Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 26, No. 3, pp. 283-288, September 2000.

휴가형 $M/G/1$ 대기행렬의 분해속성에 대한 새로운 표현

장석호[1] · 채경철[1] · 이호우[2]

[1]한국과학기술원 산업공학과 / [2]성균관대학교 시스템경영공학부

Alternative Expressions for the Decomposition Property in the M/G/1 Queue with Generalized Vacations

Seok-Ho Chang[1] · Kyung-Chul Chae[1] · Ho-Woo Lee[2]

We present several alternative expressions for the decomposition property of the M/G/1 queue with generalized vacations so that a user can choose the most convenient expression for his/her own purpose.

1. 서 론

본 연구의 목적은 휴가형 $M/G/1$ 대기행렬에서 성립하는 고객수분포의 분해속성(decomposition property)을 다양한 형태로 제공함으로써 사용자가 편리한 공식을 골라서 사용할 수 있게 하는 것이다.

휴가형 대기행렬이란 어떤 이유로 고객이 있음에도 불구하고 서비스를 제공하지 않는 기간이 존재하는 대기행렬시스템을 일컫는다. 휴가형 대기행렬에 대한 조사논문으로는 Doshi (1986, 1990a, 1990b)를 들 수 있으며, 휴가정책에 대한 다양한 예제들은 Takagi (1991, 1993), Lee (1994) 등에서 찾을 수 있다.

휴가형 $M/G/1$의 분해속성은 다음과 같다. 안정상태(steady-state) 고객수의 확률생성함수(PGF)는 두 가지의 곱인데, 하나는 휴가기간 중의 임의시점에서의 고객수의 PGF 이고 다른 하나는 휴가가 없는 $M/G/1$에서의 안정상태 고객수의 PGF 이다. 이러한 분해속성이 우리에게 주는 효용성이란 "휴가기간 중의 임의시점에서의 고객수 PGF"만 구하면 휴가형 $M/G/1$ 의 안정상태 고객수 PGF를 직접 얻을 수 있다는 것이다.

특정한 휴가 규칙을 대상으로 하지 않고, 일반적인 틀 안에서 휴가형 $M/G/1$ 의 분해속성을 다룬 대표적인 문헌으로는 Fuhrmann 과 Cooper(1985)와 Shanthikumar(1988)를 들 수 있다. 본 논문에서는 우선 그간에 연구된 분해법칙들을 살펴보고 새로운 형태의 분해법칙들을 제공함으로써 사용자가 각각의 시스템에 적합한 분해법칙을 적용할 수 있게 한다.

2. 기존 연구의 분석

Fuhrmann 과 Cooper(1985)가 제시한 분해속성은 다음과 같다.

$$P(z) = \chi(z) \cdot P_{M/G/1}(z) \tag{1}$$

식 (1)에서 $P(z)$는 휴가형 $M/G/1$ 의 임의시점 고객수의 PGF 이고, $\chi(z)$는 휴가기간 중의 임의시점에서의 고객수 PGF 이며, $P_{M/G/1}(z)$는 휴가가 없는 $M/G/1$ 의 임의시점 고객수의 PGF 이다. 식 (1)이 성립하기 위한 조건은 다음과 같다.

- 조건 1. 고객은 도착률이 λ인 포아송 과정으로 도착하고, 서비스시간 $S_1, S_2, \cdots$는 iid(independent and identically distributed) 확률변수이다. 그리고 서비스시간은 도착 과정과 휴가의 길이에 독립이다.
- 조건 2. 도착한 고객은 반드시 서비스를 받고 시스템을 이탈한다.
- 조건 3. 서버는 한 명이고 고객들의 서비스 순서는 서비스시간과 독립이다.
- 조건 4. 서비스는 비축출형(non-preemptive)이다.
- 조건 5. 휴가가 시작되고 끝나는 것은 그 후의 도착과정에 독립이다.

