Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 26, No. 2, pp. 128-135, June 2000.

Consecutive k-out-of-n:F 시스템의 경제적 설계†

윤원영 · 김귀래

부산대학교 산업공학과

Economic design of consecutive k-out-of-n:F system

Won-Young Yun · Gue-Rae Kim

This paper considers a consecutive k-out-of-n:F system when the failure of a component in the system induces higher failure rate of the preceding survivor. The reliability, mean time to failure(MTTF), and average failure number of a consecutive k-out-of-n:F system are obtained, when the failure of a component increases the failure rate of the survivor which is working just before the failed component. Then the optimal number of consecutive failed components to minimize this long run average cost rate can be obtained. An example is considered to calculate the reliability, MTTF and average failure number of the system. And two procedures that find the optimal number of consecutive failed components are studied. Then, various cases of system parameters are also studied.

1. 서 론

지난 70년대 후반부터 Consecutive k-out-of-n:F 시스템이라고 하는 특정 시스템에 대해 많은 관심이 집중되어 왔다. 이 시스템은 작동과 고장의 두 가지 상태를 가지는 n개의 부품들로 이루어져 있으며, k개의 부품이 연속해서 고장나면 시스템이 고장나게 된다. 이때 k가 1이면 직렬 시스템이 되고, k가 n이면 병렬 시스템이 된다. 대표적인 예로 파이프라인 네트워크, 통신 네트워크, 거리 가로등 시스템 그리고 마이크로 웨이브 타워 등을 들 수 있다.

Kontoleon(1978)이 Consecutive k-out-of-n : F 시스템을 처음으로 제안한 이후 이 시스템의 신뢰도 계산 문제와 시스템 설계 문제에 관한 많은 연구들이 수행되었다. 이러한 연구들의 대부분은 각 구성 부품들의 고장이 서로 독립적이라는 가정을 하고 있다. 그러나 실제로 부품의 고장이 서로 종속적인 경우가 많으므로 이러한 경우에 대한 연구가 필요하다.

Consecutive k-out-of-n : F시스템에서 한 부품의 고장이 다른 부품들의 상태에 영향을 주는 상황을 고려한 몇 가지 논문이 있다. Fu와 Hu(1987), Fu(1986)는 한 부품의 고장이 $k-1$개의 직전의 부품 상태에 의존하는 경우에 마코브 체인(Markov chain)을 이용하여 정적 시스템 신뢰도를 계산하였다. 그리고 Papastavridis와 Lambiris(1987)는 한 부품의 고장 확률이 바로 앞의 부품 상태(고장,작동)에만 의존하는 경우에 대한 연구로 확장하였다. Boland, Proschan과 Tong(1990)은 작동중인 한 부품의 상태(고장, 작동)가 일정한 확률로서 그 직전의 부품 상태와 같고 나머지 확률로서 독립적인 상태를 가지는 상황을 고려하여 시스템 신뢰도를 계산하였다. Shanthikumar(1985)은 모든 작동중인 부품들이 시간에 따라 변하는 부하를 똑같이 분담하며,각 부품의 고장률은 분담하는 부하량에 비례하는 상황을 고려하여 시스템 고장 시간에 대한 분포를 구하고 최소수리가 시스템 수명에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 그리고 이종 부품으로 구성된 시스템에 대한 연구는 Kossow와 Preuss(1989)에 의해 수행되었다.

이 논문에서는 한 부품의 고장이 직전에 작동중인 부품의 고장률을 증가시킴으로써 부품의 고장이 서로 종속적인 상황을 고려한다. 이러한 상황의 대표적인 예는 n개의 동일한 펌프로 구성된 가스 공급 시스템이다. 이 시스템에서 한 펌프가 고장나면 앞에 있는 펌프는 더욱 먼 거리로 가스를 이송하여야 하므로 부하가 증대되며 늘어난 부하로 인하여 고장날 가능성은 더욱 커진다. 즉 한 부품의 고장은 그 부품의 바로 직전에 작동중인 부품의 고장률을 증가시킨다. 그러므로 이 논문에서는

† 이 논문은 1998년도 부산대학교 학술연구비조성비를 지원 받아 수행된 연구임.

한 부품의 고장이 직전에 작동중인 부품의 고장률을 증가시키는 경우 Consecutive k-out-of-n:F 시스템의 신뢰도와 기대 수명을 예측하고자 한다.

이러한 상황에서 어느 정도의 용량을 가지는 펌프를 사용할 것인가를 결정하는 것은 매우 중요한 문제이다. 펌프의 용량이 크면, 비록 전후의 몇 개의 펌프가 고장나더라도 가스를 이송할 수 있으므로 이 경우는 Consecutive k-out-of-n:F 시스템에서연속 고장수 k가 크게 된다. 만약 펌프가 다음 펌프까지만 가스를 이송할 수 있는 용량을 가지고 있다면 연속 고장수 k는 1이 된다. 용량이 큰 펌프를 사용하게 되면 연속 고장수 k가 큰 값을 가지게 되어 전후의 몇 개의 펌프가 고장나더라도 가스를 이송할 수 있으므로 시스템 신뢰도는 높아진다. 반면 개당 획득 비용이 높아져 운영비용과 초기 투자비용이 높아진다. 반대로, 용량이 적은 펌프를 사용하게 되면 k가 작은 값을 가지게 되어 개당 획득 비용은 적어지지만, 시스템 수명이 짧아져 자주 고장나게 된다. 그러므로 이러한 k값의 결정은 시스템 수명과 운영비용에 많은 영향을 끼친다.

