Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 26, No. 1, pp. 66-72, March 2000.

생산 중단되는 내구재의 재고정리를 위한 가격정책†

이경근 · 김영석

부산대학교 공과대학 산업공학과

Dynamic Clearance Pricing Policy for Durable Goods

Kyung-Keun Lee · Young-Seok Kim

Inventory management of a product not to be produced any more has a great impact on the financial status of a company. Clearance pricing can make bigger sales volume together with great savings of inventory holding cost specially for a durable goods with relatively large inventory carrying cost and accordingly cash inflow can be improved. This paper deals with the inventory management by non-linear clearance pricing with the sales rate which depends on the accumulated sales volume and selling price.

1. 서 론

신제품에 대한 소비자욕구의 증대 및 이에 따른 신제품 개발속도의 단축, 그리고 기업을 둘러싼 불확실한 환경의 확산 등으로 제품의 수명은 날로 짧아지고 있는 현실 상황에서 신제품 출현으로 말미암은 생산중단 결정된 구모형의 재고품처리는 기업의 수익성에 중대한 영향을 미치게 된다.

특히 내구재인 경우 일반 소비재에 비하여 제품생산 비용이 많이 투입되어 이로 인한 금리 내지는 기회비용은 물론 내구재의 상품가치 보존을 위한 재고 유지비 또한 상당히 크다고 할 수 있다. 이러한 상황에서 기업은 가격조정을 통하여 판매를 촉진시켜 투입된 비용을 조속히 회수가능할 뿐 아니라 이에 따른 재고유지비도 절약할 수 있게 된다. 일반적으로 계획된 할인판매기간이 끝나면 이 제품은 더 이상 시장에서의 판매를 중단하고 계열사에 적당한 처분가에 의한 내부거래로 인계되어 계열사에서 사용되거나 또는 자가 사용하거나 함으로써 판매시장에서의 제품수명을 다하게 된다. 조정된 할인가격으로 판매를 시작하는 시점의 재고수준은 이미 조사되어 알고 있으므로 금번 연구는 계획된 할인판매기간 동안의 재고품 가격결정문제를 다루고자 한다.

동적가격정책에 대해서 Kalish(1983)는 판매함수와 학습효과에 따르는 생산비를 고려한 가격정책에 대해서 연구하였으며 Dhebar and Oren(1985)은 판매에 따르는 서비스 네트웍 확장과 공급비용 감소에 따르는 가격정책에 대해서 언급하였다. 한편 Gallego and Ryzin(1994), Bitran and Mondshein(1997), Feng and Gallego(1995) 등은 수요의 불확실성에 대한 고려를 통하여 최적 가격정책과 최적 할인기간 결정에 대해서 연구하였다. Smith and Achabal(1998)은 판매함수와 초기 재고수준에 따르는 비용분석을 통하여 유행상품에 대한 할인가격정책을 연구하였다.

이상 많은 연구가 일반소비재 또는 제품수명이 비교적 짧은 유행상품을 대상으로 하였으며 Kalish(1983)는 내구재의 가격정책을 제품수명 전 기간에 대해서 언급하고 있다. 한편 제품판매량의 가격의존도에 대하여는 가격에 대한 지수함수의 형태로 판매량이 결정되는 것으로 실험적으로 분석되었다(Narasimhan, 1984; Russel and Bolton, 1988). 금번 연구는 구체적인 비용항목인 내구재의 재고유지비가 할인가격정책에 어떻게 영향을 미치는가에 대해서 구체적으로 분석함으로써 계획기간중의 가격스케줄은 물론 판매량 등 각종 필요정보를 구하여 기업의 의사결정에 기여하고자 한다.

† 본 연구는 부산대학교 기성회 재원 학술 연구조성비에 의한 연구임.
본 연구는 부산대학교 기성회 재원 학술 연구조성비와 1999년도 두뇌한국21 사업 핵심분야에서 지원 받아 수행된 연구임.

2. 모형분석

2.1 모형의 가정

모형의 분석을 위한 가정은 아래와 같다.

① 재고처분을 위한 가격정책 시행기간은 일정계획기간 동안 실시한다.

② 재고처분 기간은 일반적으로 비교적 짧은 기간이므로 돈의 시간적 가치는 고려하지 않는다.

③ 계획 기간 후 판매되지 않고 남는 재고는 일정잔존가격으로 처분 가능하다.

④ 일정 시점의 판매함수(판매율)는 그 때까지의 누적판매량과 그 당시의 제품가격에 따른다.

