sum_{k=1, k \neq i}^m c_{|i-h|, |k-j|} \beta_{l,h} \beta_{m,r} \end{aligned}$$

그리고 $L(l)$ 을 l 번째 원소는 1이고 그 이외의 원소는 0인 열벡터라 하자. 그러면 $\hat{\beta}_{l,l}$ 과 $\hat{\beta}_{m,m}$ 의 공분산은 $\text{co}(\hat{\beta}_{l,l}, \hat{\beta}_{m,m}) = L(l)\phi(l-1)^{-1}\phi(l, m)\phi(m-1)^{-1}L(m)'$ 이다.

이 방법에 추정된 차분모수를 제시하면 <표 9>와 같다. 이 표에 의하면 KOSPI와 NASDAQ은 차분모수가 각각 0.09와 0.12이다. 이 수치는 $[-0.5, 0.25]$ 사이에 존재하고 있으므로 KOSPI와 NASDAQ은 장기기억 과정을 따르고 있다. 그러나 Dow Jones와 S&P 500에 있어서는 차분모수가 0이라는 가설을 기각하는데 실패하고 있다. 따라서 이 두 지수는 장기기억과정이나 $I(1)$ 과정을 따르지 않고 있으며 단기기억과정이다. 즉 $I(0)$ 과정인 것이다. 그런데 KOSPI와 NASDAQ이 장기기억과정을 따르고 있다는 결과가 나온 것은 흥미롭다. 이

두시장간에 연결관계가 있는 것인가? 아니면 우연적인 것인가? 심도있는 연구가 요청되고 있다고 할 수 있다.

〈표 9〉 장기기억 모수

지 수	KOSPI	Dow Jones	NASDAQ	S&P 500
모 수	0.9458 (0.01126)	-0.00469 (0.01563)	0.12941 (0.01219)	0.00816 (0.01519)

주) 괄호는 표준오차를 의미함.

[그림 6]으로 각 대수수익률의 시계열 상관도를 제시하였다. 이 시계열 상관도는 첫 몇 개를 제외하면 그 값이 상당히 작다. 그리고 대부분이 95%의 신뢰구간 안에 놓여있다. 그런데 이 시계열상관은 [그림 7]로 제시된 대수수익률의 절대값의 시계열상관과 상당히 다른 양태를 띠고 있다. 절대값의 경우에 KOSPI는 시차가 약 350개, Dow Jones는 시차가 약 160, NASDAQ은 시차가 약 230, 그리고 S&P 500은 시차가 약 230이 양수의 시계열 상관이다. 이 그림에서 굵은 선은 시계열 상관의 추정값을 의미한다. 초기 몇 개 시계열 상관은 급속히 감소하고 있으나 그 이후에는 완만히 감소하고 있음을 알 수 있다. Dow Jones의 경우를 제외하면 양의 시계열 상관이 대략 1년 이상이다. 뿐만아니라 그림을 통하여 진폭성(volatility)이 군집성을 이루고 있는 현상도 볼 수 있다.