식 (1)의 $P_{M/G/1}(z)$는 다음과 같다.

$$P_{M/G/1}(z) = \frac{\{1-E(A_S)\} \cdot (1-z) \cdot A_S(z)}{A_S(z) - z} \tag{2}$$

식 (2)에서 $E(A_S)$와 $A_S(z)$는 각각 서비스시간 S 동안에 도착하는 고객수 A_S에 대한 기대치와 PGF 이다. S의 LST 를 $S^*(\theta)$라고 하면 $A_S(z)=S^*(\lambda-\lambda z)$, $E(A_S)=\lambda E(S)$ 이다.

식 (1)에서 $\chi(z)$는 휴가 규칙별로 따로따로 구해야 된다. 다만, 다음의 특수한 경우에 대해서 Fuhrmann 과 Cooper 는 $\chi(z)$를 보다 구체적인 형태로 제시하였다. 먼저 완전(exhaustive)서비스와 불완전(non-exhaustive)서비스를 정의한다. 완전서비스는 바쁜기간(busy 또는 active period)이 시작되면 서비스할 고객이 없을 때까지 계속적으로 서비스한 후 휴가를 떠나는 경우이고, 불완전서비스는 고객이 남아 있음에도 불구하고 휴가를 떠날 수도 있는 경우이다. 불완전서비스에서 임의의 바쁜기간이 종료된 직후의 고객수를 N^{BC}라 하고 이의 PGF 를 $N^{BC}(z)$라 하자('BC'는 'busy period completion'을 의미한다). 그리고 다음 번 바쁜기간이 시작될 때까지의 유휴기간 (idle 또는 inactive period) 동안에 도착하는 고객수와 이의 PGF 를 각각 A_I와 $A_I(z)$라 하자. A_I가 N^{BC}에 독립인 경우 다음의 관계가 성립한다.

$$\chi(z)=N^{BC}(z)\cdot\frac{1-A_I(z)}{E(A_I)(1-z)} \tag{3}$$

완전서비스인 경우에는 식 (3)에서 $N^{BC}=z^0=1$ 이다.

Shanthikumar(1988)는 Furhmann 과 Cooper 의 결과를 2 단계로 확장하여 이탈시점 고객수에 대한 분해속성을 제시하였다. 단계-1은 서버의 상태에 따라 고객의 도착률이 달라지는 경우인데, 편의상 바쁜기간에는 도착률이 λ_B이고 휴가기간(유휴기간)에는 도착률이 λ_I인 포아송 과정으로 도착한다고 하자. 단계-1 확장에 따른 분해속성은 다음과 같다.

$$P^D(z)=\chi(z)\cdot\Pi^D_{M/G/1}(z) \tag{4}$$

식 (4)에서 $P^D(z)$는 이탈시점 직후 고객수의 PGF 이고, $\Pi^D_{M/G/1}(z)$는 휴가가 없는 그러나 역시 단계-1로 확장된 조건하에서의 이탈시점 고객수의 PGF 인데, 구체적으로 $\Pi^D_{M/G/1}(z)$는 식 (2)의 우변에 $E(A_S)=\lambda_B E(S)$와 $A_S(z)=S^*(\lambda_B-\lambda_B z)$를 대입한 것이다. 단계-1로 확장된 조건하에서는 PASTA가 성립되지 않으므로 $P^D(z)\neq P(z)$이다.

[비고 1] PASTA란 한마디로 "도착률이 일정한 포아송 과정으로 고객이 도착하는 시점이 임의 시점과 같은 행태를 보인다"는 것이다. 따라서, 유휴기간만 따지거나 또는 바쁜기간만 따지면 도착률이 일정하므로 PASTA가 성립한다. 그러나 유휴기간과 바쁜기간을 합치면 전체적으로는 도착률이 일정하지 않으므로 PASTA가 성립하지 않는다.

Shanthikumar에 의하면 식 (4)의 $\chi(z)$는 구체적으로 다음과 같다.

$$\chi(z)=\frac{N^{SC}(z)-N^{SS}(z)}{\{1-E(A_S)\}(1-z)} \tag{5}$$

식 (5)에서 $N^{SC}(z)$는 임의의 서비스가 종료된 직후(service completion)에서의 고객수 N^{SC}의 PGF 이고, $N^{SS}(z)$는 임의의 서비스 시작 직후(service start)에서의 고객수 N^{SS}의 PGF이다.

