물리탐사
Vol. 4, No. 3, 2001, p. 70~79

급수 전개법에 의한 3차원 전자탐사 모델링

조인기[1] · 용환호[1] · 안희윤[1]

Iterative Series Methods in 3-D EM Modeling

In-Ky Cho[1], Hwan-Ho Yong[1] and Hee-Yoon Ahn[1]

요 약 : 적분방정식법은 매우 강력한 3차원 전자탐사 모델링 기법이다. 그러나 이 방법은 이상체내의 전기장 계산시 대형 선형방정식의 해를 구해야 하므로 계산시간이 많이 소요된다는 단점이 있다. 특히 3차원 역산의 경우에는 이러한 적분방정식의 단점은 치명적이 될 수밖에 없다. 이상체내의 전기장을 1차장으로 가정하는 통상적인 Born 근사법은 계산이 용이하고 속도가 빠르다는 장점이 있다. 그러나 이 방법은 이상체와 모암간의 전기전도도비가 너무 클 경우에는 정확성에 문제가 있다. 준선형, 준해석 및 확장된 Born 근사는 이상체내의 전기장 계산을 위한 적분방정식을 선형화한 방법으로 적분방정식법에 비하여 계산시간이 빠르고 통상의 Born 근사에 비해서는 정확성이 높은 매우 훌륭한 3차원 전자탐사 모델링 기법이다. 그러나 이들 또한 근본적으로 근사법에 해당되므로 정확성을 향상시킬 필요가 있다. 근사법의 정확성을 높이기 위한 방법으로 반복적 방법을 사용하는 급수 전개법이 동원되며, 이 방법에는 수정 Born 급수, 준선형 급수 및 준해석 급수 등이 있다. 이들 급수 전개법은 적분방정식법 및 여러 근사법과 비교해 볼 때 매우 정확하고 비교적 빠르며, 항상 수렴하여 그 효율성이 높은 것으로 나타났다. 또한 급수 전개법은 전산프로그램의 작성이 용이하다는 장점도 있다. 본 연구에서는 이를 확장된 Born 급수 전개법으로 확장하여 보다 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 따라서 확장된 Born 급수법을 포함하는 각종 급수 전개법은 향후 3차원 전자탐사 모델링 및 역산에 적용 가능한 빠르고 정확한 모델링 기법으로 기대된다.

주요어 : 3차원 전자탐사 모델링, 수정 Born, 준선형, 준해석, 확장된 Born 근사 및 급수.

Abstract : The integral equation method is a powerful tool for numerical electromagnetic modeling. But the difficulty of this technique is the size of the linear equations, which demands excessive memory and calculation time to invert. This limitation of the integral equation method becomes critical in inverse problem. The conventional Born approximation, where the electric field in the anomalous body is approximated by the background field, is very rapid and easy to compute. However, the technique is inaccurate when the conductivity contrast between the body and the background medium is large. Quasi-linear, quasi-analytical and extended Born approximations are novel approaches to 3-D EM modeling based on the linearization of the integral equations for scattered EM field. These approximation methods are much less time consuming than full integral equation method and more accurate than conventional Born approximation. They are, however, still approximate methods for 3-D EM modeling. Iterative series methods such as modified Born, quasi-linear and quasi-analytical can be used to increase the accuracy of various approximation methods. Comparisons of numerical performance against a full integral equation and various approximation codes show that the iterative series methods are very accurate and almost always converge. Furthermore, they are very fast and easy to implement on a computer. In this study, extended Born series method is developed and it shows more accurate result than that of other series methods. Therefore, Iterative series methods, including extended Born series, open principally new possibilities for fast and accurate 3-D EM modeling and inversion.

Keywords : 3-D EM modeling, Modified Born, Quasi-linear, Quasi-analytical, Extended Born approximation and series.

서 론

3차원 전자탐사 모델링에는 적분방정식법이 널리 사용되고 있다. 전자탐사의 3차원 모델링을 위한 적분방정식법에 관한 연구는 Hohmann(1975) 이래 수많은 연구가 이루어져 왔다 (Weidelt, 1975; Wannamaker, 1991; Xing 1992; 조인기, 정승환, 1998; 조인기, 최경화, 1999). 그러나 최근에는 3차원 역산 기법의 개발이 필요해짐에 따라 빠르고 정확한 모델링 기법의 개발이 절실한 실정이 되었다. 그러나 적분방정식법은 그 정확성은 매우 뛰어나지만 이론이 복잡하고, 대형 선형방정식을 풀

*2001년 4월 20일 접수
1) 강원대학교 자연과학대학 지구물리학과 (Department of Geophysics, Kangwon National University)

어야 하기 때문에 계산시간이 너무 많이 소요되어 역산을 위한 모델링 기법으로는 적절하지 못하다.

이러한 적분방정식법의 문제점을 해결하기 위하여 제안된 방법 중 가장 간단한 방법이 기존의 Born 근사법이다. 그러나 이 방법은 이상체의 크기가 크거나 모암과 이상체간의 물성차가 클 경우에는 매우 부정확한 결과를 나타내는 것으로 알려져 있다. Born 근사의 문제점을 해결하기 위한 방안으로 도입된 방법이 확장된 Born 근사(Habashy, *et al.* 1993; Torres-Verdin and Habashy, 1994; 조인기, 서정희, 1998), 준선형 근사(Zhdanov and Fang, 1996), 준해석 근사법 (Zhdanov *et al.*, 2000) 이다. 이들 근사법은 계산시간이 짧고 비교적 정확한 결과를 나타내는 매우 훌륭한 전자탐사 모델링 방법이다. 그러나 이들 방법은 어차피 근사법이므로 정확성에 한계가 있다. 특히 이상체와 측정점과의 거리가 매우 작거나, 모암과 이상체의 전기전도도비가 클 경우에는 정확성이 떨어질 수밖에 없다. 이러한 문제점의 해결방안 중의 하나가 급수 전개를 이용하는 방법이다.

Singer and Fainberg(1995)와 Pankratov *et al.*(1995)은 에너지 부등식을 사용하여 항상 수렴하는 수정 Born 급수법을 개발하였으며, Zhdanov and Fang(1997)과 Zhdanov *et al.*(2000)은 각각 준선형 급수 전개 및 준해석 급수 전개법을 이용하여 3차원 전자탐사 모델링 기법을 개발하였다. 여기서는 이러한 급수 전개법을 확장된 Born 급수 전개법으로 확대 발전시키고, 각 근사법 및 급수 전개법의 정확도 및 효율성을 비교, 분석하였다.

이 론

균질 반무한 공간내에 전도도 이상체가 존재할 경우 전기장은 다음과 같이 제2종 Fredholm 방정식으로 주어진다(Hohmann, 1975; Hohmann, 1988, 조인기, 정승환, 1997).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{E}_b(\mathbf{r})+\mathbf{E}_a(\mathbf{r})$$

$$=\mathbf{E}_b(\mathbf{r})+\int_v \Delta\sigma(\mathbf{r}')\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')dv'. \quad (1)$$

(1)식에서 $\mathbf{E}_b$는 송신원에 의한 1차장 (background field), $\mathbf{E}_a$는 이상체에 의한 2차장(anomalous field), σ_b 및 σ는 각각 모암 및 이상체의 전기전도도, $\Delta\sigma(\mathbf{r})=\sigma(\mathbf{r})-\sigma_b$, $\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$는 반무한공간에 대한 그린텐서로

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\left[k_b^2\mathbf{I}+\frac{1}{\sigma_b}\nabla\nabla\right]g(\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad (2)$$

로 주어진다. 무한공간에서 스칼라 그린함수 $g(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 은

$$g(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{e^{-ik_bR}}{4\pi R} \quad (3)$$

이며, $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, $k_b^2\approx -i\omega\mu\sigma_b$ 으로 준정적 근사(quasi-static approximation)를 만족시키는 주파수 대역에서의 전파상수이며, μ는 반무한 공간의 투자율이다. 반무한 공간에 대한 스칼라 그린함수는 더욱 복잡하며, (3)식에 지표면에 의한 영상원(image source)이 추가되어야 한다(Hohmann, 1975; 조인기, 최경화, 1999).