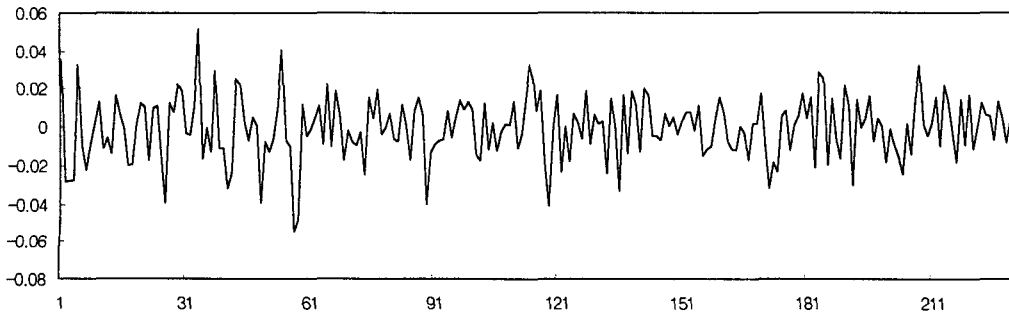
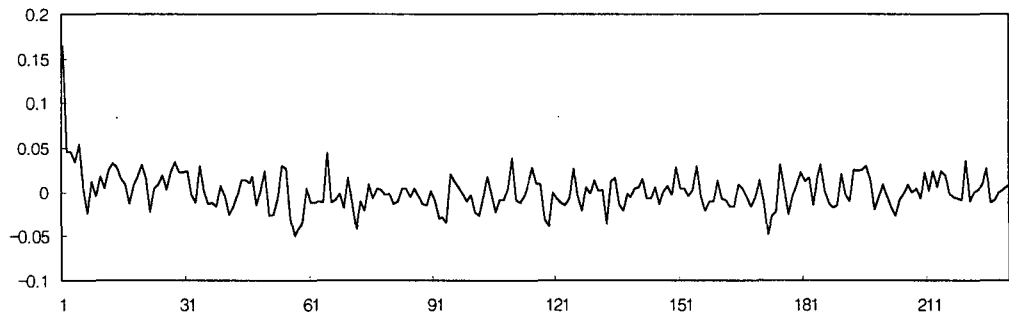
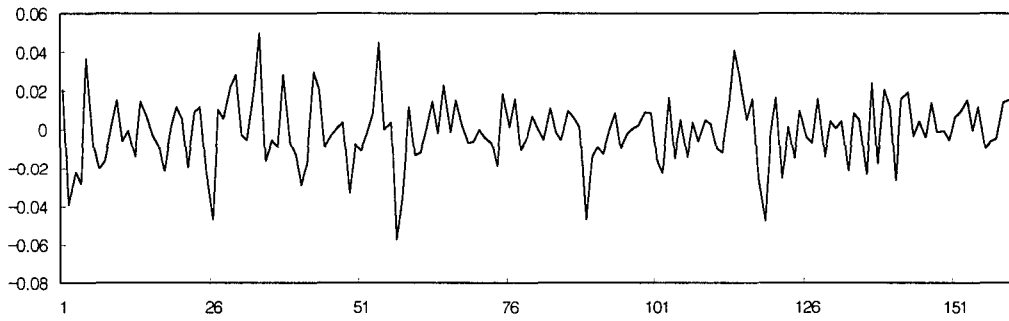
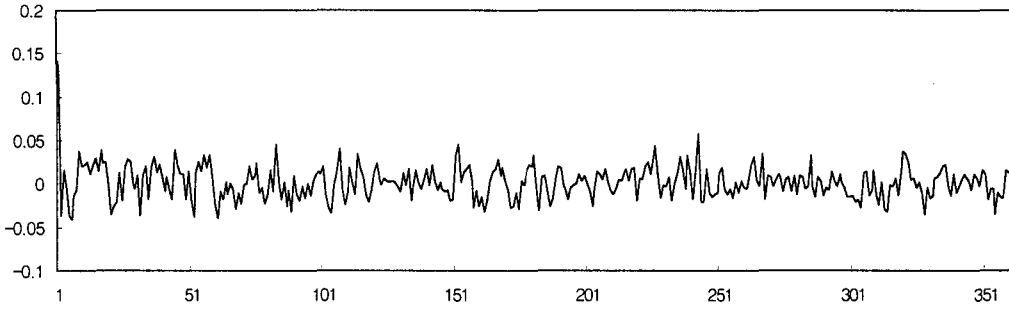
요컨대, $|r_t|$ 의 시계열 상관도가 0이 아니며 약 시차 10의 시계열 상관까지는 급속히 감소하고 있으나 이후 시차에서는 서서히 감소하고 있음을 볼 수 있다.²⁾