이 논문에서는 한 부품의 고장이 그 부품의 직전에 작동중인 부품의 고장률을 증가시키는 Consecutive k-out-of-n:F 시스템에서 시스템 신뢰도 계산 문제와 시스템 설계－최소 연속 고장수 k 결정－문제에 관한 두 가지 연구를 수행하였다. 먼저 2장에서 시스템 신뢰도, 평균 수명과 평균 고장 개수를 예측하는 방법을 다룬다. 3장에서는 단위 시간당 기대 비용 모형을 제안하고, 제안된 단위 시간당 기대 비용을 최소로 하는 최적 최소 연속 고장수를 결정하는 절차를 설명한다. 또한 다양한 실험을 통하여 여러 모수들의 경향을 살펴본다. 마지막으로 4장에서는 결론을 다룬다.

2. 시스템 신뢰도

한 부품의 고장이 고장난 부품 바로 직전에 작동중인 부품의 고장률을 증가시키는 경우에 Consecutive k-out-of-n:F 시스템의 신뢰도 함수, 평균 수명, 평균 고장 개수를 구한다.

이 논문에서 사용할 기호와 가정은 다음과 같다.

[기호]

n : 시스템 구성 부품수
k: 시스템 고장을 일으키는 최소 연속 고장수
T_j: j경로가 완료된 시점
T : 시스템 고장 시간
$F_j(t)$: T_j의 분포 함수
$F(t)$: 시스템 고장 시간 T의 분포 함수
X_{ji}: j 경로에서 $i-1$번째 고장과 i 번째 고장 사이의 시간
$g_j(\cdot)$: X_{ji}의 확률 밀도 함수
λ_i: 연속해서 i개의 부품이 고장난 경우의 고장률
α_{ji} : j 경로에서 $i-1$번째 고장이 발생한 상태에서 $n-i+1$ 개의 모든 작동중인 부품들의 고장률의 합
β_{ji} : j 경로에서 i 번째 고장 부품의 고장률
π_j: j경로를 따라서 시스템이 고장날 확률
$R(t)$: 시스템 신뢰도, $1-F(t)$
$L(k)$: 시스템 평균 수명
N_j: j경로를 따라서 시스템이 고장난 경우의 고장난 부품수
$N(k)$: 시스템 고장 때 평균 고장 부품수
C_0: 시스템 교체 때 드는 고정 비용
C_1: 한 단위 부품 획득 때 드는 고정 비용
C_2: 한 단위 부품 획득 때 드는 용량에 대한 가변 비용
$\theta_1 : C_0 / C_1$
$\theta_2 : C_2 / C_1$
$C(k)$: 단위 시간당 기대 비용

[가정]

1. 시스템은 n개의 동일한 부품으로 구성되어 있다.
2. 부품의 고장률은 상수이다.
3. 한 부품의 고장률은 그 부품 뒤로 연속해서 고장난 부품의 개수에 의존한다.
4. 시스템 고장 때 고장난 부품만 즉시 교체한다.

2.1 시스템 신뢰도

시스템이 고장 나면 고장난 총 부품수는 k와 같거나 k보다 크다. 이 논문에서는 한 부품의 고장률이 그 부품의 뒤로 고장난 부품의 수에 의존하며, 한 시점에서의 시스템 신뢰도는 시스템 상태 즉 고장난 부품의 집합에 의존한다고 가정한다. 따라서 한 시점에서 고장 부품수와 고장 순서가 시스템 신뢰도에 영향을 미치므로 함께 고려되어야 한다.

시스템 신뢰도 계산을 위해 시스템이 고장나기까지의 경로를 고려하여 보자. T_j를 j경로 완료 시점 즉 j경로를 따라서 시스템 고장에 이르는 시간으로 정의한다. 그러면 시스템 고장 시간 T는 이러한 모든 랜덤변수 T_j들 중의 하나가 된다. 그러므로 T의 분포는 다음과 같이 T_j의 혼합 함수가 된다.

$$F(t) = \sum_j \pi_j F_j(t) \tag{1}$$

여기서 π_j는 시스템이 j 경로를 따라서 시스템 고장에 이르게 될 확률이며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi_j &= p(\text{시스템 고장 경로} = j) \\ &= \prod_{i=1}^{N_j} \frac{\beta_{jl}}{\alpha_{ji}} \end{aligned} \tag{2}$$

그리고 각 경로에서 한 부품의 고장에서 다음 고장까지의 시간은 그 때 작동중인 모든 부품들의 고장률의 합을 모수로 가지는 지수분포를 따른다. 즉, j경로에서 $i-1$번째 고장 이후 i번째 고장까지의 시간 X_{ji}는 모수가 α_{ji}인 지수분포를 따른다.