(1)식의 해를 구하는 방법 중 가장 간단한 방법은 다음과 같은 Born 급수(Born series)이다(Zhdanov and Fang, 1997).

$$\mathbf{E}_a^{[N]}=(\mathbf{G}_B\Delta\sigma)(\mathbf{E}_b)+(\mathbf{G}_B\Delta\sigma)^2[\mathbf{E}_b]+\cdots+(\mathbf{G}_B\Delta\sigma)^N[\mathbf{E}_b]. \quad (4)$$

(4)식의 Born 급수에 나타나는 그린텐서의 적분연산자는 임의의 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여

$$\mathbf{G}_B[\mathbf{x}]=\int_v \mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{x}(\mathbf{r}')dv' \quad (5)$$

로 주어진다. 그러나 Born 급수에서 $\|(\mathbf{G}_B\Delta\sigma)\|<1$ 의 수렴조건을 일반적으로 만족하지 못하므로 발산할 가능성이 크다. 통상적인 Born 근사는 (4)식에서 1차항까지만 적용한 것을 의미하며, Born 근사에서 2차장은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{E}_a^B=\mathbf{G}_B[\Delta\sigma\,\mathbf{E}_b]. \quad (6)$$

(6)식의 Born 근사는 이상체와 주변 매질간의 전기전도도비가 너무 크거나, 이상체의 크기가 클 경우 정확성에 문제가 있는 것으로 알려져 있다 (Torres-Verdin and Habashy, 1994).

이러한 Born 급수의 문제점을 해결하기 위하여 도입된 방법이 항상 수렴하는 수정 적분연산자 $\mathbf{C}$를 사용하여 2차장을 계산하는 방법이다. 수정 적분연산자를 사용하면 다음과 같은 2차장에 대한 적분방정식을 얻을 수 있다(Zhdanov and Fang, 1997).

$$\alpha\mathbf{E}_a=\mathbf{C}[\alpha\mathbf{E}_a]=\mathbf{G}_{MB}[\beta\alpha\mathbf{E}_a]+\mathbf{G}_{MB}[\beta\alpha\mathbf{E}_b]-\beta\alpha\mathbf{E}_b. \quad (7)$$

(7)식에서

$$\alpha=\frac{2\sigma_b+\Delta\sigma}{2\sqrt{\sigma_b}},\quad \beta=\frac{\Delta\sigma}{2\sigma_b+\Delta\sigma}. \quad (8)$$

수정 그린 연산자 $\mathbf{G}_{MB}$는 임의의 벡터에 $\mathbf{x}$대하여

$$\mathbf{G}_{MB}(\mathbf{x})=\sqrt{\sigma_b}\,\mathbf{G}_B[2\sqrt{\sigma_b}\mathbf{x}]+\mathbf{x} \quad (9)$$

로 정의되며, $\|\mathbf{G}_{MB}\|\le 1$ 의 특성을 갖는다. (7)식의 해를 구하기 위하여 반복법이 사용된다. 즉

$$\alpha\mathbf{E}_a^{(N)}=\mathbf{C}[\alpha\mathbf{E}_a^{(N-1)}],\quad N=1,2,3,... \quad (10)'$$

이며, 반복회수를 무한히 증가시키면 실제 2차장에 수렴하게 된다.

$$\alpha\mathbf{E}_a\rightarrow\lim_{N\rightarrow\infty}\alpha\mathbf{E}_a^{(N)}. \quad (11)$$

(10)식에 주어진 반복적 방법을 이용하여 2차장을 계산하는 방법은 초기값을 선정해 주는 방법에 따라 수정 Born 급수

(modified Born series), 준선형 급수(quasi-linear series), 준해석 급수(quasi-analytical series), 확장된 Born 급수(extended Born series) 등으로 나누어진다.

우선 수정 Born 급수는 2차장의 초기값을 0으로 설정해 주는 경우에 해당된다.

$$\alpha\mathbf{E}_{aMB}^{(0)}=0\,. \tag{12}$$

이 초기값을 (10)식에 대입하면

$$\alpha\mathbf{E}_{a}^{MB}=\alpha\mathbf{E}_{aMB}^{(1)}=\sqrt{\sigma_b}\,\mathbf{E}_{a}^{B} \tag{13}$$

이 되며, 이를 수정 Born 근사(modified Born approximation)라 한다. (10)식을 이용하여 이를 N차항까지 전개하여 수정 Born 급수를 구하면

$$\alpha\mathbf{E}_{aMB}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N-1}(\mathbf{G}_{MB}\beta)^{k}[\alpha\mathbf{E}_{a}^{MB}] \tag{14}$$

이 된다. (14)식에서 $\|\mathbf{G}_{MB}\|\cdot\|\beta\|\le 1$ 의 수렴조건을 만족하므로 수정 Born 급수는 항상 수렴한다(Zhdanov and Fang, 1997).

준선형 근사(quasi-linear approximation)는 2차장을 1차장과 반사텐서 $\hat{\lambda}$ (reflectivity tensor)의 스칼라 곱으로 근사하는 방법이며(Zhdanov and Fang, 1996), 준선형 급수는 준선형 근사에 의한 2차장을 급수의 초기값으로 설정한 경우이다(Zhdanov and Fang, 1997). 즉

$$\mathbf{E}_{a}^{QL}=\mathbf{E}_{aQL}^{(0)}=\hat{\lambda}\cdot\mathbf{E}_{b}\,. \tag{15}$$

이 때 반사텐서는

$$\left\|\hat{\lambda}\cdot\mathbf{E}_{b}-\mathbf{G}_{b}[\Delta\sigma\hat{\lambda}\cdot\mathbf{E}_{b}]-\mathbf{E}_{a}^{B}\right\|=\min \tag{16}$$

로 주어지는 조건식을 이용하여 구할 수 있다. (15)식을 (10)식에 순차적으로 대입하여 N차항까지의 준선형 급수를 계산하면

$$\alpha\mathbf{E}_{aQL}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N-1}(\mathbf{G}_{MB}\beta)^{k}[\alpha\mathbf{E}_{a}^{MB}]+(\mathbf{G}_{MB}\beta)^{N}[\alpha\mathbf{E}_{aQL}^{(0)}] \tag{17}$$

이 된다. 따라서 준선형 급수는 수정된 Born 급수에 비하여 $(\mathbf{G}_{MB}\beta)^{N}[\alpha\mathbf{E}_{aQL}^{(0)}]$ 만큼 정확도가 높다고 볼 수 있다.

한편 준선형 급수의 경우 미리 반사텐서를 계산해야 한다는 단점이 있다. 이의 대안으로 제안된 방법이 준해석 급수이다. 준해석 급수에서 초기값으로 준해석 근사 (quasi-analytical approximation)에 의한 2차장을 사용한다. 준해석 근사에서 2차장은 다음과 같이 주어진다(Zhdanov *et al.*, 2000).

$$\mathbf{E}_{a}^{QA}=\mathbf{E}_{aQA}^{(0)}=\{\mathbf{I}-\mathbf{G}_{B}[\Delta\sigma\mathbf{I}]\}^{-1}\mathbf{E}_{a}^{B}\,. \tag{18}$$

마찬가지로 (18)식의 초기값을 (10)식에 순차적으로 대입하면 준해석 급수를 얻을 수 있다.

$$\alpha\mathbf{E}_{aQA}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N-1}(\mathbf{G}_{MB}\beta)^{k}[\alpha\mathbf{E}_{a}^{MB}]+(\mathbf{G}_{MB}\beta)^{N}[\alpha\mathbf{E}_{aQA}^{(0)}]\,. \tag{19}$$

따라서 준해석 급수에서는 준선형 급수와는 달리 반사텐서를 따로 계산해 주지 않아도 된다.