2) 장기기억과정은 스펙트럼분석(spectrum analysis)을 사용하며 검정할 수 있다. 李逸均(1999)은 분수적분 일반 자기회귀조건부 이분산 과정을 개발하고 분수적분을 검정하였다. 그는 분수적분이 존재하고 있으며, 따라서 KOSPI가 장기기억과정을 따르고 있음을 밝힌 바 있다. 장기기억과정을 보다 광범위하고 심도있는 연구가 요청되고 있는 분야²⁾ 할 수 있다. 평균에 있어서의 비정상성은 시간에 있어서의 d계 다항식을 사용하며 표현할 수 있다. 비정상적 과정은 Wold 분해방법을 사용하며 언제나 다항식으로 표현하는 것이 가능하다. L을 시차작용소라하고 $\Psi(L) = (1 - \theta L)/(1 - \theta L)$ 라고 정의하자. 그러면 $y_t = \mu_t + \varepsilon_t = \sum_{j=0}^d \beta_j t^j + \Psi(L)\varepsilon_t$ 이다. 기대값을 취하면 $E(y_t) = E(\mu_t) = \sum_{j=0}^d \beta_j t^j$ 이다. β_j 가 시간의 흐름에도 일정하므로 이같은 평균

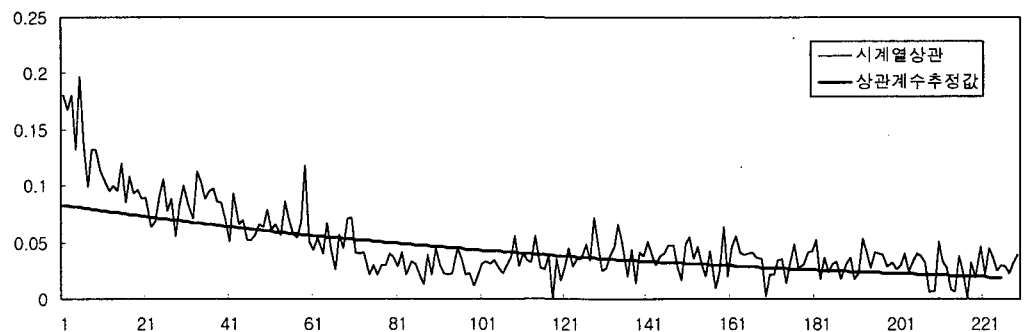