그러므로 j경로를 따라서 고장난 경우 총 고장 부품수가 N_j개라고 할 때 j경로 완료 시점의 분포 함수는 이러한 X_{ji}들의 회선(convolution)이며 다음과 같다.

$$F_j(t) = P(X_{j1} + X_{j2} + \cdots + X_{jN_j} \le t)$$
$$= \int_0^t \int_0^{t-x_{jN_j}} \cdots \int_0^{t-x_{jN_j}-\cdots-x_{j2}}$$
$$g_j(x_{j1})\,dx_{j1}\,g_j(x_{j2})\,dx_{j2}\cdot\cdot\, g_j(x_{jN_j})\,dx_{jN_j} \quad (3)$$

그러므로 시스템 신뢰도는 식 (1)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (4)$$

2.2 시스템 평균 수명과 평균 고장 개수

시스템 평균 수명은 식 (4)를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$L(k) = \int_0^\infty R(t)\,dt$$

그러나 모든 경로의 $F_j(t)$를 계산하여 신뢰도 함수를 계산하는 것은 쉽지 않다. 이러한 신뢰도 함수를 이용하지 않고 시스템 평균 수명을 계산할 수 있는 방법이 있다. 그것은 시스템 고장 분포를 계산하는 방법과 동일하게 각 T_j의 평균을 이용하여 다음과 같이 계산하는 것이다.

$$L(k) = E(T) = \sum_j \pi_j E(T_j) \quad (5)$$

여기서 T_j는 모수가 α_{ji}인 지수분포를 따르는 X_{ji}들의 합이므로 $E(T_j)$는 다음과 같다.

$$E(T_j) = \sum_{i=1}^{N_j} \frac{1}{\alpha_{ji}} \quad (6)$$

또한 j경로를 따라 시스템이 고장나는 경우의 고장 부품수가 N_j이므로 시스템 고장 때 평균 고장 부품수는 다음과 같다.

$$N(k) = \sum_j \pi_j N_j \quad (7)$$

2.3 Consecutive 2-out-of-3:F 시스템

이 절에서는 Consecutive 2-out-of-3:F 시스템의 신뢰도와 평균 수명, 그리고 평균 고장 개수를 구하는 절차를 소개한다.

모든 부품들의 초기 고장률은 λ_0이며, 연속적으로 한 개가 고장난 경우의 고장률은 $\lambda_1(\ge \lambda_0)$, 연속적으로 두 개가 고장난 경우의 고장률은 $\lambda_2(\ge \lambda_1)$이다.

작동중인 부품을 "1"로 표시하고 고장난 부품을 "0"으로 표시하여 시스템의 모든 고장 경로를 표시하면 <표 1>과 같다.

표 1. 시스템의 모든 고장 경로(시스템 상태 밑에 α_{ji} 표시)

j		β_{j1}		β_{j2}		β_{j3}	
1	(1,1,1) $3\lambda_0$	$\underline{\lambda_0}$	(0,1,1) $2\lambda_0$	$\underline{\lambda_0}$	(0,0,1)		
2	(1,1,1) $3\lambda_0$	$\underline{\lambda_0}$	(0,1,1) $2\lambda_0$	$\underline{\lambda_0}$	(0,1,0) λ_1	$\underline{\lambda_1}$	(0,0,0)
3	(1,1,1) $3\lambda_0$	$\underline{\lambda_0}$	(1,0,1) $\lambda_1+\lambda_0$	$\underline{\lambda_1}$	(0,0,1)		
4	(1,1,1) $3\lambda_0$	$\underline{\lambda_0}$	(1,0,1) $\lambda_1+\lambda_0$	$\underline{\lambda_0}$	(1,0,0)		
5	(1,1,1) $3\lambda_0$	$\underline{\lambda_0}$	(1,1,0) $\lambda_0+\lambda_1$	$\underline{\lambda_0}$	(0,1,0) λ_1	$\underline{\lambda_1}$	(0,0,0)
6	(1,1,1) $3\lambda_0$	$\underline{\lambda_0}$	(1,1,0) $\lambda_0+\lambda_1$	$\underline{\lambda_1}$	(1,0,0)		

각 경로에 대해서 확률 π_j를 식(2)에 따라 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{3\lambda_0}\cdot\frac{\lambda_0}{2\lambda_0} = \frac{1}{6}$$
$$\pi_2 = \frac{\lambda_0}{3\lambda_0}\cdot\frac{\lambda_0}{2\lambda_0}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1}{6}$$
$$\pi_3 = \frac{\lambda_0}{3\lambda_0}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_0} = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_0}\right)$$
$$\pi_4 = \frac{\lambda_0}{3\lambda_0}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0} = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}\right)$$
$$\pi_5 = \frac{\lambda_0}{3\lambda_0}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}\right)$$
$$\pi_6 = \frac{\lambda_0}{3\lambda_0}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_0} = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_0}\right)$$

그리고 각 확률변수 $T_1, \cdots, T_6$에 대해서 T_j의 분포는 지수분포의 회선식(Convolution)을 이용하면 다음과 같다.

$$F_1(t) = 1 + 2e^{-3\lambda_0 t} - 3e^{-2\lambda_0 t}$$
$$F_2(t) = 1 - \frac{6\lambda_0^2}{(\lambda_1 - 3\lambda_0)^2}e^{-\lambda_1 t} + \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 - 3\lambda_0}e^{-3\lambda_0 t} + \frac{3\lambda_1}{2\lambda_0 - \lambda_1}e^{-2\lambda_0 t}$$
$$F_3(t) = F_4(t) = F_6(t) = 1 - \frac{\lambda_0+\lambda_1}{\lambda_1 - 2\lambda_0}e^{-3\lambda_0 t} - \frac{3\lambda_0}{2\lambda_0 - \lambda_1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t}$$
$$F_5(t) = 1 - \frac{3\lambda_1}{\lambda_1 - 2\lambda_0}e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t} + \frac{3(\lambda_0+\lambda_1)}{\lambda_1 - 3\lambda_0}e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1(\lambda_0+\lambda_1)}{(\lambda_1 - 2\lambda_0)(\lambda_1 - 3\lambda_0)}e^{-3\lambda_0 t}$$