마지막으로 확장된 Born 근사(extended Born or localized nonlinear approximation)는 이상체내에서의 전기장을

$$\mathbf{E}^{LN}\approx\Gamma\cdot\mathbf{E}_{b} \tag{20}$$

와 같이 1차장과 탈분극 텐서(depolarization tensor)의 스칼라 곱으로 근사하는 방법이다(Torres-Verdin and Habashy, 1994). (20)식에서 탈분극 텐서는

$$\Gamma=\{\mathbf{I}-\mathbf{G}_{B}[\Delta\sigma\mathbf{I}]\}^{-1} \tag{21}$$

로 주어진다. 이 경우 2차장은

$$\mathbf{E}_{a}^{LN}=\Gamma\cdot\mathbf{E}_{b}-\mathbf{E}_{b}=\{(\mathbf{I}-\mathbf{G}_{B}[\Delta\sigma\mathbf{I}])^{-1}-\mathbf{I}\}\cdot\mathbf{E}_{b} \tag{22}$$

이다. (22)식의 우변을 정리하면

$$\mathbf{E}_{a}^{LN}=\{\mathbf{I}-\mathbf{G}_{B}[\Delta\sigma\mathbf{I}]\}^{-1}\cdot\mathbf{G}_{B}[\Delta\sigma\mathbf{I}]\cdot\mathbf{E}_{b}\,. \tag{23}$$

(6)식에서 이상체 내에서의 전기장이 매우 부드럽게 변하는 함수라 하면

$$\mathbf{E}_{a}^{B}=\mathbf{G}_{B}[\Delta\sigma\mathbf{I}]\cdot\mathbf{E}_{b} \tag{24}$$

의 조건을 만족하게 되며 (23)식은

$$\mathbf{E}_{a}^{LN}=\{\mathbf{I}-\mathbf{G}_{B}[\Delta\sigma\mathbf{I}]\}^{-1}\cdot\mathbf{G}_{a}^{B}=\mathbf{E}_{a}^{QA} \tag{25}$$

이 되어, 확장된 Born 근사 및 준해석 근사는 동일한 근사법이 된다. 한편 확장된 Born 급수는 (23)식의 확장된 Born 근사를 급수의 초기값으로 사용하는 방법이다. 즉

$$\mathbf{E}_{a}^{LN}=\mathbf{E}_{aLN}^{(0)}=\{\mathbf{I}-\mathbf{G}_{B}[\Delta\sigma\mathbf{I}]\}^{-1}\cdot\mathbf{G}_{B}[\Delta\sigma\mathbf{I}]\cdot\mathbf{E}_{b} \tag{26}$$

이고, 앞에서와 마찬가지로 (26)식을 (10)식에 순차적으로 대입하면

$$\alpha\mathbf{E}_{aLN}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N-1}(\mathbf{G}_{MB}\beta)^{k}[\alpha\mathbf{E}_{a}^{MB}]+(\mathbf{G}_{MB}\beta)^{N}[\alpha\mathbf{E}_{aLN}^{(0)}] \tag{27}$$

인 확장된 Born 급수를 얻을 수 있다. 확장된 Born 급수의 경우도 (24)식의 조건을 만족한다면 (19)식에 주어진 준해석 급수와 동일한 방법이 된다.

적분방정식법의 정확도 검토

본 연구에서는 주어진 모델에 대하여 각 근사법 및 급수 전개법에 대한 반응을 계산하고 이를 거의 해석적 해에 가까운 것으로 알려져 있는 적분방정식법의 결과와 비교하여 각 방법

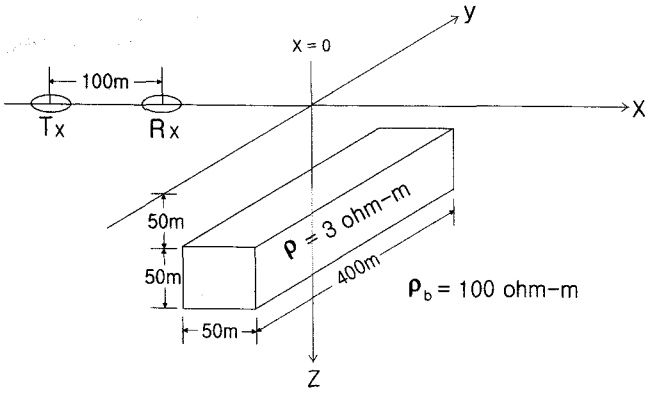

Fig. 1. 3-D prism model in homogeneous half-space. The HCP (horizontal coplanar) slingram configuration at 100 m spacing is used.

들의 정확성을 비교 분석하였다. 적분방정식법은 Hohmann (1975)의 이론에 근거한 조인기와 최경화(1999)의 반무한 공간에 대한 3차원 전자탐사 모델링 프로그램을 사용하였다. 우선 비교의 대상이 되는 적분방정식법의 정확성을 검증하기 위하여 본 연구에 사용된 적분방정식법의 결과를 Frischknecht *et al.*(1991)의 결과와 비교하였다. 여기서 측정량은 자기장의 수직성분을 진공에서의 자기장으로 나누어 준 값이다. 사용된 모델은 Fig. 1에 주어진 직육면체로 그 크기는 50m × 400m × 50m, 모암의 전기비저항은 100 ohm-m, 이상체의 전기비저항은 3 ohm-m이다. 송수신 루프의 간격은 100 m이다. Fig. 2는 다양한 주파수에 대한 소형루프 전자탐사 프로파일을 나타낸 것이다. 모델링시 이상체는 25m × 25m × 25m의 정육면체로 요소분할 하였다. 고주파 대역에서 약간의 차이를 보이기는 하지만 모든 주파수에서 동상 및 이상성분 모두 Frischknecht *et al.*(1991)의 결과와 비교적 정확히 일치하고 있다. 따라서 본 연구에 사용된 적분방정식 프로그램의 정확성을 확인할 수 있었으며, 다양한 근사법 및 급수 전개법의 정확성 검토를 위한 기준으로 사용하였다.

근사법의 비교

Fig. 3은 본 연구에서 각종 근사법 및 급수 전개법의 정확성 검토를 위하여 사용된 표준 모델로서, 그 크기는 5m × 50m × 50m, 이상체 최상부까지의 심도는 10 m이다. 모암의 전기비저항은 100 ohm-m, 이상체의 전기비저항은 10 ohm-m이다. 한편 송신원은 주파수 1000 Hz의 수직 자기쌍극자로 자기 쌍극자 모멘트는 1로 설정하였다. 송신 자기 쌍극자를 $x = -10$ m에 고정시키고 측선을 따라 일정 간격으로 이동시키면서 2차 자기장의 수직성분을 계산하였다.

준선형 근사, 준해석 근사 및 확장된 Born 근사는 모두 이상체내에서의 전기장을 1차 전기장과 특정 텐서의 스칼라 곱으로 가정한다는 공통점을 갖는다. 그러나 이 텐서의 계산 방법에 서로 약간의 차이가 있으며, 이러한 차이로 인하여 각 방

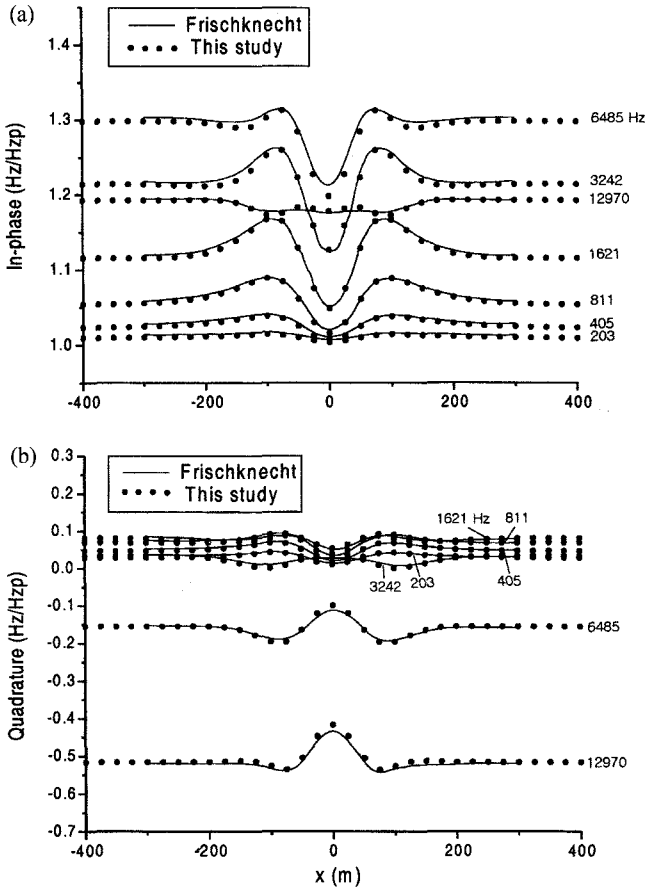

Fig. 2. HCP in-phase (a) and quadrature (b) profiles computed by full integral equation method at several frequencies over the model in Figure 1. Both the results of this study and Frischknecht et al. (1991, p.159) are shown. The computed results are vertical magnetic fields normalized by the vertical component of the primary magnetic field in free space.

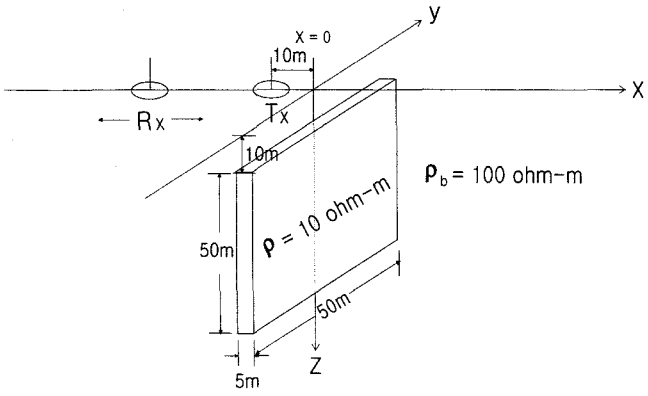

Fig. 3. 3-D thin plate model in homogeneous half-space. A VMD (vertical magnetic dipole) source is fixed at x=−10 m and vertical components of the secondary magnetic field are computed along the x axis.