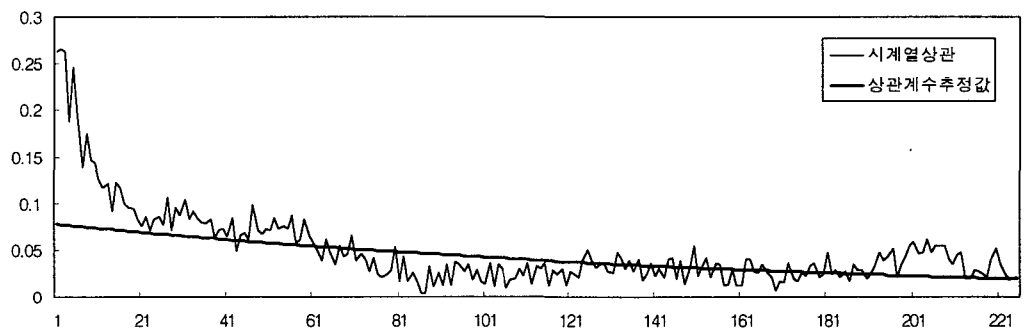
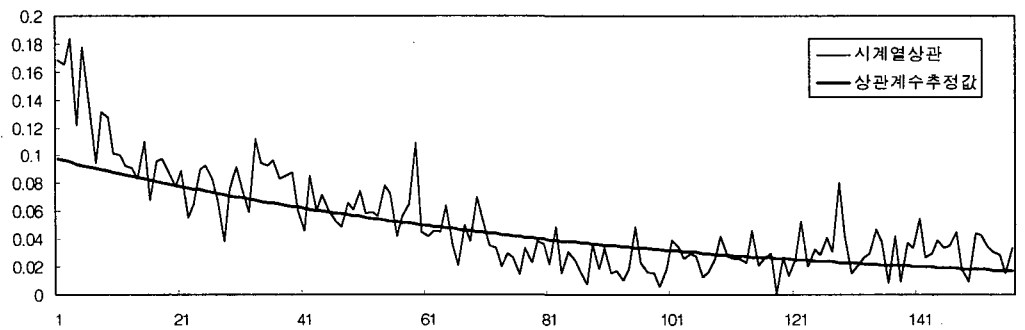
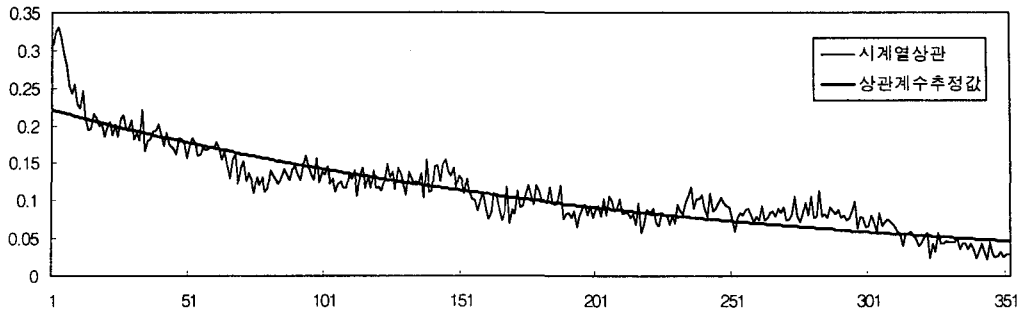
이것은 ARMA 모형과 같은 모형들이 생성시키는 지수적 감소 소멸의 시계열 상관양태와는 다르고 오히려 쌍곡선적 감소를 통하여 소멸하는 시계열 상관의 양태와 유사하다. 짧은 선의 시계열 상관은 $\rho_k = \alpha\beta^k$ 에 의하여 추정된 것이다. 이 추정선에 의하여 볼 수 있는 바와같이 이 추정선의 감소속도가 상당히 느리다. 따라서 분수적분 모형의 시계열 상관구조가 이 그림에서 보여준 표본 시계열 상관구조를 표상하고 있다고 볼 수 있을 것이다. Scholes와 Williams (1977), Lo와 Mackinlay(1990)와 李逸均(1989)에서 보는 바와 같이, 주가지수를 구성하는 주식들이 비연속적 거래를 수행하면 주가지수의 수익률에 의미있는 시계열 의존성이 존재한다. 따라서 시계열상관이 야기된다. 이 시계열 상관의 정확한 구조는 비동시성의 특성에 따라 결정된다. 여기에서 사용된 수익률은