그러므로 Consecutive 2-out-of-3:F 시스템의 신뢰도와 평균 수

명은 다음과 같다.

$$R(t) = 1 - \sum_{j=1}^{6} \pi_j F_j(t)$$
$$= \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)e^{-2\lambda_0 t}}{2\lambda_0 - \lambda_1} + \frac{\lambda_0 e^{-\lambda_1 t}}{2\lambda_0 - \lambda_1} + \frac{\lambda_0 e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t}}{2\lambda_0 - \lambda_1} - \frac{\lambda_0 e^{-3\lambda_0 t}}{2\lambda_0 - \lambda_1}$$
$$L(2) = \int_0^{\infty} R(t)\,dt = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{\lambda_0} + \frac{3}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_0 + \lambda_1}\right)$$

평균 고장 개수를 구하기 위해 j경로를 따라 시스템이 고장난 경우의 부품 고장 개수 N_j를 <표 1>에서 살펴보면 다음과 같다.

$$N_1 = N_3 = N_4 = N_6 = 2$$
$$N_2 = N_5 = 3$$

그러므로 평균 고장 개수는

$$N(2) = \sum_{j=1}^{6} \pi_j N_j = \frac{5}{6} + \frac{5\lambda_0}{3(\lambda_0 + \lambda_1)} + \frac{4\lambda_1}{3(\lambda_0 + \lambda_1)}$$

이 된다.

3. 시스템 최적 설계

이 장에서는 Consecutive k-out-of-n:F 시스템에서 시스템 운영을 고려하여 시스템을 설계하고자 한다. 이 연구에서의 결정변수는 시스템의 고장시간에 가장 큰 영향을 미치는 최소 연속 고장수 k이다. 최적 k는 단위 시간당 기대 비용을 최소로 하는 k로 정의한다.

3.1 비용함수

최적 k를 결정하기 위하여 시스템 평균 수명과 평균 고장 부품수를 고려한 단위 시간당 기대 비용을 제안한다. Consecutive k-out-of-n:F 시스템이 고장나면 고장난 부품만 교체해 주는 경우에 단위 시간당 기대 비용은 다음과 같다.

$$C(k) = \frac{C_0 + N(k)(C_1 + C_2 k)}{L(k)} \tag{8}$$

여기서 단위 부품당 교체 비용은 한 단위 부품 획득 때 드는 고정 비용과 용량에 대한 가변 비용의 합으로 구성되며 이 연구에서는 k에 대한 선형함수로 가정한다.

최적 k를 결정하기 위하여 단위 시간당 기대 비용, 식 (8)을 최소로 하는 k를 찾아야 한다. 주어진 k에 대한 단위 시간당 기대 비용의 계산은 평균 수명, 식 (6)과 평균 고장 부품수, 식 (7)을 이용하여 간단히 할 수 있다. 그러므로 k를 1부터 구성 부품수 n까지 1씩 변화시켜 단위 시간당 기대 비용을 계산한 후 최소값을 찾음으로써 최적 k를 찾을 수 있다.

3.2 최적결정

이 절에서는 먼저 Consecutive k-out-of-3 : F 시스템에서 최적 k를 계산하는 절차를 소개하고 이를 일반화시켜 Consecutive k-out-of-n : F 시스템에서 최적 k를 계산하는 절차를 소개한다. 그리고 다양한 경우에 대한 실험을 통하여 모수에 대한 영향을 살펴본다.

3.2.1 Consecutive k-out-of-3 : F 시스템

i개의 부품이 연속해서 고장이 발생했을 때의 고장률 λ_i, $i = 0, 1, 2$는 2.3절에서와 동일하다. 이러한 경우에 대하여 최적 k는 1, 2, 3중의 하나가 된다. 그러므로 k가 각 1, 2, 3인 경우에 대하여 단위 시간당 기대 비용을 계산하여 최소가 되는 k를 찾으면 된다.

k가 2인 경우의 단위 시간당 비용은 2.3절에서 구한 시스템 평균 수명과 평균 고장 개수를 식 (8)에 적용하여 계산하면 다음과 같다.

$$C(2) = \frac{C_0 + N(2)(C_1 + 2C_2)}{L(2)} = \frac{\lambda_0\lambda_1(6C_0(\lambda_0 + \lambda_1) + (15\lambda_0 + 13\lambda_1)(C_1 + 2C_2))}{3\lambda_0^2 + 8\lambda_0\lambda_1 + 3\lambda_1^2}$$

k가 1과 3인 경우의 단위 시간당 기대 비용을 계산하는 데 필요한 시스템 평균 수명과 평균 고장 개수를 구하기 위한 모든 고장 경로는 <표 2>와 같다.