Shanthikumar의 단계-2 확장은 다음과 같다. 식 (5)에 등장하는 확률변수들 간의 관계는 $N^{SC}=(N^{SS}+A_S-1)$인데, 이때 A_S는 N^{SS}에 독립이다. 단계-2 확장은 A_S가 N^{SS}에 독립이라는 가정하에 A_S를 서비스시작 직후부터 종료 직전까지 고객수가 증가한 양으로 정의한 것이다. 따라서, 도착과정이 복합(compound) 포아송 과정일 수도 있고, 또한 도착한 고객이 (N^{SS}와 무관한 어떤 규칙에 따라 도착 직후에 또는 나중에) 서비스를 못 받고 이탈할 수도 있다. 단계-2로 확장된 조건하에서도 식 (4)가 유효하다. 식 (4)의 $\Pi^D_{M/G/1}(z)$와 $\chi(z)$는 각각 식 (2)의 우변과 식 (5)와 동일한 형태이다. 다만, 식 (2)와 (5)의 우변에서 $A_S(z)$와 $E(A_S)$가 주어진 휴가 규칙에 따라서 달라질 따름이다. Shanthikumar 의 결과에 대한 증명은 의외로 간단하다. $N^{SC}=(N^{SS}+A_S-1)$에서 A_S가 N^{SS}에 독립이므로

$$N^{SC}(z)=N^{SS}(z)\cdot A_S(z)/z \tag{6}$$

인데, 이는 식 (4)에 식 (2)와 (5)를 대입한 결과와 동일하다(비고 : $P^D(z)=N^{SC}(z)$).

3. $\chi(z)$에 대한 새로운 표현

식 (3)을 반영한 식 (1)과 식 (5)를 반영한 식 (4)를 활용하는 데에서의 문제점이란 $\chi(z)$에 포함된 $N^{BC}(z)$, $N^{SS}(z)$, $N^{SC}(z)$를 구해야 한다는 것이다. 그렇지만 시스템에 따라서는 이러한 값들을 구하는 것이 쉽지 않을 수도 있다. 따라서 만약에 우리가 식 (3)과 식 (5) 이외에 다양한 $\chi(z)$의 형태를 구할 수만 있다면 더욱 편리하게 분해속성을 이용할 수 있을 것이다. 본 연구에서는 $\chi(z)$에 대한 또 다른 세 가지 형태를 제공함으로써 이러한 목적을 달성하고자 한다.

Shanthikumar의 2 단계 확장결과인 식 (5)는 기본적인 주기(cycle)를 $S+I$로 본 결과이다. 즉, 한 서비스 S 후에 휴가기간이 있을 수도 있고 없을 수도 있으며 없는 경우는 유휴기간(휴가기간) I의 길이를 0으로 보는 것이다. 반면에, $B+I$를 기본적인 주기로 정의하면 편리한 경우가 있는데, 이때 바쁜기간 B는 하나 이상의 S로 구성된다. 이는 주어진 문제에서 B의 의미가 명확하여 구태여 서비스가 끝날 때마다 후속 휴가의 유무를 일일이 따질 필요가 없는 경우를 말한다. 이에 따른 결

과는 다음과 같다.

[정리 1]

$$\chi(z)=\frac{N^{BC}(z)-N^{BS}(z)}{\{E(N^{BS})-E(N^{BC})\}(1-z)} \tag{7}$$

[증명] 완전서비스와 불완전서비스를 모두 포함하는 휴가형 $M/G/1$에서 시점 t에서의 고객수를 $N(t)$라 하자. 안정조건이 만족되면 언젠가는 고객수가 0이 되는 시점이 존재한다 ([비고 2] 참조). 이러한 시점을 재생성점(regeneration point)으로 잡으면 확률과정 $\{N(t), t\ge 0\}$는 재생성과정(regenerative process)이다. 예를 들어, 완전서비스에서는 하나의 재생주기가 하나의 유휴기간과 후속하는 하나의 바쁜기간으로 구성된다. 반면에, 불완전서비스에서는 하나의 재생주기가 하나 이상의 유휴기간과 유휴기간마다 하나씩 후속하는 바쁜기간으로 구성된다.