2.2 목적함수 및 제한조건

판매로 인한 수입과 일정계획 기간까지 미판매량의 처분수입으로 구성되는 총수입 금액에서 재고 유지를 위한 비용을 뺀 순수익을 최대로 하고자 한다. 현재의 재고량 생산비용은 이미 투입된 비용으로 가격정책 의사결정에는 아무런 영향을 미치지 않으므로 일정기간(T) 동안의 목적함수는 아래와 같이 표시된다.

$$\text{MAX } \pi = \int_0^T p(t)s\{x(t),p(t)\}dt - \left[I_0h(0) - \int_0^T h(t)s\{x(t),p(t)\}dt\right] + C_e\left[I_0 - \int_0^T s\{x(t),p(t)\}dt\right] \quad (1)$$

$p(t)$: t 시점의 판매가격

$h(t)$: t 시점에서 계획기간 만료시점(T)까지의 제품 단위당 재고 유지비용(그림 1참조) 단위기간 동안 제품 단위당 재고유지비용이 일정하다고 가정하면 $h(t) = (T-t)h$ 로 표시된다(h : 단위기간 동안 제품 단위당 재고유지비용).

C_e : 판매되지 않은 재고품의 처분가(양수인 경우는 처분으로 인한 수입이 발생되며 음수인 경우는 재고처분 비용이 발생됨을 의미한다)

$s\{x(t),p(t)\}$: 판매함수(판매율)로 t 시점까지의 누적 판매량 $x(t)$와 t 시점의 판매가격 $p(t)$의 함수로 표시된다.

I_0 : 현재의 재고량

위 식 (1)을 다시 정리하면 아래와 같다.

$$\text{MAX } \pi = \int_0^T \{p(t)+h(t)-Ce\}s\{x(t),p(t)\}dt - I_0h(0) + CeI_0 \quad (2)$$

누적 판매량과 판매함수와의 관계는 아래와 같으며,

$$x(t)' = s\{x(t),p(t)\} \quad (3)$$

T 기간 동안의 판매량을 현재의 재고량 I_0 보다 클 수는 없으므로 다음의 조건을 만족시켜야 한다.

$$I_0 \geq x(T) = \int_0^T s\{x(t),p(t)\}dt \quad (4)$$

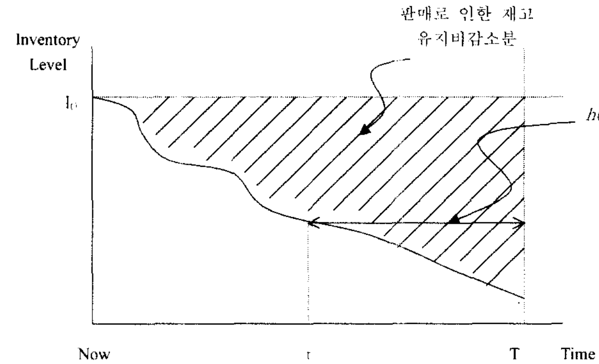


그림 1. 재고유지비 감소분과 $h(t)$.

2.3 최적 가격정책

$\lambda(t)$를 식 (3)에 대한 Lagrangean multiplier라고 하여, Hamiltonian H를 다음과 같이 정의한다.

$$H(p(t),x(t),\lambda(t)) = \{p(t)+h(t)-C_e+\lambda(t)\}s(x,p)$$

최적 가격정책에 대한 1차 필요 조건을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = s_x\{p(t)+h(t)-C_e+\lambda(t)\} = -\lambda'(t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \{p(t)+h(t)-C_e+\lambda(t)\}s_p + s = 0$$

$$\lambda(T)(I_0 - x(T)) = 0 \quad (7)$$

(s_x, s_p는 $s=s\{x(t),p(t)\}$의 x와 p에 대한 편미분을 나타낸다.)

식 (6)으로부터 $p(t)+h(t)-C_e+\lambda(t) = -\frac{s}{s_p}$ 이므로, $p(t)$는 아래와 같다.

$$p(t) = C_e - h(t) - \lambda(t) - \frac{s}{s_p} \quad (8)$$

식 (8)을 식 (5)에 대입하여 정리하면 아래의 관계식을 구할 수 있다.

$$\lambda'(t) = \frac{s \cdot s_x}{s_p} \quad (9)$$

식 (7)은 $\lambda(t)$와 $I_0 \geq x(T)$의 Complementary Slackness 조건으로서, $I_0 > x(T)$인 경우는 $\lambda(T)=0$가 성립되며, $I_0 = x(T)$인 경우는 $\lambda(T)\neq 0$이 됨을 의미한다. 생산 중단된 제품은 계획 판매기간 동안 미판매시 처분가가 생산원가에도 못 미치거나 일정비용을 들여 폐기 처분하는 경우도 있으므로 재고품을 계획기간 동안 전량 판매하도록 가격정책을 정하도록 한다면 $I_0 = x(T)$로 하는 제약조건을 생각할 수도 있다.