$k = 2$인 경우와 동일하게 $k = 1$인 경우와 $k = 3$인 경우의 단위 시간당 기대 비용을 계산할 수 있으며 결과는 다음과 같다.

$$C(1) = 3\lambda_0(C_0 + C_1 + C_2)$$
$$C(3) = \frac{6\lambda_0\lambda_1\lambda_2(C_0 + 3C_1 + 9C_2)}{2\lambda_0\lambda_1 + 3\lambda_0\lambda_2 + 6\lambda_1\lambda_2}$$

3.2.2 Consecutive k-out-of-n:F 시스템

최적 k를 결정하기 위해서는 단위 시간당 기대 비용을 계산하여야 하는데, 이를 위해서는 각 $k = 1, 2, \cdots, n$인 경우에 대해서 다음과 같은 단계를 거친다.

단계 0. $k = 0$.
단계 1. k를 1증가시킨다.

표 2. $k=1, k=3$인 경우의 모든 시스템 고장 경로
(시스템 상태 밑에 α_{ji} 표시)

k	j		β_{j1}		β_{j2}		β_{j3}	
1	1	(1,1,1) $3\lambda_0$	λ_0	(0,1,1)				
	2	(1,1,1) $3\lambda_0$	λ_0	(1,0,1)				
	3	(1,1,1) $3\lambda_0$	λ_0	(1,1,0)				
3	1	(1,1,1) $3\lambda_0$	λ_0	(0,1,1) $2\lambda_0$	λ_0	(0,0,1) λ_0	λ_0	(0,0,0)
	2	(1,1,1) $3\lambda_0$	λ_0	(0,1,1) $2\lambda_0$	λ_0	(0,1,0) λ_1	λ_1	(0,0,0)
	3	(1,1,1) $3\lambda_0$	λ_0	(1,0,1) $\lambda_1+\lambda_0$	λ_1	(0,0,1) λ_0	λ_0	(0,0,0)
	4	(1,1,1) $3\lambda_0$	λ_0	(1,0,1) $\lambda_1+\lambda_0$	λ_0	(1,0,0) λ_2	λ_2	(0,0,0)
	5	(1,1,1) $3\lambda_0$	λ_0	(1,1,0) $\lambda_0+\lambda_1$	λ_0	(0,1,0) λ_1	λ_1	(0,0,0)
	6	(1,1,1) $3\lambda_0$	λ_0	(1,1,0) $\lambda_0+\lambda_1$	λ_1	(1,0,0) λ_2	λ_2	(0,0,0)

단계 2. 주어진 k에 대하여 가능한 모든 경로를 찾는다.
단계 3. 각 경로에 대해서 α_{ji}, β_{ji}를 계산한다.
단계 4. 단계2에서 계산한 α_{ji}, β_{ji}를 이용하여 각 경로에 대해서 π_j를 계산한다.
단계 5. 각 경로에 대해서 식 (6)을 이용하여 각 경로의 평균 완료 시간 $E(T_j)$을 계산한다.
단계 6. 각 경로의 고장 개수 N_j를 계산한다.
단계 7. 식 (5)를 이용하여 시스템 평균 수명을 계산한다.
단계 8. 식 (7)을 이용하여 평균 고장 개수를 구한다.
단계 9. 식 (8)을 이용하여 단위 시간당 기대 비용을 구한다.
단계10. k가 n과 같으면 단위 시간당 기대 비용을 최소로 하는 k를 찾는다. 그렇지않으면 단계1로 간다.

위의 단계를 거쳐 최적 k를 구할 때, 가장 어려운 점은 모든 고장 경로를 찾는 것이다. 모든 고장 경로는 k가 1인 경우에 n개로서 가장 적다. 그러나 k가 $r(\leq n)$인 경우의 고려하여야 하는 경로의 수는 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$개 이상이 된다. 결국 k가 n인 경우에는 고려해야 할 고장 경로의 수가 $n!$에 이른다. 그러므로 최적 k를 찾는 데 있어서 찾아야 할 경로의 수를 줄이는 것과 경로를 체계적으로 찾는 것이 무엇보다도 중요하다.

그러므로 이 연구에서는 k가 1증가됨으로써 고려하여야 되는 경로를 찾는데 현재의－1증가되기 전의－ k에 대한 고장 경로를 이용함으로써 경로를 훨씬 체계적으로 찾는 절차를 제안하고자 한다. 이 절차의 기본 목적은 k에서 찾은 모든 고장 경로를 기억하여 두었다가 k를 1 증가 시켰을 때의 고장 경로를 찾는 데 이용함으로써 고장 경로를 찾는 시간과 노력을 줄이고자 하는 것이다. 그러므로 이 연구의 절차에 따르면 k가 $r(\leq n)$인 경우의 새로이 고려하여야 되는 경로의 수는 $n-r+1$개 이상만 된다. <그림 1>에 이러한 방법을 이용하여 최적 k를 찾는 절차를 자세히 소개하였다.

표 3. 최적 k

θ_1	θ_2	n=2	3	4	5	6	7	8	9
5	0.1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0.5	2	3	4	5	6	4	3	3
	1	2	3	4	3	3	3	2	2
	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	10	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0.1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0.5	2	3	4	5	6	7	8	5
	1	2	3	4	5	4	4	3	3
	2	2	3	3	3	3	2	2	2
	10	2	2	1	1	1	1	1	1

3.2.3 실험 및 분석

다양한 모수들의 경향을 살펴보기 위하여 <그림 1>에서 설명한 절차를 범용언어를 이용해 구현하여 실험하였다. 다양한 실험조건에서의 최적 k를 <표 3>에 나타내었다.