재생주기 동안에 고객수가 변화해가는 행태는 모든 재생주기에 대해서 확률적으로 동일하다. 다음과 같은 확률변수들을 정의하자.

ν_n^{BS} = 재생주기 동안 바쁜기간 시작 직후의 고객수가 n인 횟수, $n\ge 1$

ν_n^{BC} = 재생주기 동안 바쁜기간 종료 직후의 고객수가 n인 횟수, $n\ge 0$

ν_n^{SS} = 재생주기 동안 서비스 시작 직후의 고객수가 n인 횟수, $n\ge 1$

ν_n^{SC} = 재생주기 동안 서비스 종료 직후의 고객수가 n인 횟수, $n\ge 0$

바쁜기간의 시작시점은 항상 서비스의 시작시점이고, 바쁜기간의 종료시점은 항상 서비스의 종료시점이다. 따라서, ν_n^{BS}는 ν_n^{SS}에 그리고 ν_n^{BC}은 ν_n^{SC}에 포함된다. 다만, 재생주기당 재생성점은 하나인데, 이는 바쁜기간 종료 직후의 고객수가 0인 시점인 동시에 서비스 종료 직후의 고객수가 0인 시점이다. 따라서,

$$\nu_0^{BC}=\nu_0^{SC}(=1) \tag{8}$$

이다. 그러나 $n\ge 1$에 대해서는 다음의 관계가 성립한다. 서비스의 시작시점은 바쁜기간의 시작시점이거나 또는 서비스의 종료시점이되 바쁜기간의 종료시점은 아닌 시점들이다. 이는 바쁜기간이 끝나지 않고 계속되는 경우에는 서비스가 하나 끝나면 바로 다음 서비스가 시작되기 때문이다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$\nu_n^{SS}=\nu_n^{BS}+(\nu_n^{SC}-\nu_n^{BC}),\quad n\ge 1 \tag{9}$$

시작한 서비스는 반드시 끝내므로 $\sum_n \nu_n^{SS}=\sum_n \nu_n^{SC}\equiv \nu^S$이다. 마찬가지로, $\sum_n \nu_n^{BS}=\sum_n \nu_n^{BC}\equiv \nu^B$이다. 이제 재생보상정리(renewal reward theorem)를 적용한다. 식 (8)과 (9)에 기대치를 취하고, $E(\nu^S)$로 나누되 편의상

$$E(\Gamma)=E(\nu^S)/E(\nu^B) \tag{10}$$

이라 하면 다음을 얻는다.

$$P(N^{SC}=0)=P(N^{BC}=0)/E(\Gamma) \tag{11}$$

$$P(N^{SC}=n)=P(N^{SS}=n)+\{P(N^{BC}=n)-P(N^{BS}=n)\}/E(\Gamma),\quad n\ge 1 \tag{12}$$

식 (11)과 (12)를 묶어서 PGF로 표현하면 다음과 같다.

$$N^{SC}(z)=N^{SS}(z)+\{N^{BC}(z)-N^{BS}(z)\}/E(\Gamma) \tag{13}$$

마지막으로, 식 (13)을 식 (6)과 연립으로 풀면 식 (4)를 얻는데, 이때 $\chi(z)$는 [정리 1]의 식 (7)이고 $\Pi^D(z)$는 식 (4)의 우변과 같다. 단, 식 (13)의 $E(\Gamma)$는 다음과 같이 처리한다.

식 (10)에 의하면, $E(\Gamma)$는 하나의 바쁜기간을 구성하는 서비스의 기대개수이다. 식 (13)과 (6)을 z에 대해서 미분한 후 $z=1$을 대입하면 기대치들 간의 관계식을 얻는데, 이를 연립으로 풀면 다음을 얻는다(비고: 상세한 유도과정은 장석호, 2000 참조).

$$\begin{aligned}E(\Gamma)&=\{E(N^{BS})-E(N^{BC})\}/\{E(N^{SS})-E(N^{SC})\}\\&=\{E(N^{BS})-E(N^{BC})\}/\{1-E(A_S)\}\end{aligned} \tag{14}$$

[비고 2] 위의 증명에서 편의상 "$P(N^{BC}=0)>0$"를 가정하였다. 그러나 만약 "$P(N^{BC}<M)=0$"이고 "$P(N^{BC}=M)>0$"이면, 고객수가 M이 되는 시점을 재생성점으로 잡는다. 이 경우, 위의 증명에서 모든 n을 $(n+M)$으로 대체하면 된다($n\ge 0$).