식 (9)와 $\lambda(T)=\theta$를 만족시키는 $\lambda(T)$를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda'(t) = \int_t^T \left(-\frac{s \cdot s_x}{s_p}\right)d\tau + \theta = \int_t^T \frac{1}{\eta} s_x p d\tau + \theta \quad (\theta \geq 0) \tag{10}$$

(주: 수요의 가격에 대한 탄력성을 $\eta = \frac{-ds}{s} / \frac{dp}{p}$라고 하면, $p(t) = \frac{\eta}{\eta - 1}\{C_e - h(t) - \lambda(t)\}$로 쓸 수 있으며 $\lambda'(t) = -\frac{1}{\eta} s_x p$로 정리된다.)

2.4 분리가능 판매함수

일반적인 판매함수에 대해서 위의 분석이 사용가능하나 마케팅분야에서 널리 사용되는 분리가능 판매함수인 $s\{x(t), p(t)\} = f(x(t))e^{-\gamma p(t)}$(Kalish(1983))의 경우에 대해서 최적 가격정책을 구해 보도록 한다. 먼저 $\lambda(t)$를 구한다.

$$\lambda' = \frac{f' e^{-\gamma p}}{(-\gamma)} = \frac{f'}{f} \frac{fe^{-\gamma p}}{(-\gamma)} = \frac{f'}{f} \frac{s}{(-\gamma)} = \frac{f'}{f} \frac{x'}{(-\gamma)} = \frac{-1}{\gamma} \frac{d(\ln f)}{dt} \tag{11}$$

그러므로,

$$\lambda(t) = \int_t^T \frac{d(\ln f)}{dt} \frac{1}{\gamma} dt + \theta = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{f(x(T))}{f(x(t))} + \theta \tag{12}$$

식 (12)를 식 (8)에 대입하면

$$p(t) = C_e - h(t) - \frac{1}{\gamma}\{\ln f(x(T)) - \ln f(x(t))\} - \theta + \frac{1}{\gamma} \tag{13}$$

여기에서 $h(t) = (T-t)h$인 경우에는 위 식은 아래와 같이 정리된다.

$$p(t) = C_e - hT + \frac{1}{\gamma} + ht - \frac{1}{\gamma}(\ln f(x(T)) - \ln f(x(t))) - \theta \tag{14}$$

시간의 변화에 따르는 가격스케줄 $p(t)$의 형태를 알아보기 위하여 $p'(t)$의 부호를 구하여 이를 정리하면 <표 1>과 같다(부록 참조).

표 1. t의 범위에 따르는 $p(t)$의 형태

f'의 크기	$f'>0$	$f'<0$	
	t의 전 범위	$\gamma h > -f'e^{-\gamma p}$인 t의 범위	$\gamma h < -f'e^{-\gamma p}$인 t의 범위
$p(t)$의 형태	증가함수	증가함수	감소함수

t시점까지의 누적 판매량 $x(t) = \int_0^t s(x,p)d\tau = \int_0^t f(x)e^{-\gamma p}d\tau$에 위에서 구한 식 (14)를 대입하여 정리하면 다음의 식을 얻는다.

$$x(t) = \frac{f(x(T))}{\gamma h} e^{-\gamma A + \gamma\theta}(1 - e^{-\gamma ht}) \quad (\text{단, } A = C_e - hT + \frac{1}{\gamma}) \tag{15}$$

상기 식에서 $t=T$를 대입하면 $x(T) = \frac{f(x(T))}{\gamma h} e^{-\gamma A + \gamma\theta}(1-e^{-\gamma hT})$으로 표시되어, 두 식을 정리하면 $x(t) = \frac{x(T)(1-e^{-\gamma ht})}{(1-e^{-\gamma hT})}$를 구할 수 있다. $x(T) < I_0$인 경우는 $\theta = 0$이므로 $x(T)$를 먼저 구한 후 이로부터 $x(t)$와 $p(t)$를 구할 수 있다. $x(T) = I_0$인 경우에는 $\theta \neq 0$이므로 먼저 식 (15)의 t에 T를 대입하여 θ를 구한 후 식 (14)에 대입하면 $p(t)$를 구할 수 있다. 구해진 θ를 식 (15)에 대입하면 $x(t) = I_0 \frac{1-e^{-\gamma ht}}{1-e^{-\gamma hT}}$로 구해지는데 이 경우 $x(t)$는 함수 $f(x)$에 무관함을 보여준다.