의 추세는 결정론적이다. $d=1$ 이라하면 선형추세를 얻게된다. 즉 $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ 이다. 차분을 구하면 $y_t - y_{t-1} = \beta_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ 을 얻는다. 이 식은 ARMA(1,1) 과정을 따르는 차분방정식이다. $\phi = \theta = 1$ 이므로 자기회귀 이동평균의 근들은 1이고 정상적 과정도 아니고 가역적(invertible)과정도 아니다. 차분 $w_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ 을 고려하면 $w_t = \Delta y_t = \beta_1 + \Delta \varepsilon_t$ 이다. 따라서 제1차 차분 Δy_t 는 안정적 MA(1)과정을 따른다. 이때 MA(1)과정은 가역적 과정은 아니다. 추세가 차수 d 의 다항식이고 ε_t 가 ARMA과정에 의하여 생성되면 $\Delta^d y_T = (1-L)^d y_t$ 는 y_t 를 d 번 차분하여 얻은 시계열이다. 따라서 $\Delta^d y_t = \theta_0 + [\Delta^d \theta(L)/\phi(L)]\varepsilon_t$ 이다. 이 때 $\Delta^d y_t$ 를 생성시키는 MA부분은 Δ^d 를 갖게 되므로 d 개 단위근을 갖는다. 그리고 y_t 의 분산은 ε_t 의 분산과 동일하고 모든 t 에 대하여 동일하다. 따라서 정상적 과정을 얻기 위하여서는 d 차수로 차분을 구해야 한다. 무작위행보는 편류(drift)가 존재할 때 $y_t = y_{t-1} + \theta_0 + \varepsilon_t$ 이다. $t=0$ 에서 이 과정이 출발한다면 $y_t = y_0 + t\theta_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_{t-i}$ 이다. 그러면 시계열상관은 $\rho_{k,t} = \sqrt{(t-k)/t}$ 이다. t 가 k 에 비하여 상당히 크면 시계열상관은 1이다. 무작위 행보는 비정상적 과정이므로 차분하면 $\Delta y_t = \theta_0 + \varepsilon_t$ 이다. 이때 정상성이 확보된다. 그러나 시계열상관이 존재할 수도 있다. 이 시계열상관을 ARMA(p, q) 과정으로 모형화하면 $\phi(L)\Delta^d y_t = \theta_0 + \theta(L)\varepsilon_t$ 이다. 이것이 자기회귀 적분이동평균과정으로 ARMA(p, d, q)이다. 이 때 y_t 는 차수 d 로 적분된다고 하며 $I(d)$ 로 쓴다. ARMA(1,1)과정은 $y_t - \phi y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ 이므로 $\rho_1 = (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)/(1 + \theta^2 - 2\phi\theta)$ 이고 $\rho_k = \phi\rho_{k-1}$ ($k > 1$)이다. $\phi \rightarrow 1$ 하면 ARMA(0,1,1)과정, 즉 $\Delta y_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ 을 얻으며 모든 ρ_k 는 1로 수렴한다.

[그림 6] 대수수익률의 시계열상관의 시계열
 (KOSPI, Dow Jones, NASDAQ, S&P 500)



[그림 7] $|x_t|$ 의 시계열상관과 추정값(KOSPI, DOW Jones, NASDAQ, S&P 500)



$\log(y_t) - (\log y_{t-1})$ 의 값을 기본으로 하고 있으므로 이 수익률은 연속수익률이다. 시계열의 의존성의 일부분은 거래의 비동시성에 의하여 발생하고 있다고 할 수 있다.

VI. 주가의 비선형성

1. 비선형성과 경계선

비선형과정은 여러 가지의 함수형이 존재하고 있는데 그 중 하나가 제도변환 모형(regime-switching model)일 것이다. 이 모형은 확률과정에 의하여 생성되는 서로 다른 제도가 존재한다는 것을 형성화하는 모형이다. 시간 t 에 발생하는 제도(regime)는 관찰가능한 변수 q_t 에 의하여 결정될 수 있다. Tong과 Lim (1980)은 이것을 경계선 자기회귀모형(threshold autoregressive model)이라고 하고 있으며 경계선값(threshold value)인 q_t 의 값에 의하여 제도를 결정할 수 있다는 점을 제시한 바 있다. 두 제도간의 이동이 완만하게 이루어지면 연속함수 $G(y_{t-1}; \gamma, c)$ 를 사용하여 두 제도간의 완만한 변화를 포착할 수 있다. Teräsvirta (1994)는 이 경우 완만한 변환 자기회귀(smooth transition autoregressive ; STAR)모형이라고 부르며 다음과 같이 쓸 수 있다고 한다.