식 (7)에서 $N^{BC}(z)$는 식 (3)에서와 같고, $N^{BS}(z)$는 임의의 바쁜기간 시작(직후)시점 고객수인 N^{BS}의 PGF이다. 식 (7)은 식 (5)와 (3)을 포함한다고 볼 수 있다. 식 (7)이 식 (5)와 일치하는 경우는 S를 B로 보는 경우이고, 식 (3)과 일치하는 경우는 Fuhrmann과 Cooper의 5가지 조건하에서 A_I가 N^{BC}에 독립인 경우이다. 후자의 경우 $N^{BS}(z)=N^{BC}(z)\cdot A_I(z)$이고 $E(A_I)=\{E(N^{BC})-E(N^{BS})\}$이다.

$N^{IS}(z)$를 유휴기간 시작 직후에서의 고객수 N^{IS}의 PGF라 하고, $N^{IC}(z)$를 유휴기간 종료 직후에서의 고객수 N^{IC}의 PGF라 하자. 그러면, $N^{IS}=N^{BC}$, $N^{IC}=N^{BS}$이므로 [정리 1]은 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\chi(z)=\frac{N^{IS}(z)-N^{IC}(z)}{\{E(N^{IC})-E(N^{IS})\}(1-z)} \tag{15}$$

이제, 가장 대표적인 휴가모형인 복수휴가(multiple vacation)를 고려하자. 복수휴가란 하나의 유휴기간이 하나 이상의 휴가로 구성되는 경우인데, 정해진 규칙에 따라 소정의 조건이 만족될 때까지 iid 확률변수인 길이 V의 휴가를 반복하는 것이다. 가장 간단한 규칙은 완전서비스에서 고객이 한 명 이상 도착해 있을 때까지 휴가를 반복하는 것이다. 또는, N-정책을 가미해서 고객이 N명 이상 도착해 있을 때까지 휴가를 반복할 수도 있는데, 이 경우에는 불완전서비스도 가능하다.

복수휴가 모형에서는 I가 하나 이상의 iid V로 구성되는데, 이는 B가 하나 이상의 iid S로 구성되는 것과 공통되는 점이다. 따라서, S를 B로 정의하면 식 (7)이 식 (5)와 일치하듯이, 복수휴가 모형에서 V를 I로 정의하면 식 (15)가 다음과 일치한다.

[정리 2] $N^{VS}(z)$를 임의의 휴가 시작(직후)시점의 고객수 N^{VS}의 PGF, $N^{VC}(z)$를 임의의 휴가 종료(직후)시점의 고객수 N^{VC}의 PGF라 하면 다음이 성립한다.

$$\chi(z)=\frac{N^{VS}(z)-N^{VC}(z)}{\{E(N^{VC})-E(N^{VS})\}(1-z)} \tag{16}$$

[증명] 다음을 정의하자.

ν_n^{VS}= 재생주기 동안 휴가 시작 직후의 고객수가 n인 횟수, $n\geq 0$

ν_n^{VC}= 재생주기 동안 휴가 종료 직후의 고객수가 n인 횟수, $n\geq 0$

바쁜기간의 시작시점은 항상 휴가의 종료시점이고, 바쁜기간의 종료시점은 항상 휴가의 시작시점이다. 따라서, ν_n^{BS}는 ν_n^{VC}에 그리고 ν_n^{BC}은 ν_n^{VS}에 포함된다. 그리고 휴가의 종료시점 중에서 바쁜기간의 시작시점이 아닌 것은 다음 휴가의 시작시점이 된다. 또한, 휴가의 시작시점 중에서 바쁜기간의 종료시점이 아닌 것은 직전 휴가의 종료시점이다. 이상을 종합하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\nu_0^{VC}=\nu_0^{VS}-\nu_0^{BC} \quad (=\nu_0^{VS}-1) \tag{17}$$

$$\nu_n^{VC}=\nu_n^{BS}+(\nu_n^{VS}-\nu_n^{BC}), \quad n\geq 1 \tag{18}$$

편의상, $\nu_0^{BS}\equiv 0$이라 하여 식 (17)과 (18)을 다음과 같이 하나로 묶는다.