<표 3>에서 보면 θ_2가 커질수록 최적 k는 작아짐을 알 수 있다. 그것은 θ_2가 커짐으로써 단위당 교체 비용이 작아져 자주 교체하는 것이 효율적이기 때문이다.

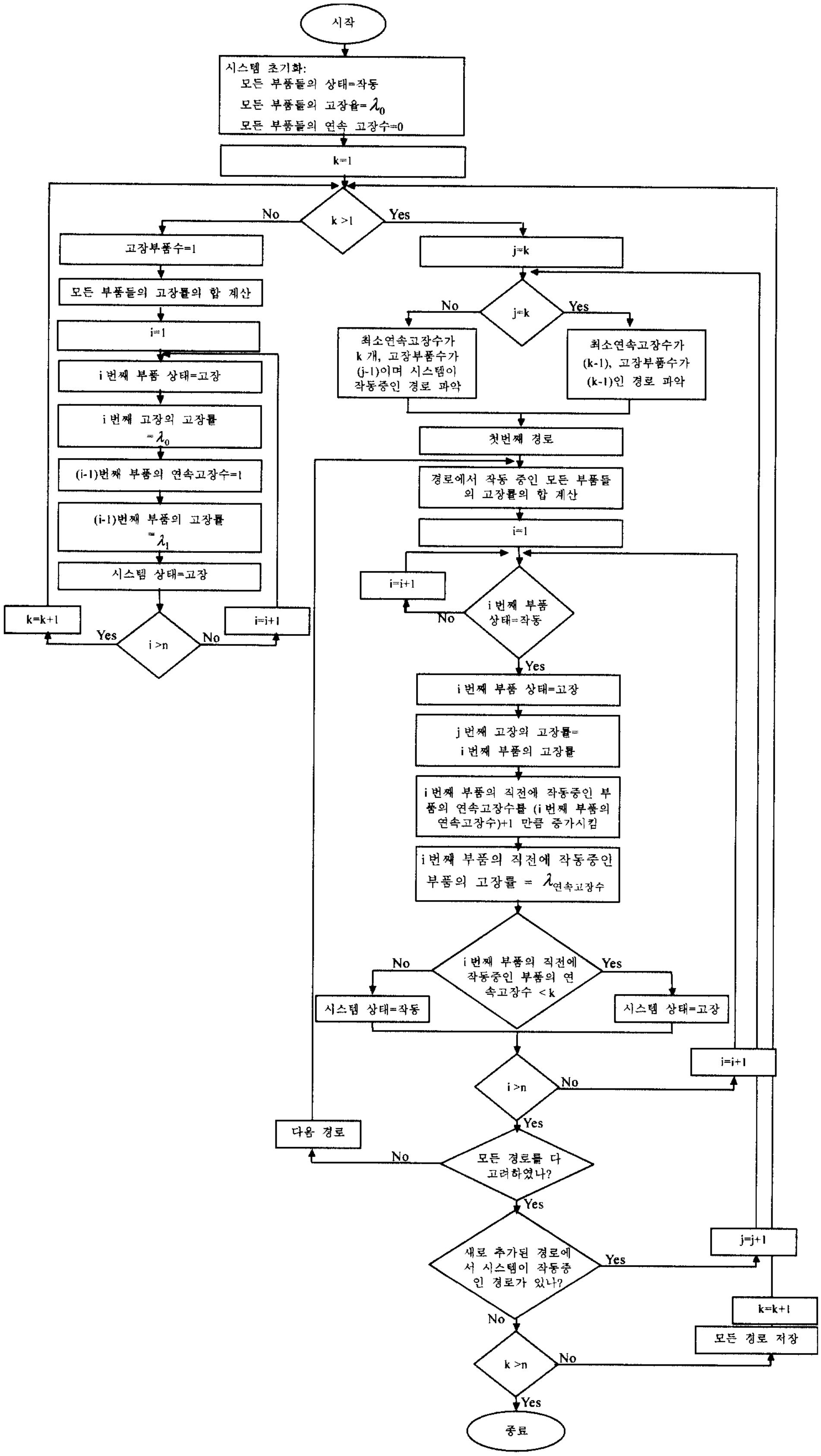
그리고 θ_1이 커질수록 최적 k 역시 커짐을 알 수 있다. 그것은 θ_1이 커지면 시스템 교체 때마다 고정 비용이 많이 들므로 가능하면 자주 교체하지 않는 것이 효율적이기 때문이다.

3.3 시뮬레이션

이 연구에서 단위 시간당 기대 비용은 <그림 1>과 같이 모든 고장 경로를 고려하여 계산한다. 그런데 고려해야 할 시스템 고장 경로의 개수가 최대 $n!$개이므로 n이 1커지면 고려해야 하는 경로의 수가 $(n+1)$배 증가하게 되어 계산량과 계산 시간이 문제된다. 그러므로 n이 매우 큰 대형 시스템인 경우 모든 가능한 시스템 고장 경로를 고려하여 단위 시간당 기대 비용을 계산하는 것은 매우 어려운 작업이다. 그러므로 구성 부품수가 큰 대형 시스템에 대해서는 단위 시간당 기대 비용을 비교적 쉽게 얻기 위한 시뮬레이션이 요구된다.