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1} + y_{t-1})(1 - G(y_{t-1}; \gamma, c)) + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2} + y_{t-1})G(y_{t-1}; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

변환함수 $G(y_{t-1}; \gamma, c)$ 는 보통 logistic함수를 사용하고 있으며 이 함수는 다음과 같다.

$$G(y_{t-1}; \gamma, c) = \frac{1}{1 + \exp[-\gamma(y_{t-1} - c)]}$$

위에서 C 는 모든 허용가능 경계선값들의 집합이다. SETAR모형에서 자기회귀 차수(order)는 Akaike 정보기준에 의하여 선택하였다. Akaike 정보기준에 의하면 p 는 KOSPI의 경우 2 또는 3이다. 미국의 경우 $p = 2$ 이다. 편의상 p 를 2

로 통일하여 모수를 추정하였다. KOSPI의 경우 3으로 해도 검정에는 동일한 결과가 도출되고 있음을 첨언한다. 이 모형은 자기회귀의 차수가 1보다 클 때에는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + \dots + \phi_{p_1,1}y_{t-p_1})(1 - G(y_{t-1}; r, c) + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \dots + \phi_{p_2,2}y_{t-p_2})G(y_{t-1}; r, c) + \varepsilon_t$$

이 식에 Taylor 전개를 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$y_t = \beta_{0,0} + \beta_0^1 \tilde{x}_t + \beta_1^1 \tilde{x}_t y_{t-1} + \beta_2^1 y_{t-1}^2 + \beta_3^1 y_{t-1}^3 + \eta_t$$

귀무가설이 $H_0: r = 0$ 이다. 이것은 귀무가설 $H_0': \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ 과 동치이다. 따라서 다음과 같은 방법을 통하여 검정을 수행할 수 있다.

- (i) y_t 를 x_t 에 회귀하고 잔차 $\hat{\varepsilon}_t$ 를 얻는다. 잔차의 제곱합을 다음과 같이 계산한다.

$$SSR_0 = \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$$

- (ii) 보조회귀식으로 $\hat{\varepsilon}_t$ 를 $\tilde{x}_t y_{t-1}^j, j=1, 2, 3$ 에 회귀시키고 잔차의 제곱합 SSR_1 을 계산한다. 이때 \tilde{x}_t 는 $\tilde{x}_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p})$ 이다.

- (iii) Lagrange multiplier 계통의 검정통계량을 다음과 같이 계산한다.

$$LM = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/3p}{SSR_1/(T-4p-1)}$$

이 통계량은 F분포를 따르며 자유도는 $3p$ 와 $T-4p-1$ 이다.

STAR모형의 검정 통계량을 제시하면 <표 10>과 같다. 이 표에 의하면 유의수준 5%와 1%에서 다같이 기각된다. 귀무가설이 선형성이므로 모든 지수가 비선형성에 의하여 생성되고 있음을 알 수 있다. 이것은 앞장에서 테이터 자체를 통하여 얻은 인상과 일치한다. 그리고 제도 변화가 발생하고 있다고 할 수 있다. STAR모형에 의하여 주가가 생성되고 있다. 한국과 미국시장에서 STAR

는 시간의 흐름에 걸쳐 완만하게 제도가 변환되는 모형이다.

〈표 10〉 STAR 검정

지 수	KOSPI	DOW	NASDAQ	S&P500
통계량	11.02178	19.25913	66.62090	17.46487
자유도	(3, 5556)	(3, 4950)	(3, 4950)	(3, 4950)