$$\nu_n^{VC}=\nu_n^{BS}+(\nu_n^{VS}-\nu_n^{BC}), \quad n\geq 0 \tag{19}$$

또한, $\nu_0^{SS}\equiv 0$라 하여 식 (8)과 (9)를 하나로 묶으면

$$\nu_n^{SS}=\nu_n^{BS}+(\nu_n^{SC}-\nu_n^{BC}), \quad n\geq 0 \tag{20}$$

을 얻는다. 그리고 식 (19)와 (20)을 연립으로 풀면 다음을 얻는다.

$$\nu_n^{SS}=\nu_n^{VC}+(\nu_n^{SC}-\nu_n^{VS}), \quad n\geq 0 \tag{21}$$

식 (21)은 식 (20)과 동일한 형태인데, 다만 ν_n^{BS}와 ν_n^{BC}이 각각 ν_n^{VC}과 ν_n^{VS}로 대체되었을 뿐이다. 따라서, [정리 1] 증명의 식 (10) 이후 과정에서 N^{BS}, N^{BC}, ν^B를 각각 N^{VS}, N^{VC}, ν^V $(=\sum_n \nu_n^{VS}=\sum_n \nu_n^{VC})$로 대체하면 [정리 2]를 얻는다.

[정리 2]가 편리한 경우는 길이가 V인 휴가가 끝날 때마다 이에 후속하는 바쁜기간이 있을 수도 있고 없을 수도 있는 경우이다. 즉, (문제를 분석할 때 사용하는) 기본적인 주기가 $V+B$인 경우인데, 이때 V에 후속하는 B는 길이가 0일 수도 있다. 반면에, 복수휴가 규칙에 N-정책 같은 또 다른 규칙이 중복되는 경우에는 기본적인 주기를 $GV+B$로 정의하면 편리하다. GV는 grand vacation을 의미하는데(Lee *et al*., 1994), 휴가종료점에서의 고객수가 한 명 이상 증가할 때까지 반복한 V들의 합이다. 따라서, V를 I로 정의하면 식 (15)가 식 (16)과 일치하듯이, GV를 I로 정의하면 다음의 정리를 얻을 수 있다.

[정리 3] $N^{GVS}(z)$를 임의의 grand vacation 시작(직후)시점의 고객수 N^{GVS}의 PGF, $N^{GVC}(z)$를 임의의 grand vacation 종료(직후)시점의 고객수 N^{GVC}의 PGF라고 하면 다음이 성립한다.

$$\chi(z)=\frac{N^{GVS}(z)-N^{GVC}(z)}{\{E(N^{GVC})-E(N^{GVS})\}(1-z)} \tag{22}$$

[증명] [정리 2]에서 V를 GV로 대체하면 된다.

4. 적용 예제

본 장에서는 [정리 1], [정리 2], [정리 3]의 결과들을 이용하여 다양한 형태의 휴가형대기행렬의 고객수분포를 유도하기로 한다.

4.1 [정리 1]의 적용 예제

(예제 4.1)

완전서비스와 N-정책하의 $M/G/1$ 고객수분포를 [정리 1]을 이용하여 구해보자. 이 모델에서 바쁜기간이 시작될 때의 고객수는 확률 1로 N명이고, 바쁜기간이 종료될 때의 고객수는 0명이므로 다음이 성립한다.

$$N^{BS}(z)=z^N,\ N^{BC}(z)=1 \tag{23}$$

식 (23)을 [정리 1]에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\chi(z)=\frac{1-z^N}{N(1-z)} \tag{24}$$