3.3.1 시뮬레이션

이 절에서는 구성 부품수 n이 큰 경우에 단위 시간당 기대 비용을 최소로 하는 k를 비교적 쉽게 얻기 위해서 몬테칼로(Monte Carlo) 시뮬레이션을 이용하는 방법을 소개하고자 한다.



시작
시스템 초기화:
모든 부품들의 상태=작동
모든 부품들의 고장율=λ_0
모든 부품들의 연속 고장수=0
k=1
k >1
No
Yes
고장부품수=1
모든 부품들의 고장률의 합 계산
i=1
i 번째 부품 상태=고장
i 번째 고장의 고장률 =λ_0
(i-1)번째 부품의 연속고장수=1
(i-1)번째 부품의 고장률 =λ_1
시스템 상태=고장
i >n
Yes
No
k=k+1
i=i+1
j=k
j=k
No
Yes
최소연속고장수가 k 개, 고장부품수가 (j-1)이며 시스템이 작동중인 경로 파악
최소연속고장수가 (k-1), 고장부품수가 (k-1)인 경로 파악
첫번째 경로
경로에서 작동 중인 모든 부품들의 고장률의 합 계산
i=1
i=i+1
i 번째 부품 상태=작동
No
Yes
i 번째 부품 상태=고장
j 번째 고장의 고장률= i 번째 부품의 고장률
i 번째 부품의 직전에 작동중인 부품의 연속고장수를 (i 번째 부품의 연속고장수)+1 만큼 증가시킴
i 번째 부품의 직전에 작동중인 부품의 고장률 = $\lambda_{연속고장수}$
i 번째 부품의 직전에 작동중인 부품의 연속고장수 <k
No
Yes
시스템 상태=작동
시스템 상태=고장
i >n
No
Yes
i=i+1
다음 경로
모든 경로를 다 고려하였나?
No
Yes
새로 추가된 경로에서 시스템이 작동중인 경로가 있나?
Yes
No
j=j+1
k >n
No
Yes
k=k+1
모든 경로 저장
종료

그림 1. 최적 k 결정 절차.

최적 k를 찾는 절차와는 달리 시뮬레이션에서는 각 부품의 고장시간을 난수에 의해 발생시킴으로써 실제 부품의 고장을 발생시킨다. 한 부품의 고장이 발생하게 되면 연속 고장수가 변경되는데, 그 값이 k보다 크거나 같게 되면 시스템의 고장이 발생되고 그때의 시스템 수명과 고장 부품수를 관측한다. 시뮬레이션 반복횟수만큼 반복 수행한 다음 시스템 수명과 고장 부품수의 평균을 계산하고 이를 이용하여 단위 시간당 기대 비용을 계산한다. 자세한 수행절차는 <그림 2>에 나타내었다.

3.3.2 실험 및 분석

이 연구에서는 <그림 2>의 수행절차를 범용언어를 이용하여 구현하였고, 다양한 상황에 대하여 실험하였다. 시뮬레이션 반복횟수는 10000번이며, 실험 결과는 <표 4>에 나타내었다.

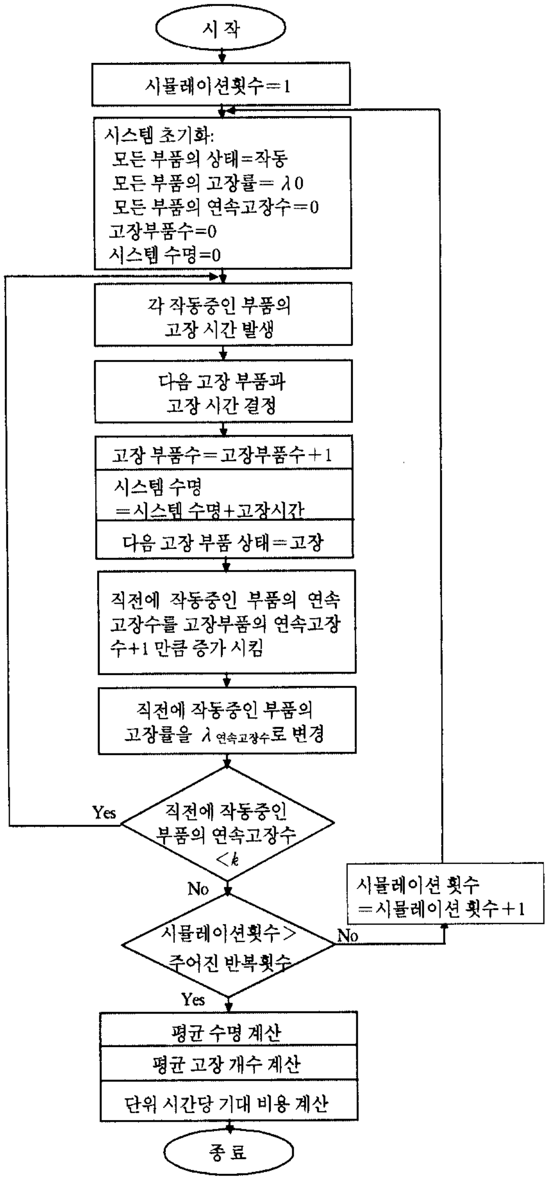


그림 2. 시뮬레이션 수행 절차.