상기의 최적 가격정책으로 얻어지는 이익은 계획기간말의 재고수준 조건이 *Tight*하지 않은 경우에는 현재의 판매가격으로부터 얻을 수 있는 이익보다 큰 것이 분명하나 계획기간 동안 초기 재고를 모두 처분하고자 하는 조건이 주어진 경우에는 새로운 가격에 의한 이익이 반드시 현재의 판매 가격유지로부터 얻어지는 이익보다 크다고 말할 수 없다. 이러한 경우 총 이익의 크기를 비교함으로써 새로운 가격정책의 타당성을 결정하여야 할 것이다.

2.5 누적 판매량에 따라 판매 잠재력이 감소하는 분리가능 함수

상기 분리가능 판매함수에서 $f(x)$의 형태를 $(N-\alpha x)$로

가정하자. 내구재의 재고품에 대한 잠재력은 누적판매량에 따라 감소하는 것이 일반적인 경향으로 α는 시간경과에 따르는 시장잠재력 감소정도를 나타낸다 ($\alpha \geq 0$).

계획기간 동안 반드시 재고품을 전부 소화시켜야 되는 조건은 극히 제한적이므로 이러한 조건을 배제한 경우를 다루기로 한다. 즉 $\lambda(T)=0$인 경우에 대해서만 분석하기로 한다.

$p(t)$를 구하기 위하여 계획기간 동안 총판매량 $x(T)$를 구하면 식 (15)에 의하여 아래와 같다.

$$x(T)=\frac{N(1-e^{-\gamma hT})}{\alpha(1-e^{-\gamma hT})+\gamma he^{\gamma A}}$$
$$\left(\text{단,}\quad A=C_e-hT+\frac{1}{\gamma}\right) \tag{16}$$

t 시점까지의 누적판매량은 다음과 같다.

$$x(t)=\frac{x(T)(1-e^{-\gamma ht})}{(1-e^{-\gamma hT})}=\frac{N(1-e^{-\gamma ht})}{\alpha(1-e^{-\gamma hT})+\gamma he^{\gamma A}} \tag{17}$$

식 (16)을 식 (14)에 대입하여 정리하면 $p(t)$는 다음과 같다.

$$p(t)=C_e-hT+\frac{1}{\gamma}+ht-\frac{1}{\gamma}\ln\left\{\frac{\gamma he^{\gamma A}}{\gamma he^{\gamma A}+\alpha(e^{-\gamma ht}-e^{-\gamma hT})}\right\} \tag{18}$$

여기에서 $\alpha=0$인 경우에는 판매함수가 가격에만 영향을 받는 판매함수를 나타내며 $p(t)=C_e-hT+\frac{1}{\gamma}+ht$ 으로 기울기를 단위제품의 단위기간 재고유지비로 하는 직선을 나타낸다. 식 (17)에서 $t=T$일 때의 가격은 $p(T)=C_e+\frac{1}{\gamma}$으로 나타내어 결국 식 (18)에 의한 가격스케줄은 α에 영향을 받으나 계획기간 만료시점에서는 시장잠재력 감소정도에 무관하게 모두 동일한 가격이 됨을 알 수 있다.

$p(t)$의 형태를 알아보기 위하여 <표 1>의 결과를 이용하면

$h>\frac{\alpha}{\gamma}e^{-\gamma p(t)}$ 인 범위에서 $p(t)$는 증가함수이며

$h<\frac{\alpha}{\gamma}e^{-\gamma p(t)}$ 인 범위에서 $p(t)$는 감소함수이며

$h=\frac{\alpha}{\gamma}e^{-\gamma p(t)}$ 인 시점에서 $p(t)$는 구간최대 또는 최소 가격을 나타낸다.

시장잠재력 감소정도를 나타내는 α의 변화에 따르는 가격스케줄을 알아보기로 한다. 이미 $\alpha=0$인 경우 $p(t)$는 기울기를 h로 하는 직선임을 알았다. 식 (17)로부터 $p(t)$가 계획기간 동안 일정한 값을 갖도록 하는 α를 구하면 $p(0)=C_e-hT+\frac{1}{\gamma}+hT$ 로부터 $\alpha^*=\gamma he^{\gamma(A+hT)}$을 얻는다. 그러므로 α의 변화에 따르는 가격스케줄의 모양은 <그림 2>와 같다(부록 참조).