법의 정확성이 서로 달라지게 된다. Fig. 4는 각 근사법의 정확도를 상호 비교하기 위하여 Fig. 3에 주어진 동일한 모델에 대한 각 근사법의 결과를 적분방정식법의 결과와 함께 나타낸

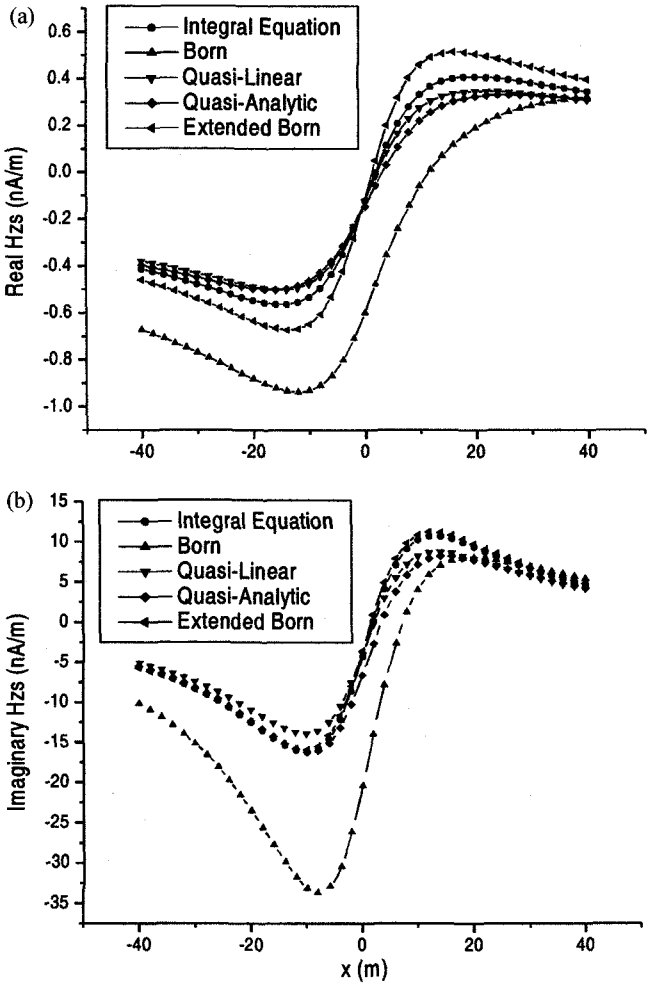

Fig. 4. Comparison between results of various approximation methods and those of full integral equation solutions over the model in Figure 3 at the frequency f=1 kHz. (a) Real and (b) imaginary components of Hzs.

것이다. Born 근사의 경우 전체적인 프로파일의 변화양상은 어느 정도 적분방정식법의 결과와 유사하지만, 비교한다는 것 자체가 무리일 정도로 정확도가 떨어진다. 기존의 Born 근사를 제외하고는 모든 근사법이 거의 적분방정식법과 유사한 결과를 보이고 있어 이들 근사법이 비교적 정확한 근사법임을 잘 보여주고 있다. 좀더 구체적으로 살펴보면 동상성분에서는 준선형 근사 및 준해석 근사가 확장된 Born 근사에 비하여 적분방정식법의 결과에 근접하고 있다. 그러나 이상성분의 경우에는 확장된 Born 근사가 오히려 준선형 근사나 준해석 근사에 비하여 적분방정식의 결과에 근접하고 있다. 본 연구에서 사용된 이상체 모델의 경우 동상성분에 비하여 이상성분이 매우 큰 값을 보이고 있으므로 근사법의 정확성을 좌우하는 것은 이상성분이며, 이러한 관점에서 확장된 Born 근사가 이 모델의 경우에는 정확성이 가장 뛰어난 것으로 나타나고 있다. 물론 이러한 하나의 모델에 대한 결과를 바탕으로 각 근사법의 정확성에 대한 일반적인 판정을 내릴 수 없지만, 다수의 모델링을 통하여 매우 미소한 차이이기는 하지만 확장된 Born 근사가 준선형 및 준해석 근사 보다는 전반적으로 정확성에서 우수하다는 것을 확인할 수 있었다. 결과적으로 근사법의 정확성은 확장된 Born 근사, 준선형 근사, 준해석 근사의 순서인 것으로 판단된다.

급수 전개법의 비교

앞서 언급한 바와 같이 근사법은 그 자체만으로도 매우 훌륭한 모델링 방법이지만 어차피 근사법이라는 한계 때문에 근본적으로 그 정확도에는 문제가 있을 수밖에 없다. 급수 전개법은 이러한 각종 근사법의 정확도를 향상시키기 위한 매우 효과적인 방법이다. 여기서는 각종 급수 전개법의 정확도를 상호 비교, 분석하고자 한다.

Fig. 5는 수정 Born 급수법에서 차수의 증가에 따른 프로파일을 나타낸 것이다. 이상체 모델은 Fig. 3에 주어진 모델을 사용하였으며, 송신 주파수는 1000 Hz이다. 이 방법에서 0차항은 기존의 Born 근사에 해당된다. 1차항까지 전개한 수정 Born 근사의 경우는 적분방정식법의 결과와 상당한 차이를 보이고 있으나, 차수가 증가함에 따라 점진적으로 적분방정식법의 결과에 접근하는 양상을 보이고 있다. 수정 Born 근사의 경우에도 프로파일의 전반적인 변화양상은 적분방정식법의 결과와 일치하고 있다. 수정 Born 급수의 경우 전개 차수가 7 이상이 되면 거의 적분방정식법의 결과에 수렴하게 된다. 한편 급수의 수렴은 사용 주파수, 모암 및 이상체의 전기전도도, 이상체의 크기 및 심도, 수치해를 구하기 위해 분할하는 요소의 크기 등 다양한 변수에 의해 좌우된다. 따라서 Fig. 3과 같은 특정 모델에 대한 결과를 일반화할 수는 없다. 그러나 본 연구의 목적이 각 근사법 및 급수 전개법의 상대적인 비교이므로 모든 변수를 동일하게 유지하면서 급수전개시 차수의 증가에 대한 수렴속도를 분석하고자 한다.

준선형 근사는 급수전개를 하지 않아도 상당히 정확한 모델링 방법인 것으로 알려져 있다. 그러나 주파수가 증가하거나 이상체와 모암간의 전기전도도비가 너무 커지게 되면 오차가 증가하게 된다. Fig. 6은 Fig. 3의 모델에 대하여 준선형 급수 전개법을 사용하여 작성한 프로파일이다. 예상한 바와 같이 차수가 증가함에 따라 점차 적분방정식의 결과에 더욱 접근하는 양상을 나타내고 있다. 그러나 앞의 수정 Born 급수에 비하여 낮은 차수에서도 오차가 작으며, 준선형 근사의 경우에도 거의 적분방정식의 결과와 일치하고 있어 이 방법이 매우 효과적인 모델링 기법임을 시사하고 있다.