만약에 위 결과를 Shanthikumar의 결과인 식 (5)를 이용한다면 다음과 같은 복잡한 과정을 거쳐야 한다. 우선 식 (5)의 $N^{SC}(z)$, $N^{SS}(z)$를 구하려면 이탈시점 내재점마코프체인(imbedded Markov chain) 방법 또는 부가변수법(supplementary variable technique)을 사용하여 먼저 $N^{SC}(z)$를 구해야 한다. 이는 결코 간단치 않은 과정으로서 그 결과는 다음과 같다.

$$N^{SC}(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)S^*(\lambda-\lambda z)}{S^*(\lambda-\lambda z)-z}\,\frac{1-z^N}{N(1-z)}$$

위 식과 식 (6)을 연립하면 $N^{SS}(z)$를 구할 수 있는데 그 결과는 다음과 같다.

$$N^{SS}(z)=\frac{(1-\rho)z(1-z)}{S^*(\lambda-\lambda z)-z}\,\frac{1-z^N}{N(1-z)}$$

이를 식 (5)에 대입한 후에야 비로소 식 (24)를 얻을 수 있다.

(예제 4.2)
Shanthikumar 가 단계-1로 확장한 조건을 적용한, 완전서비스와 준비기간(set-up time)을 갖는 $M/G/1$ 고객수분포를 [정리 1]을 사용하여 구해보자(단, 준비기간의 LST는 $Y^*(\theta)$). 이 모델에서 바쁜기간이 시작될 때의 고객수는 유휴기간에 도착한 첫 고객 한 명과 이 고객의 준비기간 동안 도착한 고객수의 합이고, 바쁜기간이 종료될 때의 고객수는 0 이므로,

$$N^{BS}(z)=zY^*(\lambda_I-\lambda_I z),\ N^{BC}(z)=1 \tag{25}$$

식 (25)를 [정리 1]에 대입하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\chi(z)=\frac{1-zY^*(\lambda_I-\lambda_I z)}{(1+\lambda_I E(Y))(1-z)} \tag{26}$$

4.2 [정리 2]의 적용 예제

(예제 4.3)
완전서비스와 복수휴가 정책하의 $M^X/G/1$ 고객수분포를 [정리 2]를 사용하여 구해보자(단, 배치(batch) 크기의 PGF는 $X(z)$). 이 모델에서 V 시작시 고객수는 0 이고, N^{VC}는 V 동안 도착하는 고객수이므로,

$$N^{VS}(z)=1,\ N^{VC}(z)=V^*(\lambda-\lambda X(z)) \tag{27}$$

식 (27)을 [정리 2]에 대입하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\chi(z)=\frac{1-V^*(\lambda-\lambda X(z))}{\lambda E(V)E(X)(1-z)} \tag{28}$$

(예제 4.4)
Shanthikumar 가 단계-1로 확장한 조건을 적용한, 게이트(gated)서비스와 복수휴가 정책하의 $M^X/G/1$ 고객수분포를 [정리 2]를 사용하여 구해보자. 이 모델에서 V 동안 도착한 고객수가 N^{VS}와 독립이므로,

$$N^{VC}(z)=N^{VS}(z)V^*(\lambda_I-\lambda_I X(z)) \tag{29}$$

식 (29)를 [정리 2]에 대입하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\chi(z)=N^{VS}(z)\frac{1-V^*(\lambda_I-\lambda_I X(z))}{\lambda_I E(V)E(X)(1-z)} \tag{30}$$

4.3 [정리 3]의 적용 예제

(예제 4.5)
Shanthikumar 가 단계-1로 확장한 조건을 적용한, 완전서비스와 N-정책하에서 복수휴가 정책을 시행하는 $M/G/1$ 고객수 분포를 [정리 3]을 사용하여 구해보자. 이 모델에서 GV 동안 도착하는 고객수가 N^{GVS}와 독립이므로,

$$N^{GVC}(z)=N^{GVS}(z)\frac{V^*(\lambda_I-\lambda_I z)-V^*(\lambda_I)}{1-V^*(\lambda_I)} \tag{31}$$

식 (31)을 [정리 3]에 대입하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\chi(z)=N^{GVS}(z)\frac{1-V^*(\lambda_I-\lambda_I z)}{\lambda_I E(V)(1-z)} \tag{32}$$