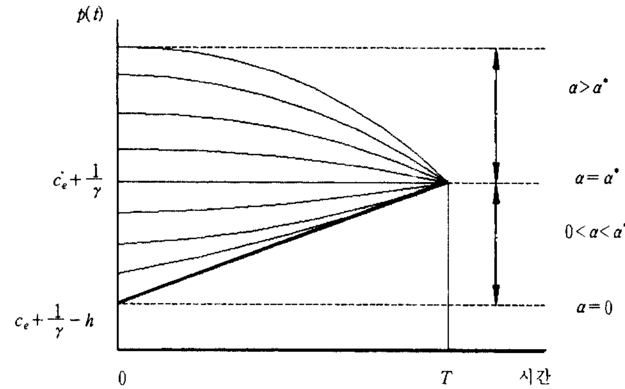


그림 2. α의 변화에 따르는 $p(t)$의 형태.

$\alpha>\alpha^*$인 판매함수에 대해서 $h<\frac{\alpha}{\gamma}e^{-\gamma p(t)}$가 성립하는데 $\frac{\alpha}{\gamma}e^{-\gamma p(t)}=\lambda'$이므로 $h<\lambda'$인 경우에 해당된다. 다시 말하면 한단위 판매증가에 따르는 이익의 증가율이 단위당 재고유지비용보다 큰 경우에는 가격스케줄은 단조 감소함수의 형태를 취하고 반대의 경우에는 단조 증가함수의 형태를 취함을 알 수 있다.

α는 재고품의 판매잠재력의 감소정도를 나타내는 것으로 그 정도가 클수록 즉 신규제품 출현이나 타사의 대체가능 제품의 존재로 인한 시장 잠식 정도가 심한 경우일수록 초기에 높은 가격을 책정한 후 서서히 떨어뜨리는 것이 유리하나 판매잠재력의 감소 정도가 작을수록 초기의 낮은 가격정책 후 서서히 가격을 올리는 것이 유리하다. 어떠한 경우에든 계획기간 만료시의 가격은 $C_e+\frac{1}{\gamma}$로 동일하며 이 가격은 미판매제품의 처분가 C_e보다 $\frac{1}{\gamma}$만큼 큰 것을 알 수 있다. 이 최종가격은 판매잠재력과는 무관하며 판매잠재력 감소정도 α는 가격스케줄의 전 구간에 영향을 미치나 초기 잠재력 N은 가격정책에 아무런 영향을 미치지 않고 단지 누적 판매량에 영향을 미치는 것을 볼 수 있다.

가격스케줄을 누적판매량에 따른 함수로 표시하여 보면 아래와 같다. (부록참조)

$$p(x)=C_e-hT+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{\gamma he^{\gamma A}x}{N-\alpha x}\right)$$
$$+\frac{1}{\gamma}\ln\left\{1+\alpha\left(\frac{x_\alpha(T)}{N-\alpha x_\alpha(T)}-\frac{x}{N-\alpha x}\right)\right\} \tag{19}$$

(주 : $x_\alpha(T)$는 특정 α를 적용했을 때의 $x(T)$값을 의미한다)

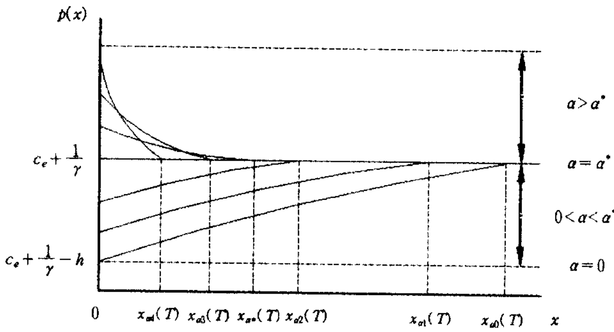
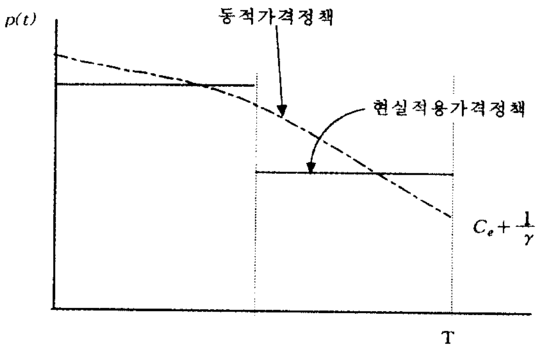
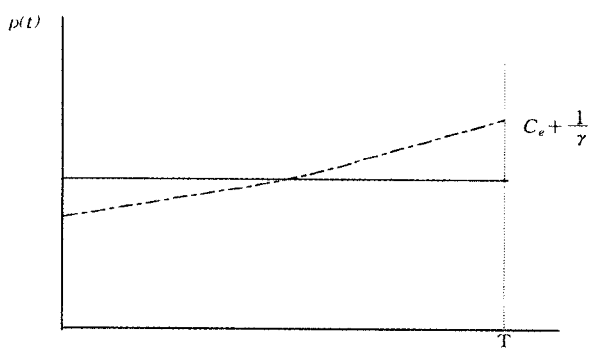