주) 유의값 : 5% : 2.60 ; 1% : 3.78

VII. 결 론

주가 시계열이 지니고 있는 특성을 시계열의 운동양태를 통하여 파악 하려는 시도를 수행하였다. 그 결과 KOSPI, Dow Jones, NASDAQ과 S&P 500 지수의 대수수익률이 선형성을 구비하고 있는 시계열의 운동양태와는 다르다는 점이 파악되었다. 이 대수수익률들이 정상성을 확보하고 있다. 그러나 높은 양의 수익률들이 군집을 이루고 있다. 낮은 음의 수익률들 역시 군집을 이루고 있다. 뿐만아니라 절대값에 있어 큰 수익이 일단 발생하면 계속하여 절대값이 큰 수익률이 발생한다. 이 현상이 종료되면 평탄한 시계 열이 지속된다. 그러다가 절대값에 있어서 큰 수익이 발생하면 또 계속하여 큰 수익이 발생한다. 이와같은 과정이 계속 반복되어 나간다. 절대값에 있어 큰 수익은 어느 경우에는 양의 수익이 되고 어느 경우에는 음의 수익이 된다. 이상한 관찰치들(aberrant observations)이 발견되고 있다. 이분산이 존재하고 있다. 정규분포를 하고 있지 않다. KOSPI의 경우 양의 왜도를 가지고 있다. 그러나 미국지수는 음의 왜도를 가지고 있다. 따라서 미국의 경우 음의 큰 수익이 양의 큰 수익보다 오히려 많이 발생하고 있다. 그만큼 위험이 크다고 할 수 있다. 이것이 검은 월요일(black monday)과 같은 현상이 발생할 가능성이 한국보다 오히려 미국이 많다고 할 수 있을 것이다.

절대값의 측면에서 고수익률의 실제빈도가 기대빈도보다 높다. 정규분포에

비하여 관찰치의 값이 무척 작거나 무척 큰 수익률이 상당히 많다. 즉 기대치보다 많이 발생하고 있다. 이 경우 한국보다 미국이 심하다. 특히 극히 작은 값이 한국보다 미국에서 많이 발생하고 있다. 절대값이 큰 수익률들이 군집성을 형성하고 있다. 규모가 큰 음의 수익률이 발생하면 진폭성 또는 변동성의 기간이 시작되고 있다.

극단값들이 존재하고 있다. 극단값은 포트폴리오의 위험과 변동성 및 진폭성에 큰 영향을 미치는 값이다. 극단값의 발생시기와 발생량의 예측이 가능하면 포트폴리오의 위험 관리는 상당량이 해결된다고 볼 수 있다. 극단값들은 포트폴리오 형성과 위험관리에 중요시되는 변수이므로 앞으로 활발한 연구가 요청되는 부분이다.

주가지계열은 무조건부 동분산과정이다. 그러나 조건부 이분산 과정에 의하여 주가가 생성되고 있다. 그리고 이 시계열은 정상적 시계열이다.

주가가 비선형과정에 의하여 생성되고 있다. KOSPI와 NASDAQ은 장기기억 과정을 따르고 있다. 그러나 Dow Jones시장과 S&P 500시장에서는 장기기억이 존재하고 있지 않다. 비선형성과 장기기억은 거래의 비동시성에 의하여 발생하고 있다. 시계열의 양태가 거래의 비동시성에 의하여 큰 영향을 받고 있다. 뿐만 아니라 거래의 비동시성이 시계열의 이상현상을 비롯한 여러 현상들을 야기시키는 주요 원인중의 하나이다. 비동시성에 대한 연구가 요청되고 있다.