준해석 근사도 준선형 근사와 마찬가지로 매우 정확한 모델링 방법이다. 이 방법은 준선형 근사를 개선한 방법으로 준선형 근사의 반사텐서를 최소자승법을 사용하지 않고 해석적으로 구한 경우에 해당된다. 그러나 준해석 근사는 준선형 근사에서 반사텐서와 1차 전기장의 스칼라 곱이 공간적으로 매우

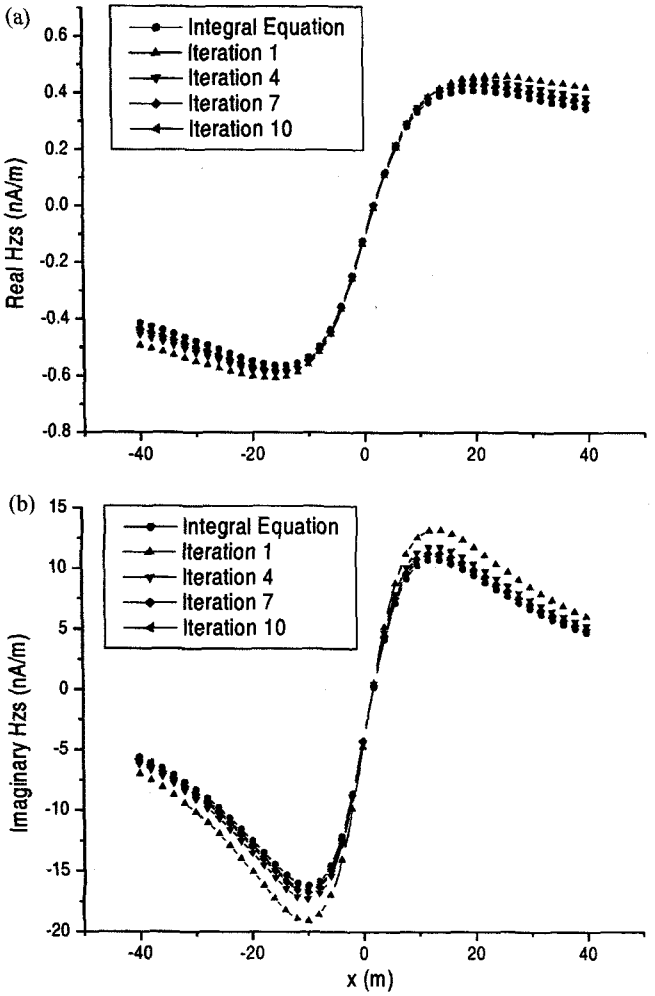

Fig. 5. Vertical components of the secondary magnetic field (Hzs) obtained by different numbers of iterations of Modified Born series and full integral equation solutions over the model in Figure 3 at the frequency *f*=1 kHz. (a) Real and (b) imaginary component of Hzs.

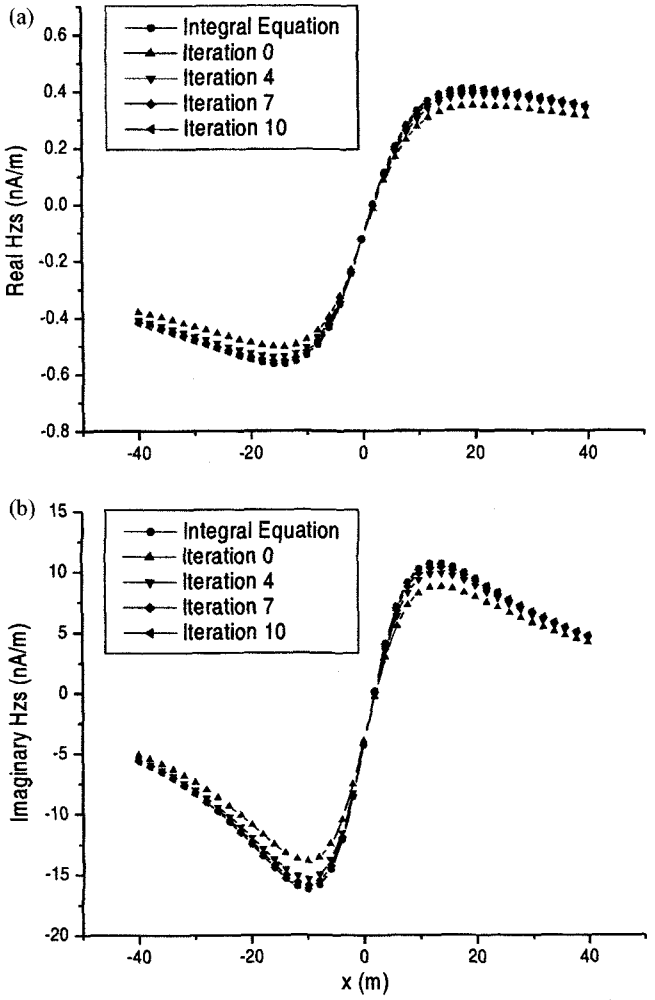

Fig. 6. Vertical comoponents of the secondary magnetic field (Hzs) obtained by different numbers of iterations of quasi-linear (QL) series and full integral equation solitions over the model in Figure 3 at the frequency f=1 kHz. (a) Real and (b) imaginary components of Hzs. Note that the zero order QL series is equal to QL approximation.

부드럽게 변한다는 가정하에 유도된 방법이므로 그 정확성에서 준선형 근사보다 우월하다고 단정지을 수 없으며, 단지 계산시간은 단축된다고 볼 수 있다. Fig. 7에 나타난 바와 같이 준해석 근사의 경우에도 적분방정식의 결과에 거의 일치하는 양상을 보이고 있으며, 급수 전개법의 경우에는 차수가 증가함에 따라 매우 빠르게 적분방정식의 결과에 수렴하고 있다.

확장된 Born 근사는 이미 많은 결과에서 그 정확성이 입증된 방법이다(Habashy *et al.*, 1993; Torres-Verdin and Habashy, 1994; 조인기, 최경화, 1999; 안희윤, 조인기, 2001). Fig. 8은 확장된 Born 급수법에 의한 결과를 나타낸 것으로 준선형 및 준해석 급수법의 경우와 같이 비교적 정확한 결과를 보이고 있다. 또한 4차항까지 전개한 결과가 거의 적분방정식의 결과와 식별이 불가능할 정도로 매우 빠르게 수렴하는 양상을 보이고 있다. 이는 초기 오차가 적기 때문에 나타나는 현상으로 확장된 Born 근사의 정확성에 기인된 것으로 해석된다.

Fig. 9는 각 급수 전개법에 대한 정확도를 비교하기 위하여 Fig. 3에 주어진 모델에 대하여 4차항까지 전개한 2차 자기장의 수직성분을 나타낸 것이다. 수정 Born 급수, 준선형 급수, 준해석 급수 및 확장된 Born 급수 모두 거의 적분방정식법의 결과와 잘 일치하고 있어 급수법의 우수성을 잘 보여주고 있다. 미세한 차이이긴 하지만 굳이 그 순서를 언급하자면 동상성분의 경우에는 준선형 및 준해석, 확장된 Born, 수정 Born 급수의 순으로 정확도가 뛰어난 것으로 나타났으며, 이상성분의 경우에는 확장된 Born, 준선형, 준해석, 수정 Born 급수법 순서로 정확도가 높은 것으로 나타났다. 그러나 앞서 설명한 바와 같이 이상성분의 값이 동상성분에 비하여 월등히 크므로 전체적으로는 이상성분에 의한 순서가 각 급수법의 정확성을 반영하고 있다고 볼 수 있다. 그러나 현장측정시의 오차 및 잡음, 기기의 측정 한계 등을 감안한다면 비교적 낮은 차수인 4

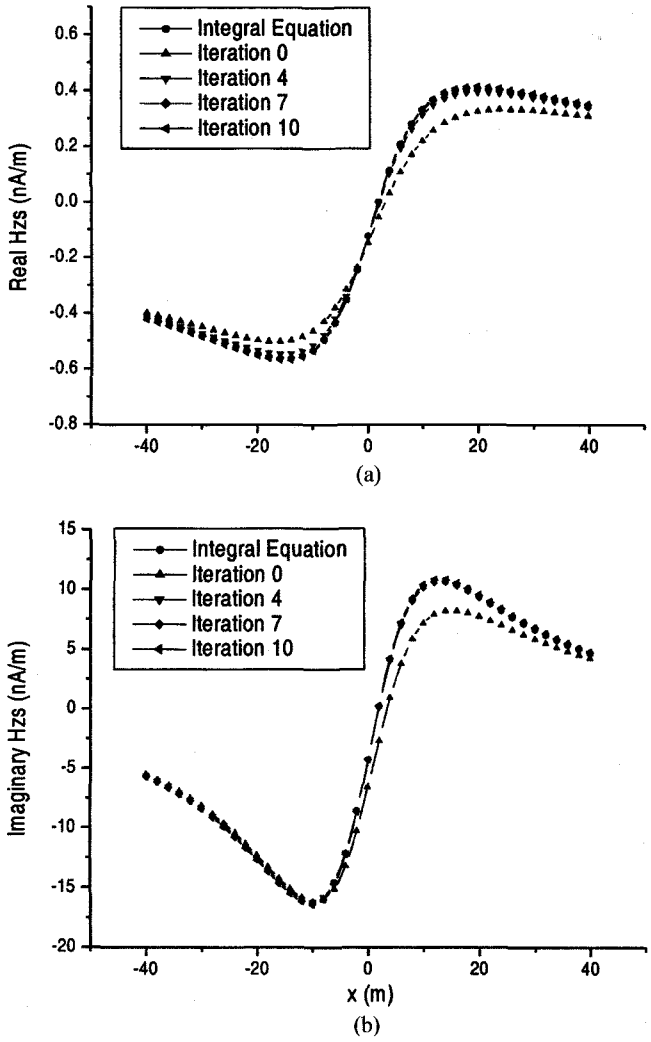

Fig. 7. Vertical components of the secondary magnetic field (Hzs) obtained by different numbers of iterations of quasi-analytical (QA) series and full integral equation solutions over the model in Figure 3 at the frequency f=1 kHz. (a) Real and (b) imaginary components of Hzs. Note that the zero order QA series is equal to QA approximation.