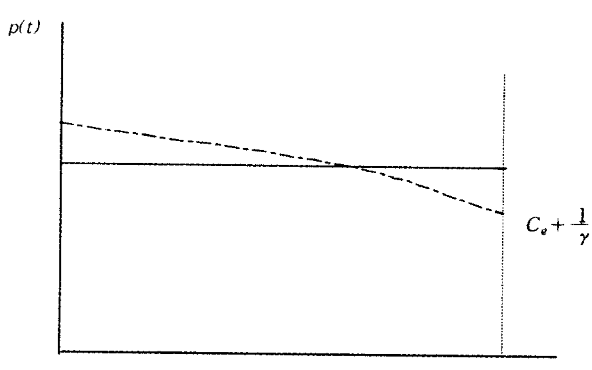
그림 3. α 의 변화에 따르는 $p(x)$의 형태.



(a) 다단계 할인가격정책



(Case 1)



(Case 2)

(b) 단일 할인가격정책

그림 4. 동적가격정책의 현실적용방안.

α의 변화에 대한 누적판매량에 따른 가격스케줄 모양은 <그림 3>와 같다. 수요잠재력 감소 정도(α)가 작을수록 총판매량은 커지며 판매가격은 낮게 책정가능하며 α가 증가할수록 총판매량은 감소하며 판매가격은 점점 높게 책정됨을 알 수 있다.

일반적으로 동적가격정책을 그대로 현실에 적용하기는 어려움이 많으며 또한 본 모형에서 수요잠재력 감소정도가 적을 때 판매가격이 점차 증가하게 되는 것을 볼 수 있는데 이러한 경우는 현실성이 없다고 할 수 있다. 그러나 이론적 모형으로부터 구해진 동적가격정책을 현실적용하기 위해서 구해진 동적가격정책을 적절한 단계함수의 형태로 나타낸다면 반드시 최적의 가격정책은 아닐지라도 현실성 있게 적용가능할 것이다. 즉 할인된 단일가격정책 또는 다단계 가격정책을 적용하는 것이다<그림 4>.

3. 결 론

이상 생산 중단된 내구재 특히 재고유지비가 무시할 수 없을 정도인 경우의 재고정리를 위한 가격할인정책에 대해서 모형을 분석하였다. 분리가능함수 특히 판매잠재력이 누적판매량에 따라 일정하게 감소하는 경우의 최적 가격스케줄 및 계획 판매기간 동안의 누적판매량을 구한 결과 판매잠재력의 감소정도가 크면 클수록 계획기간 초에 높은 가격을 책정한 후 서서히 가격을 인상해 가는 것이 유리함을 보였다. 한편 누적판매량은 잠재력감소 정도가 클수록 적어지고 잠재력감소가 작을수록 누적판매량은 증가함을 알 수 있다. 또한 한 단위 판매증가에 따르는 이익의 증가율이 단위당 재고유지 비율보다 큰 경우에는 가격스케줄은 단조 감소함수의 형태를 나타내고 그 반대의 경우에는 단조 증가함수의 형태를 나타냈다. 한편 재고유지비가 작은 경우에는 계획기간 초의 가격과 기간 말의 가격의 차이가 적게 되고 재고유지비가 큰 경우에는 그 차이가 크게 나타난다.

금번 연구는 분리가능 판매함수의 경우에 대해서 분석하였는데 실제로 응용시 판매함수의 유효성 검증 및 각종 파라미터의 추정이 요구되나 본 연구에서는 이 부분은 다루지 않았다. 재고유지비에 포함되는 투자비용의 기회비용만 고려하였으나 내구재의 재고품 처분기간이 유행상품보다는 상대적으로 길어 돈의 시간적 가치를 고려한 모형의 확장도 가능할 것이다. 일반적으로 계획기간 동안 가격스케줄은 계속 변화시키며 판매하기가 어려운 경우 실무편의상 적당한 단일가격 또는 두세 단계의 가격을 책정할 수도 있을 것이다. 또한 본 연구에서는 판매함수가 가격과 누적할인판매량의 함수로 가정하였으나 실제로 판매함수에 영향을 미치는 또 다른 요소 예를 들

면 정상판매가격과 할인판매가격과의 차이를 고려한 새로운 판매함수에 대한 분석도 앞으로의 연구과제로 흥미있을 것이다.

참고문헌

Bitran, G. R., and Modschein, S. V. (1997), Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing, *Management Sci.*, 43(1), 64-79.

Dhebar, A. and Oren, S. (1985), Optimal Dynamic Pricing for Expanding Networks, *Marketing Sci.*, 4(4), 336-351.