표 4. 시뮬레이션으로 찾은 k

θ_1	θ_2	n			
		10	20	50	100
1	0.1	10	3	3	3
	0.5	2	2	2	2
	1	0	1	1	1
	2	0	1	1	1
	10	0	1	1	1
5	0.1	10	6	5	4
	0.5	3	3	2	2
	1	2	2	2	2
	2	2	2	2	2
	10	1	1	1	1
10	0.1	10	20	6	5
	0.5	4	3	3	3
	1	3	3	2	2
	2	2	2	2	2
	10	1	1	1	1
100	0.1	10	2-	14	12
	0.5	10	20	7	6
	1	10	7	5	4
	2	10	5	4	4
	10	3	3	2	2

<표 4>에서 고정된 n과 θ_1에 대해서, θ_2 값이 증가함에 따라 최적 k는 감소하였다. 단위당 교체 비용이 커지면 k를 작게 하여 한번에 많이 교체하는 것보다는 자주 교체하는 것이 유리함을 알 수 있다.

반면 주어진 n과 θ_2에 대해서 θ_1 값이 증가하면 최적 k는 증가한다. 그것은 시스템 고장 시 교체를 위한 고정 비용이 클수록 자주 교체하는 것보다 한번에 많이 교체하는 것이 더 이익이기 때문이다.

그리고 고정된 θ_1과 θ_2에 대하여 구성 부품수 n이 증가할수록 최적 k는 작아짐을 알 수 있다. 즉 구성 부품수가 많은 대형 시스템일수록 연속 고장수는 작게 하는 것이 유리하다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

이 논문에서는 구성 부품의 고장이 그 부품의 뒤로 연속해서 고장난 부품의 수에 의존하는 Consecutive k-out-of-n:F 시스템에 대하여 두 가지 연구를 수행하였다. 먼저 이러한 시스템에서 시스템 신뢰도, 시스템 평균 수명과 평균 고장 개수를 예측하는 방법을 제시하였다. 두 번째는 시스템 설계 때 최소 연속 고장수를 최적으로 결정하는 방법을 제시하였다.

시스템 신뢰도는 시스템 고장까지의 모든 경로를 찾아서 각

경로의 발생 확률을 계산하고 경로 완성 시간에 대한 분포를 지수 랜덤 변수의 회선식(convolution)으로 계산함으로써 얻을 수 있다. 또한 같은 방법으로 시스템 고장 때 평균 고장 부품수와 시스템 평균 수명을 계산하였다. 간단한 예제를 소개함으로써 계산 절차의 이해를 돕도록 하였다.

최소 연속 고장수의 최적은 단위 시간당 기대 비용을 최소로 하는 값으로 정의하고 단위 시간당 기대 비용 모형을 제시하였다. 그리고 최적 최소 연속 고장수를 효율적으로 찾는 절차를 소개하였다. 이 절차는 시스템의 모든 고장 경로를 파악하여 계산을 하게 되는데, 구성 부품수가 많은 대형 시스템에서는 시스템의 모든 고장 경로를 파악하기에 많은 어려움이 있다. 그러므로 이 연구에서는 대형 시스템인 경우 최소 연속 고장수를 비교적 쉽게 찾을 수 있도록 하는 시뮬레이션 절차를 소개하였다.

두 가지 방법에서 다양한 상황에서의 실험을 통하여 시스템 모수들의 영향을 살펴보았다. 그 결과 대형 시스템이나 소형 시스템에서 모수들이 같은 경향을 가지는 것으로 분석되었다. 그리고 구성 부품수가 많은 대형 시스템일수록 연속 고장수는 작아지는 경향을 보였다.

참고문헌

Boland, P. J., Proschan, F., and Tong, Y. L. (1990), Linear dependence in consecutive-k-out-of-n:F system, *Prob. In Engineering & Information Sciences*, 4, 391-397.

Fu, J. C. (1986), Reliability of consecutive-k-out-of-n:F systems with (k-1)step Markov dependence, *IEEE Trans. Reliability*, **R-35**, 602-606.

Fu, J. C., and Hu, B. (1987), On reliability of a large consecutive-k-out-of-n:F systems with (k-1)-step Markov dependence, *IEEE Trans. Reliability*, **R-36**, 75-77.

Kontoleon, J. M. (1978), Analysis of a dynamic redundant system, *IEEE Trans. Reliability*, **R-27**, 116-119.

Kontoleon, J. M. (1978), Optimum allocation of components in a special 2-port network, *IEEE Trans. Reliability*, **R-27**, 112-115.

Kontoleon, J. M. (1980), Reliability determination of a r-successive-out-of-n:F system, *IEEE Trans. Relia-bility*, **R-29**, 437.

Kossow, A., and Preuss, W. (1989), Reliability of consecutive-k-out-of-n:F systems with non-identical component reliabilities, *IEEE Trans. Reliability*, **38**, 229-233.

Papastavridis, S., and Lambiris, M. (1987), Reliability of a consecutive-k-out-of-n:F system for Markov- dependent components, *IEEE Trans. Reliability*, **R-36**, 78-79.

Shanthikumar, J. G. (1985), Life time distribution of consecutive-k-out-of-n:F systems with exchangeable lifetimes, *IEEE Trans. Reliability*, **R-34**, 480-483.