(예제 4.6)
완전서비스와 복수휴가 정책하에 Shanthikumar 가 단계-1로 확장한 조건을 적용한 $M/G/1$ 고객수분포를 [정리 3]을 사용하여 구해보자. 이 모델에서 GV시작시점 고객수는 0명이고, GV종료시점 고객수는 고객이 한 명 이상 도착한 휴가기간 동안 도착한 고객수이므로,

$$N^{GVS}(z)=1,\quad N^{GVC}(z)=\frac{V^*(\lambda_I-\lambda_I z)-V^*(\lambda_I)}{1-V^*(\lambda_I)} \tag{33}$$

이를 [정리 3]에 대입하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\chi(z)=\frac{1-V^*(\lambda_I-\lambda_I z)}{\lambda_I E(V)(1-z)} \tag{34}$$

5. 결 론

식 (15)(또는 [정리 1]), 그리고 [정리 2, 3]은 모두 임의의 관찰 시점이 유휴기간일 때 대기중인 고객수의 PGF로 해석할 수 있다. 따라서, 본 연구에서 제시한 세 가지 결과는 결국 동일한 것을 세 가지의 다른 형태로 표현한 것인데, 이는 주어진 문제에 따라서 편리한 공식을 고를 수 있게 하기 위함이다. 또한, 결과론적으로 Shanthikumar 의 결과인 식 (5)에 대한 해석도 동일하며, 식 (5) 역시 주어진 문제에 따라서 편리한 공식의 하나로 선택될 수 있다.

본 연구에서 $\chi(z)$를 여러 형태로 표현할 수 있었던 이유는 간단하다. B는 S의 정지랜덤합(stopped random sum : 채경철과 박현민, 1998 참조) 이고, 복수휴가형 $M/G/1$ 에서 I는 V 또는 GV의 정지랜덤합이므로, 기본적인 주기를 무엇으로 정의하느냐에 따라서 $\chi(z)$의 표현이 달라지는데, 구체적으로 식 (5)와 [정리 1, 2, 3]은 각각 $\chi(z)$를 S, B(또는 I), V, GV의 관점으로 표현한 것이라고 할 수 있다. 따라서, B와 I를 달리(예를 들어, 다른 형태의 랜덤합으로) 표현할 수 있으면 $\chi(z)$에 대한 또 다른 표현방법이 나올 수도 있을 것이다.

참고문헌

이호우 (1998), *대기행렬이론(개정판)*, 시그마프레스.

장석호 (2000), 휴가형 M/G/1 대기행렬시스템의 일반화된 분해속성에 관한 연구, 한국과학기술원 산업공학과 석사논문.

채경철, 박현민 (1998), 대기행렬 모형에서 틀리기 쉬운 정지랜덤합에 관한 소고, *대한산업공학회지*, 24(3), 381-386.

Doshi, B. T. (1986), Queueing systems with vacations: survey, *Queueing Systems*, 1, 29-66.

Doshi, B. T. (1990a), Single server queues with vacations, *Stochastic Analysis of Computer and Communication System*(H. Takagi, ed), North-Holland, Amsterdam, 217-265.

Doshi, B. T. (1990b), Generalizations of the Stochastic Decomposition Results for Single Server Queues with Vacations, *Stochastic Models*, 6(2), 307-333.

Fuhrmann, S. W., and Cooper, R. B. (1985), Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations, *Operations Research*, 33(5), 1117-1129.

Lee, H. W., Lee, S. S., Park, J. O., and Chae, K. C. (1994), Analysis of $M^X/G/1$ queue with N-policy and multiple vacations, *Journal of Applied Probability*, 31, 467-496.

Shanthikumar, J. G. (1988), On stochastic decomposition in M/G/1 type queues with generalized server vacations, *Operations Research*, 36(4), 566-569.

Takagi, H. (1991), *Queueing Analysis, Vol I : Vacation and Priority Systems*, North-Holland, Amsterdam.

Takagi, H. (1993), *Queueing Analysis, Vol II : Finite Systems*, North-Holland, Amsterdam.

Wolff, R. W. (1982), Poisson arrivals see time averages, *Operations Research*, 30, 223-231.