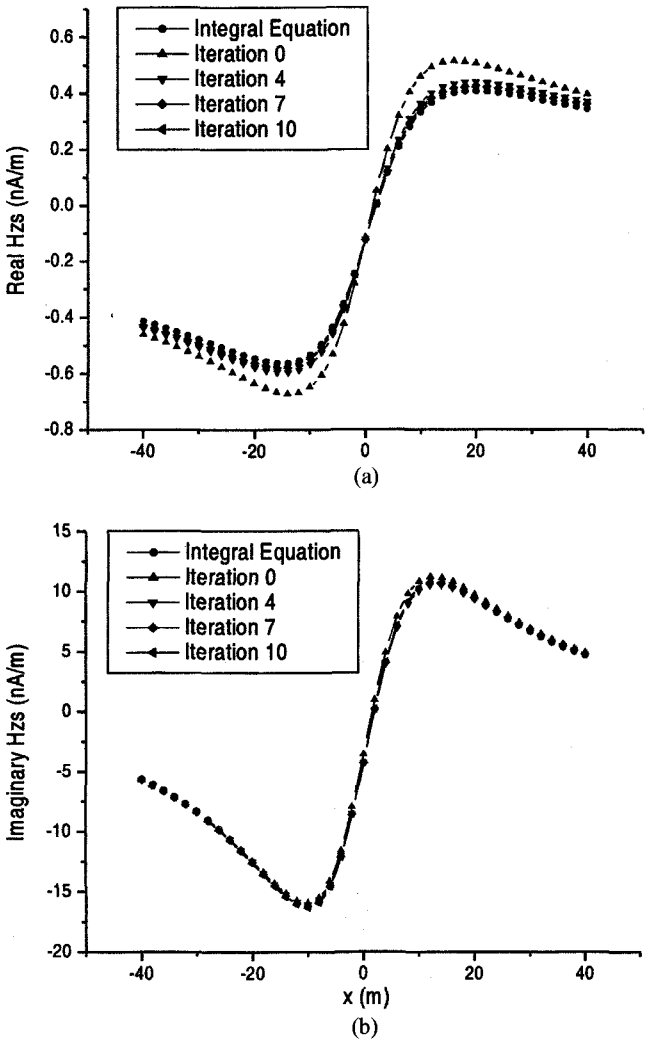

Fig. 8. Vertical components of the secondary magnetic field (Hzs) obtained by different numbers of iterations of extended Born (LN) series and full integral equation solutions over the model in Figure 3 at the frequency f=1 kHz. (a) Real and (b) imaginary components of Hzs. Note that the zero order LN series is equal to LN approximation.

차 항까지 전개한 결과에서도 모든 방법이 매우 정확한 결과를 보이고 있어 급수 전개법의 정확도를 비교한다는 것은 무의미할 수도 있다.

주파수 및 전도도비 변화에 따른 정확도

일반적으로 유도영역 전자탐사(induction EM)가 성립하는 주파수 대역은 100 kHz 이하인 것으로 알려져 있다. 전자탐사법에서 측정값은 송신 주파수에 따라 서로 다른 반응을 보이게 된다. 따라서 주파수 변화에 따른 각 근사법 및 급수법의 정확성을 비교하기 위하여 Fig. 3에 주어진 모델에서 송신기는 $x=-10$ m, 수신기는 $x=10$m에 고정시키고, 주파수를 10 Hz에서 100 kHz까지 변화시키면서 2차 자기장의 수직성분의 변화양상을 적분방정식법의 결과와 함께 Fig. 10에 도시하였다. 1000 Hz 이하의 저주파 대역에서는 모든 근사법이 매우 정확한 결과를 보이고 있으나 그 이상의 주파수에서는 약간의 오차가 나타나고 있다.

Fig. 11은 동일한 모델에 대하여 20차항까지 전개한 각종 급수 전개법의 정확성을 비교한 것이다. 모든 급수 전개법이 거의 적분방정식법의 결과와 식별이 불가능할 정도로 정확히 일치하고 있어 급수 전개법이 매우 강력한 모델링 기법임을 잘 보여주고 있다.

기존의 Born 근사법은 이상체와 모암간의 전기전도도비가 매우 작을 경우에 비교적 정확한 값을 나타내게 된다. 여기서는 모암과 이상체 사이의 전기전도도비 변화에 따른 각 근사법 및 급수 전개법의 정확성을 비교하기 위하여 Fig. 3에 주어

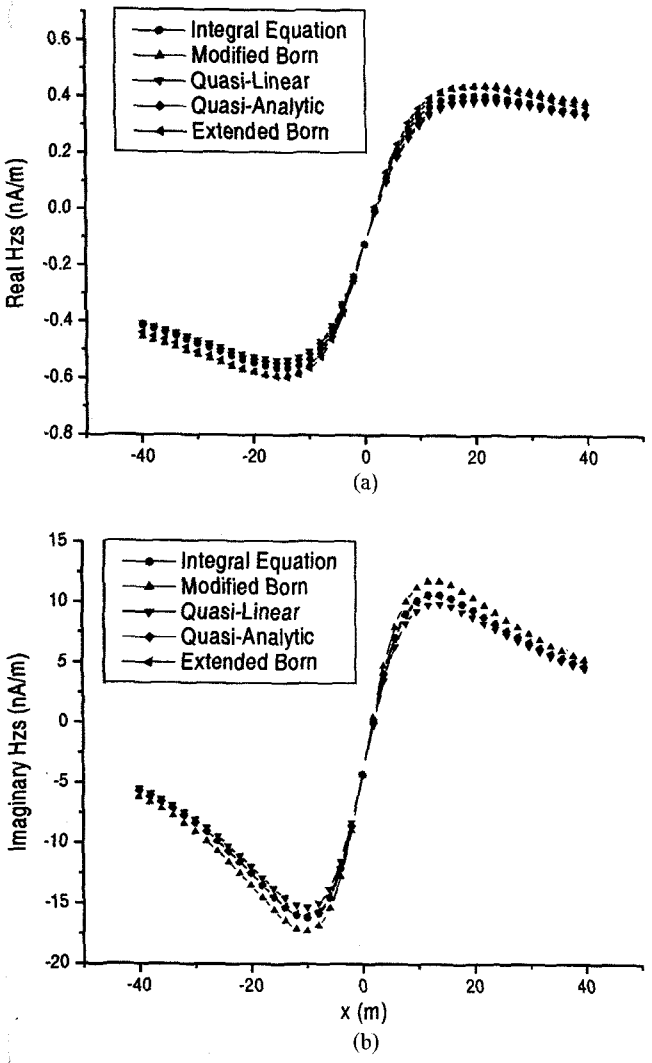

Fig. 9. Comparison between results of 4th-order MB, QL, QA, LN series and those of full integral equation solutions over the model in Figure 3 at the frequency f=1 kHz. (a) Real and (b) imaginary components of Hzs.