Feng, Y. and Gallego, G. (1995), Optimal Starting Times for End-of-Season Sales and Optimal Stopping Times for Promotional Fares, *Management Sci.*, 41(8), 1371-1391.

Gallego, G. and Garrett van Ryzin (1994), Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand, *Management Sci.*, 40(8), 999-1020.

Kalish, S. (1983), Monopolistic Procing with Dynamic Demand and Production Cost, *Marketing Sci.*, 2(2), 135-159.

Narasimhan, C. (1984), A Price Discrimination Theory of Coupons, *Marketing Sci.*, 3(2), 128-147.

Russell, G. J., and Bolton, R. N. (1988), Implications of Market Structure for Elasticity Structure, *J. Marketing Res.*, 25(3), 229-241.

Smith, S. A. (1998), Dale Achabal, Clearance Pricing and Inventory Policies for Retail Chains, *Management Sci*, 44(3), 285-300.

부 록

1. 가격스케줄 $p(t)$의 형태

목적함수를 최대로 하기 위한 가격스케줄을 구하는 문제이므로 $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \le 0$ 이 성립한다. 즉 $s_p + s_{pp}(p + h - C_e + \lambda) + s_p \le 0$이므로 $2s_p + s_{pp}\left(-\frac{s}{s_p}\right) \le 0$이며 이것을 다시 쓰면 $s_p\left(2 - \frac{s_{pp}\cdot s}{(s_p)^2}\right) \le 0$ 이다.

또한 $s_p = f(x)\frac{e^{-\gamma p}}{-\gamma} \le 0$이므로 $2 - \frac{s_{pp}\cdot s}{(s_p)^2} \ge 0$이 성립된다.

λ'는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\lambda' = \frac{s\cdot s_x}{s_p} &= -h'(t) - p'(t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{s_p}\right)\\ &= -h'(t) - p'(t) - p'(t)\left(1 - \frac{s\cdot s_{pp}}{(s_p)^2}\right)\\ &= -h'(t) - p'(t)\left(2 - \frac{s\cdot s_{pp}}{(s_p)^2}\right)\end{aligned}$$

그러므로, 아래 식이 성립한다.

$$p'(t)\left(2 - \frac{s\cdot s_{pp}}{(s_p)^2}\right) = -h'(t) - \lambda' = -h'(t) - \frac{s\cdot s_x}{s_p}$$

그런데 $2 - \frac{s\cdot s_{pp}}{(s_p)^2}$의 부호가 비음이므로 $p'(t)$의 부호는 $\left(-h'(t) - \frac{s\cdot s_x}{s_p}\right)$의 부호에 따라 결정된다.

$-h'(t) - \frac{s\cdot s_x}{s_p} = h + \frac{f'e^{-\gamma p}}{\gamma}$에서 $h \ge 0$, $\gamma \ge 0$, $e^{-\gamma p} \ge 0$이므로, 결국 f'의 크기에 따라 $p(t)$는 증가 또는 감소함수가 된다. 다시 말하면 $h + \frac{f'e^{-\gamma p}}{\gamma} > 0$을 만족시키는 t의 범위에서는 $p(t)$는 증가함수이며 $h + \frac{f'e^{-\gamma p}}{\gamma} < 0$를 만족시키는 t의 범위에서 $p(t)$는 감소함수이다.

식 (14)를 t에 대해서 미분하면 $p'(t) = h + \frac{1}{\gamma}\frac{1}{f(x)}\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = h + \frac{f'e^{-\gamma p}}{\gamma}$이므로 위의 결과와 동일한 결과를 얻는다.

(주 : $2 - \frac{s\cdot s_{pp}}{(s_p)^2} \ge 0$이므로 동일한 결과를 나타냄)

2. 함수 $p(t)$의 단조성 판정

$0 < \alpha < \alpha^*$의 범위에서의 $p(t)$의 단조증가를 보이기 위하여 $p'(0) > 0$, $p'(T) > 0$를 증명하고, $\alpha^* < \alpha$인 경우에는 $p(t)$의 단조감소를 보이기 위하여 $p'(0) < 0$, $p'(T) < 0$를 증명하도록 한다.

$0 < \alpha < \alpha^*$의 범위에서는 $h > \frac{\alpha}{\gamma}e^{-\gamma p(0)}$와 $h > \frac{\alpha}{\gamma}e^{-\gamma p(T)}$를 보이면 된다.