참 고 문 헌

- 이일균., “證券의 日別收益率과 月別收益率의 特性에 관한 연구”, 증권학회지, 제11집(1989), pp.199-229.
- 이일균., “韓國證券市場의 日別株價收益率의 非同時發生性에 대한 研究”, 순양유용근선생 회갑기념논집(1989), pp.477-490.
- 이일균., “카오스 현상과 자본시장의 가격형성 메카니즘”, 증권학회지, 제23집(1998), pp.1-59.
- 이일균., “주가지계열에 대한 확률미분 방정식의 모수추정과 자본시장의 운동법칙”, 재무관리연구, 제15권 제2호(1998), pp.1-59.
- 이일균., “주가의 장기기억과 분수적분 일반 자기회귀 조건부 이분산 : 주가결정 과정에 대한 한 탐구”, 증권학회지, 제25집(1999), pp.31-70.
- Black, F. and M. Scholos, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81(1973), pp637-654.
- Bollerslev, T. and H.-O. Mikkelsen, “Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73(1996), pp.151-84.
- Chong, T-L., “Estimating the Differencing Parameter via the Partial Autocorrelation Function,” *Journal of Econometrics*, 97(2000), pp.365-381.
- Corradi, V., N. R. Swanson, and H. White, “Testing for Stationarity, Ergodicity and for Comovements between Nonlinear Dicerete Time Markov Processes,” *Journal of Econometrics*, 96(2000), pp.39-73.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross., “An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices,” *Econometrica*, 53(1985), pp.364-384.
- Eitrhem, Ø., and T. Teräsvirta, “Testing the Adequacy of Smooth Transition Autoregressive Models,” *Journal of Econometrics*, 74(1996), pp.59-75.
- Frances, P. and D. van Dijk., *Non-linear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press(2000).
- Geweke, J, and S. Porter-Hudak, “The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models,” *Journal of Time Series Analysis*, 4(1983), pp.221-238.
- Haan, L. de and S. L. Resnick, “A Simple Asymptotic Estimate for the Index

- of a Stable Distribution," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 42(1980), pp.83-87.
- Haan, L. de, D. W. Jansen, K. Koedijk, and C. G. de Vries, "Safety First Portfolio Selection, Extreme Value Theory and Long Run Asset Risks," in J. Galambos et al.(eds.), *Extreme Value Theory and Applications*, Boston, MA : Kluwer Academic (1994), pp.471-487.
- Hosking, J. R. M., "Fractional Differencing," *Biometrika*, 68(1981), pp.165-176.
- Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt, and Y Shin, "Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root," *Journal of Econometrics*, 54(1992), pp.159-178.
- Lo, A. and A. C. Mackinlay, "An Econometric Analysis of Nonsynchronous-Trading," *Journal of Econometrics*, 45(1990), pp.181-212.
- Loretan, M. and P. C. B. Phillips, "Testing the Covariance Stationarity of Heavy-Tailed Time Series, An Overview of the Theory with Applications to Several Financial Datasets," *Journal of Empirical Finance*, 1(1994), pp. 211-248.
- McLeod, A. I. and W. K. Li, "Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-residual Autocorrelations," *Journal of Time Series Analysis*, 4(1993), pp.269-273.
- Merton, R. C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, 41(1973a), pp.867-887.
- Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1973b)", pp.141-183.
- Phillips, P. C. B. and W. Ploberger, "An Asymptotic Theory of Bayesian Inference for Time Series," *Econometrica*, 64(1996), pp.381-412.
- Rhee, Il King, "Empirical Tests of the Consumption-Based Asset Pricing Model by Estimating the Risk Aversion Coefficient in the Korean Economy," *Research in International Business and Finance*, 11(1994). pp.181-215.
- Scholes. M. and J. Williams, "Estimating Betas from Non-Synchronous Data," *Journal of Financial Economics*, 5(1977), pp.309-327.
- Silverman, B. W., "Density Estimation for Statistics and Data Analysis," New York : Chapman & Hall (1986).

- Sowell, F. B., "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models," *Journal of Econometrics*, 53 (1992), pp.165-88.
- Teräsvirta, T., "Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models," *Journal of the American Statistical Association* 89(1994), pp.208-218.
- Tieslau, M. A., P., Schmidt, and R. T., Baillie, "A Minimum Distance Estimator for Long-Memory Processes," *Journal of Econometrics*, 71(1996), pp. 249-264.
- Tong, H. and K. S. Lim., "Threshold Autoregressions, Limit Cycles, and Data," *Journal of the Royal Statistical Society B*, 42(1980), pp.245-292.