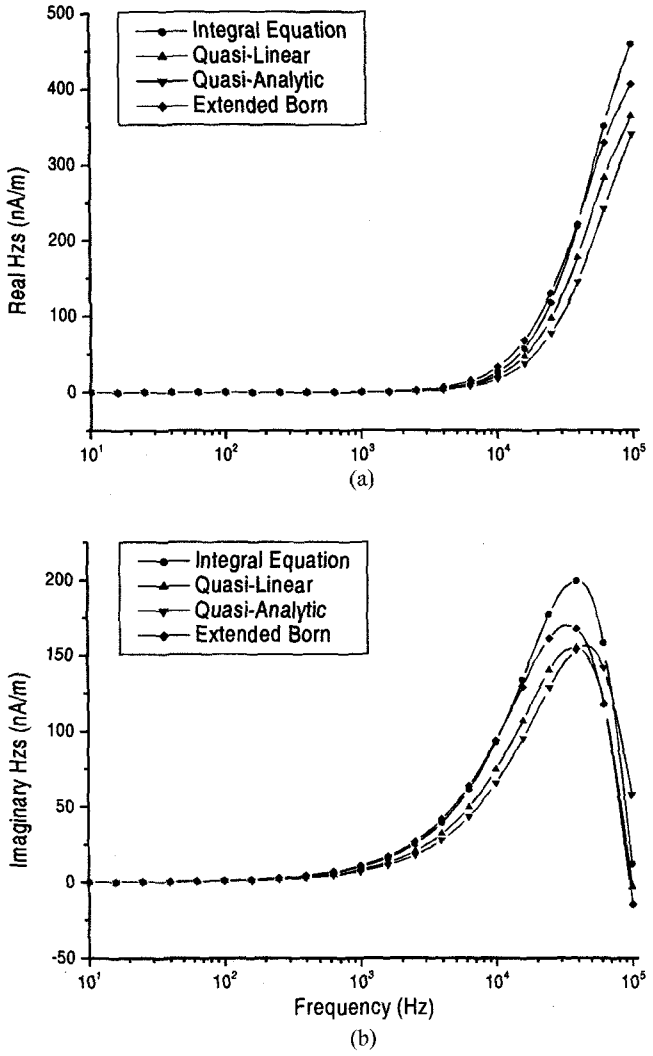

Fig. 10. Vertical components of the secondary magnetic field (Hzs) plotted as a function of frequency, which are simulated by QL, QA, LN approximations and full integral equation over the model in Figure 3. (a) Real and (b) imaginary component of Hzs.

진 모델에서 송신기는 $x=-10$m, 수신기는 $x=10$m에 고정시키고, 모암의 전기전도도에 대한 이상체의 전기전도도비를 10^{-2}에서 10^{3}까지 변화시키면서 2차 자기장의 수직성분의 변화 양상을 적분방정식법의 결과와 비교하였다. Fig. 12는 모암과 이상체 사이의 전기전도도비 변화에 따른 각 근사법의 결과를 나타낸 것이다. 예상한 바와 같이 모암과 이상체 사이의 전기전도도비가 작을 경우에는 매우 정확한 결과를 보이고 있으며, 그 비가 증가하게 되면 오차가 증가하는 양상을 보이고 있다. Fig. 12에서 각 근사법에 따라 다소간의 차이는 있으나 대개 전도도비가 15배 이상에서는 정확성이 너무 떨어지는 것으로 나타나고 있다.

Fig. 13은 모암과 이상체 사이의 전기전도도비 변화에 따른 20차항까지 전개한 각 급수법의 결과를 나타낸 것이다. 이 경우에는 전도도비가 30배 정도에서도 매우 정확한 결과를 보이고 있어, 전개 차수를 증가시키면 전도도비가 클 경우에도 정확성이 높아짐을 알 수 있다. 따라서 급수 전개법은 전개 차수를 조절하여 전도도비가 높을 경우에도 효과적으로 모델링을 수행할 수 있다는 장점이 있다.

토의 및 결론

3차원 전자탐사 모델링에는 적분방정식법이 널리 사용되고 있다. 그러나 이 방법은 비록 정확성은 뛰어나지만, 이론이 복잡하고 계산시간이 많이 소요된다는 단점이 있다. 특히 최근 전자탐사자료의 해석이 주로 역산을 통하여 이루어지고 있으므로, 빠르고 정확한 모델링 알고리듬의 개발이 절실한 실정이다. 이러한 조건을 만족시키는 방법으로 준선형 근사, 준해석 근사 및 확장된 Born 근사법 등이 개발되었으며, 이들 근사법

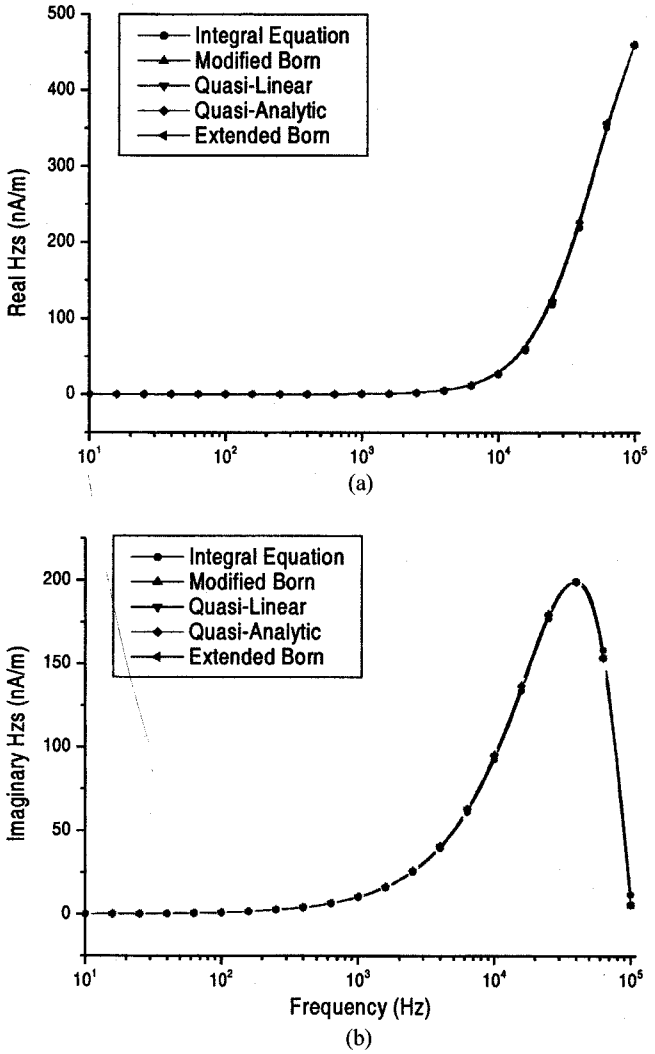

Fig. 11. Vertical components of the secondary magnetic field (Hzs) plotted as a function of frequency, which are simulated by 20th-order QL, QA, LN series and full integral equation over the model in Figure 3. (a) Real and (b) imaginary component of Hzs.

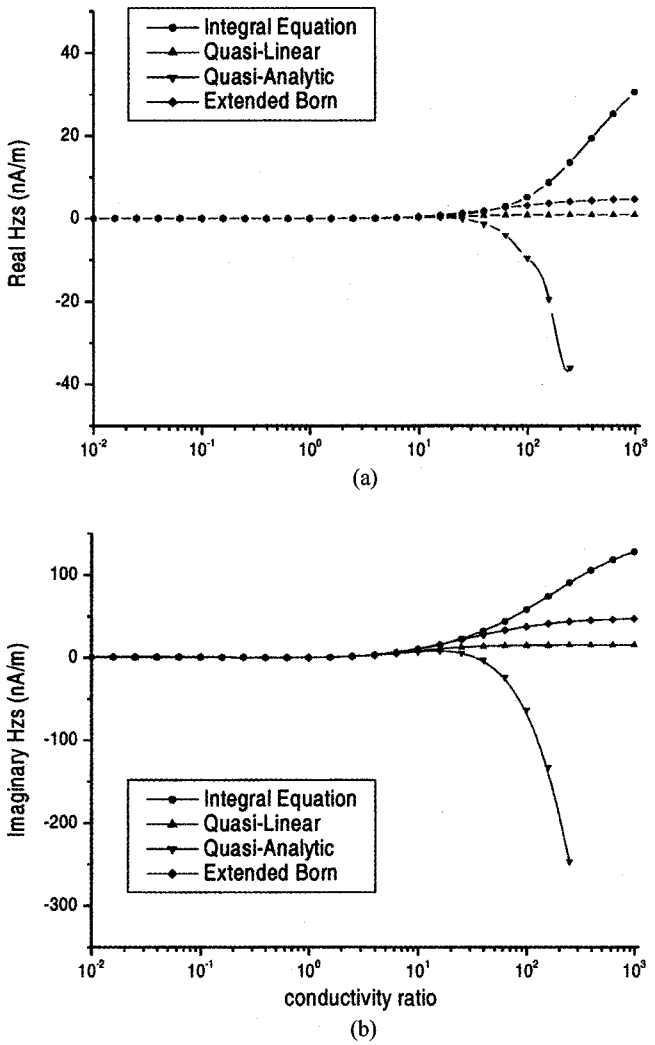

Fig. 12. Vertical components of the secondary magnetic field (Hzs) plotted as a function of conductivity ratio (σ/σ_b), which are simulated by QL, QA, LN approximations and full integral equation over the model in Figure 3 at the frequency f=1 kHz. (a) Real and (b) imaginary component of Hzs.