먼저 $h > \frac{\alpha}{\gamma}e^{-\gamma p(0)}$을 보이기 위하여

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\gamma h}{\alpha}\right) &> -\gamma p(0)\\ &= \gamma\left[A - \frac{1}{\gamma}\ln\left\{\frac{\gamma h e^{\gamma A}}{\gamma h e^{\gamma A} + \alpha(1 - e^{-\gamma h T})}\right\}\right]\\ &= -\gamma A + \ln\left\{\frac{\gamma h e^{\gamma A}}{\gamma h e^{\gamma A} + \alpha(1 - e^{-\gamma h T})}\right\}\\ &= \ln \gamma h - \ln\{\gamma h e^{\gamma A} + \alpha(1 - e^{-\gamma h T})\}\end{aligned}$$

를 보이면 된다

$\ln\left(\frac{\gamma h}{\alpha}\right) - \ln \gamma h + \ln\{\gamma h e^{\gamma A} + \alpha(1 - e^{-\gamma h T})\} = -\ln \alpha + \ln(\gamma h e^{\gamma A} + \alpha - e^{-\gamma h T}) > 0$이어야 하며 이것은 결국 $\gamma h e^{\gamma A} > \alpha e^{-\gamma h T}$임을 보여야 한다.

$$\ln(\gamma h e^{\gamma A}) - \ln(\alpha e^{-\gamma h T}) = \gamma C_e + 1 + \ln(\gamma h) - \ln \alpha > \gamma C_e + 1 + \ln(\gamma h) - \ln \alpha^* = 0$$

그러므로 $p'(0) > 0$이 성립된다.

$h > \frac{\alpha}{\gamma} e^{-\gamma p(T)}$을 보이기 위하여 $\ln(\frac{\gamma h}{\alpha}) > -\gamma p(T)$ $= -\gamma(A + hT)$임을 보이면 된다.

$\ln(\gamma h) - \ln\alpha + \gamma(A + hT) > \ln(\gamma h) - \ln\alpha^* + \gamma(A + hT) = 0$이므로 $p'(T) > 0$이 성립된다. 같은 방법으로 $\alpha^* < \alpha$ 인 경우에는 $p'(0) < 0$, $p'(T) < 0$임을 보일 수 있다.

보다 구체적으로 $p(t)$의 모양을 알기 위하여 $p''(t)$를 구해보면

$$p''(t) = \frac{\gamma\alpha h^2 e^{-\gamma ht}(\gamma h e^{\gamma A} - \alpha e^{-\gamma hT})}{\{\gamma h e^{\gamma hA} + \alpha(e^{-\gamma ht} - e^{\gamma hT})\}^2}$$ 이므로

$p''(t)$의 부호는 $(\gamma h e^{\gamma A} - \alpha e^{-\gamma hT})$의 부호에 따른다.

그런데 $0 < \alpha < \alpha^*$의 범위에서 $\gamma h e^{\gamma A} - \alpha e^{-\gamma hT} > 0$ 이므로 $p'' > 0$ 이다.

$\alpha > \alpha^*$의 범위에서는 $p'' < 0$ 이다.

3. 함수 $p(x)$의 유도

식 (17)에서 $x(t) = x$라 하고 $\gamma h e^{\gamma A} = k$라고 표시하여 정리하면 $x = \frac{N(1 - e^{-\gamma ht})}{\alpha(1 - e^{-\gamma hT}) + k}$ 이며 $e^{-\gamma ht} = 1 - \frac{x}{N}\{\alpha(1 - e^{-\gamma hT}) + k\}$으로부터 t에 대해서 정리하면 아래의 식을 얻는다.

$$t = \frac{1}{\gamma h} \ln\left[\frac{N}{N - x\{\alpha(1 - e^{-\gamma hT}) + k\}}\right] \qquad \text{(A-1)}$$

식 (16)에서 $1 - e^{-\gamma hT}$를 $x(T)$의 함수로 구하면 아래와 같다.

$$e^{-\gamma hT} = \frac{kx(T)}{N - \alpha x(T)} \qquad \text{(A-2)}$$

식 (A-1)과 식 (A-2)를 식 (18)에 대입하여 정리하면 아래의 $p(x)$를 얻는다.

$$p(x) = A - \frac{1}{\gamma} \ln\left(1 - \frac{kx}{N - \alpha x}\right) + \frac{1}{\gamma} \ln\left\{1 + \alpha\left(\frac{x(T)}{N - \alpha x(T)} - \frac{x}{N - \alpha x}\right)\right\}$$

$\alpha = 0$인 경우 $p(x) = A - \frac{1}{\gamma} \ln\left(1 - \frac{kx}{N}\right)$, $p'(x) = \frac{k}{\gamma(N - kx)}$, $p''(x) = \frac{-k^2}{\gamma(N - kx)^2}$ 으로 $p'(x) = Ne^{-\gamma hT} > 0$이며 $p''(x) < 0$이다.