은 정확성이 뛰어나고 계산시간이 빨라 매우 효과적인 3차원 전자탐사 모델링 기법인 것으로 알려져 있다. 그러나 이들 방법은 말 그대로 근사법이다. 따라서 보다 정확한 결과를 얻을 수 있는 방법이 모색되고 있으며, 이 중의 하나가 급수 전개법이다. 급수 전개법은 항상 수렴하는 특성을 갖는 수정 적분연산자를 사용하여 근사법의 정확성을 매우 효과적으로 향상시킬 수 있는 방법이다. 본 연구에서는 각종 근사법 및 이에 대응하는 급수 전개법을 사용하여 간단한 직육면체 이상체에 의한 2차 자기장의 수직성분을 계산하고, 이를 적분방정식법의 결과와 비교하여 각 방법의 정확성을 검토하였다.

근사법의 경우 준선형, 준해석 및 확장된 Born 근사 모두 비교적 정확한 모델링 방법임을 알 수 있었으며, 굳이 순서를 따지자면 확장된 Born 근사가 가장 정확하고, 준선형, 준해석 근사의 순인 것으로 나타났다. 특히 확장된 Born 근사는 계산시간에 있어서도 다른 근사법에 비하여 느리지 않다는 장점이 있다. 그러나 이들 근사법은 모두 급수 전개법에 비해서는 그 정확성이 떨어진다고 할 수 있다. 급수 전개법은 거의 모든 경우에 수렴한다는 강력한 장점이 있으며, Fig. 3에 주어진 모델에 대하여 수정 Born 급수를 제외하고는 4차항 이내에서 거의 적분방정식법의 결과에 수렴하는 특성을 보이고 있다. 또한 급수 전개법은 각 근사법의 전기장을 이용하여 간단하게 계산할 수 있다는 장점이 있다. 급수 전개법은 비록 전개 차수에 따라 계산시간이 더 소요되지만, 실질적으로 그 차이는 근사법의 경우와 비교할 때 크지 않다. 이는 근사법이나 급수 전개법 모두 그린 텐서의 적분에 대부분의 시간이 소요되기 때문이다. 또한 급수 전개법은 모암과 이상체간의 전기전도도비가 클 경우에도 전개 차수를 증가시키면 정확한 결과를 얻을 수 있으며, 주파수가 높을 경우에도 전개 차수를 증가시키면 매우 정확한 결

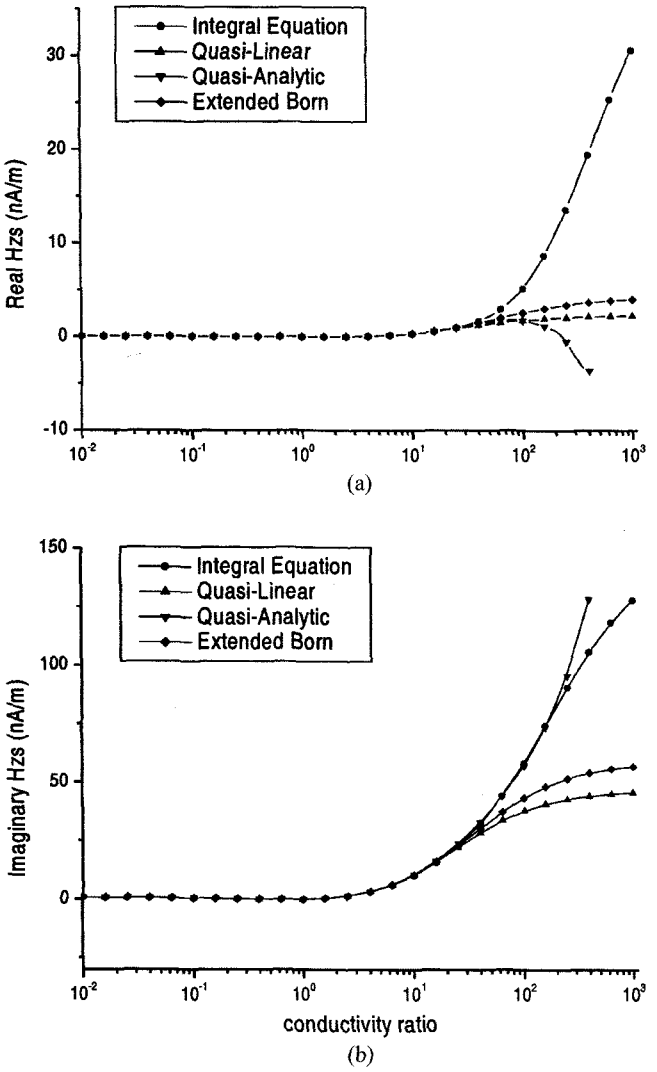

Fig. 13. Vertical components of the secondary magnetic field (Hzs) plotted as a function of conductivity ratio (σ/σ_b), which are simulated by 20th-order QL, QA, LN series and full integral equation over the model in Figure 3 at the frequency f=1 kHz. (a) Real and (b) imaginary component of Hzs.

과를 나타내므로 매우 강력한 모델링 기법임을 알 수 있었다.

이상에서 각종 근사법은 그 자체만으로도 효과적인 3차원 전자탐사 모델링 기법이지만, 급수 전개법을 사용하여 보다 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 따라서 급수 전개법은 향후 복잡한 3차원 전자탐사 모델링의 매우 효과적인 방법으로 이용될 수 있을 것이며, 3차원 역산에도 충분히 적용 가능한 모델링 방법으로 기대된다.

감사의 글

본 연구는 강원대학교 부설 자원개발연구소의 지원을 받아 이루어졌습니다.

참고문헌

안희윤, 조인기, 2001, 3차원 전자탐사 모델링에서 근사법의 비교: 한국자원공학회지, **38**, 169-177.

조인기, 서정희, 1998, 확장된 Born 근사에 의한 시추공간 전자탐사 2.5차원 모델링: 물리탐사, **1**, 127-135.

조인기, 정승환, 1998, 시추공간 전자탐사법의 3차원 모델링: 한국자원공학회지, **35**, 50-58.

조인기, 최경화, 1999, 확장된 Born 근사에 의한 시추공간 전자탐사 3차원 모델링: 물리탐사, **2**, 142-148.

Hohmann, G. W., 1975, Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling: *Geophysics*, **40**, 309-324.

Hohmann, G. W., 1988, Numerical modeling for electromagnetic methods in applied geophysics, in Nabighian, M.N. Ed., Electromagnetic methods in applied geophysics - Theory: *Soc. Explor. Geophys.*, **1**, 312-363.

Frischknecht, F. C., Labson, V. F., Spies, B. R., and Anderson, W. L., 1991, Profiling methods using small sources, in Nabighian, M.N. Ed., Electromagnetic methods in applied geophysics-Applications Part A: *Soc. Explor. Geophys.*, 153-167.

Pankratov, O. V., Avdeev, D. B., and Kuvshinov, A. V., 1995, Scattering of electromagnetic field in inhomogeneous earth: Forward problem solution: *Izv. Akad. Nauk. SSSR Fiz. Zemli*, **3**, 17-25

Singer, B. S., and Fainberg, E. B., 1995, Generalization of iterative dissipative method for modeling electromagnetic fields in nonuniform media with displacement currents: *J. Appl. Geophys.*, **34**, 41-46.

Habashy, T. M., Groom, R. W., and Spies, B. R., 1993, Beyond the Born and Rytov apprximations: *J. Geophys. Res.*, **98**, 1759-1775.

Torres-Verdin, C., and Habashy, T. M., 1994, Rapid 2.5-dimensional forward modeling and inversion via a new nonlinear scattering approximation: *Radio Sci.*, **29**, 1051-1079.

Wannamaker, P. E., 1991, Advances in 3-D magnetotelluric modeling using integral equations: *Geophysics*, **56**, 1716-1728.

Weidelt, P., 1975, EM induction in three-dimensional structures: *J. Geophys.*, **41**, 85-109.

Xiong, Z., 1992, EM modeling of 3-D structures by the method of system iteration using integral equations: *Geophysics*, **57**, 1556-1561.

Zhdanov, M. S., and Fang, S., 1996, Quasi-linear approximation in 3-D EM modeling: *Geophysics*, **61**, 646-665.

Zhdanov, M. S., and Fang, S., 1997, Quasi-linear series in three-dimensional electromagnetic modeling: *Radio Sci.*, **32**, 2168-2188.

Zhdanov, M. S., Dmitriv, V. I., Fang, S., and Hursan, G., 2000, Quasi-analytical approximations and series in electromagnetic modeling: *Geophysics*, **65**, 1746-1757.