Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 26, No. 3, pp. 213-219, September 2000.

Dirichlet 확률모형을 이용한 AHP 중요도 결합방법†

김 성 철

숭실대학교 정보통계학과

Using Dirichlet Probability Model to Combine AHP Priorities

Sung-Chul Kim

Combination of AHP priorities is essential in combining opinions of multiple experts. There are two ways to get combined priorities: one is to combine the pairwise matrices and obtain the priority from it and another is to combine the individual priorities. In this paper, we use a Dirichlet probability model to combine the priorities from multiple experts. The resulting combined priority is an expected value of the model, which is a function of some measure of the homogeneity and credibility of the group of experts. We give some interpretations of this measure and illustrate them by numerical example.

1. 서 론

AHP는 다속성 의사결정, 자원배분, 비용대효과분석 및 기타 이해가 상충되는 문제의 해결도구로 많이 사용되고 있다. AHP는 문제를 계층구조(hierarchy)로 표현하고 그 성분들에 대한 쌍별비교를 통하여 계층구조 내의 관계를 비율척도로 표시하여 최선의 대안을 도출해낸다. AHP는 문제를 분해하고 분해된 문제의 해를 구한 후 그 해를 다시 결합하여 결론에 도달하는 전형적인 의사결정방법의 원리를 따른다. 작고 단순한 문제에 대해서는 비교적 정확한 판단을 할 수 있는 인간의 능력을 바탕으로 한 이 기본원리는 AHP의 장점이지만, 그 판단이 주관적이라는 것은 AHP의 단점이라고 할 수 있으며 개인적 판단의 오류를 가능한 줄이는 것이 AHP의 적용에 있어서 중요한 문제라 할 수 있다.

여러 전문가의 의견을 종합하여 AHP의 중요도(priority; 가중치라는 용어가 많이 쓰이고 있으나 priority는 정확한 의미에서 가중치보다 더 포괄적인 개념이고 또한 여기서는 가중치라는 용어를 원래의 의미(weight)로 사용하게 되므로 priority는 중요도라고 부르기로 한다)를 결정하는 것이 개인적 판단에 의한 오류를 줄이는 한 가지 방법이다. AHP의 종합중요도를 구하는 방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있는데, 하나는 각 전문가가 각자의 비교행렬로부터 구한 중요도를 이용하는 것이고, 또 하나는 비교행렬 성분들의 기하평균으로 새로운 비교행렬을 만들어서 이로부터 종합중요도를 구하는 방법이다.

Thomas Saaty는 그의 책(Saaty, 1996)에서 기하평균에 의한 집단의사결정과 그에 따른 몇 가지 사항을 간략히 다루었다. Aczel and Roberts(1989)는 대칭성(Symmetry), 선형동질성(Linear Homogeneity) 및 일치성(Agreement) 등의 성질을 고려하여 전문가의 의견을 결합할 수 있는 결합함수에 대하여 연구하였고, Aczel and Saaty(1983)는 기하평균이 유일한 결합함수가 될 수 있는 조건을 제시하였다. 그러나 기하평균은 비교행렬을 결합하기에는 적당한 방법이나 중요도를 결합함에 있어서는 부적당한 면이 있다. 결합된 종합중요도는 개별 중요도와 마찬가지로 합이 1인 성질을 가져야 하므로 기하평균보다는 가중평균이 바람직할 것이다. 김성철과 어하준(1994)은 이 가중치를 결정함에 있어서 전문가들의 개별 비교행렬로부터 구한 일관성비율(Consistency Ratio)과 같은 객관적 기준을 이용할 수 있는 통계적 의사결정모형을 제시하였다. 여러 전문가의 중요도를 결합함에 있어서 가중평균을 이용하기 위해서는 가중치를 어떻게 부여하느냐가 중요한 문제이다. 이것을 해결하는 한 가지 방법으로서 가중평균에 의하지 않고 개별중요도를 결합하는, 즉 적당한 확률모형을 고려하여 전문가의 입력을 이 확률모형의 표본으로 처리하는 접근방법이 있다. 그러나 위에서 언급한 기하평균과 가중평균 방법에 대한 연구는 비교적 많이 진행되어 왔으나 확률모형 측면에서의 접근은 연구가 부족한 실정이다.

AHP를 확률모형 측면에서 고려한 논문으로서 Saaty and

† 이 논문은 1998년도 숭실대학교 교내학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

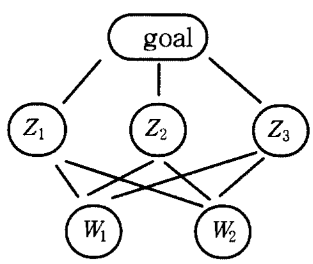
Vargas(1998)를 들 수 있다. 그들은 중요도의 결합을 다루지는 않았지만 ANP(Analytic Network Process) 구조를 고려하여 ANP와 베이즈 정리의 관계를 설명하고 베이즈 정리에 의한 사후확률은 AHP/ANP 구조에 합당하며, 또한 베이즈 정리가 ANP 구조를 설명할 수 있는 충분조건임을 보였다. 이 과정에서 그들은 전통적 AHP를 일반화한 ANP 구조를 바탕으로 계층구조의 역관계를 고려하여 베이즈 정리와의 연관성을 설명하였다. 다수 전문가의 의견수렴에 있어서 O'Leary(1998)는 집단 또는 개인으로부터 수집된 확률적 지식을 분석하는 방법을 연구하였고, 베이즈 정리를 만족하는지의 여부를 이용하여 개인과 집단 간에 확률부여의 일관성을 비교하여 집단으로부터 수집된 확률적 지식이 더 일관성이 있음을 경험적으로 입증하였다.

이 논문의 2절에서는 Saaty and Vargas (1998)와 O'Leary (1998)의 접근방법을 이용하여 베이즈 정리를 만족하는 전문가의 입력을 선택할 수 있는 방법을 제시하고, 3절에서는 전문가들의 입력을 확률표본으로 간주하는 Dirichlet 확률모형을 고려하여 종합중요도를 구하는 방법을 유도한다. 이 방법에 의한 수치적용 예제를 4절에서 보여주고 5절에서 요약과 결론을 내리도록 한다.

2. 베이즈정리를 이용한 일관성검증

다수 전문가의 의견을 종합하여 하나의 중요도를 결정함에 있어서 종합하는 방법이 중요한 역할을 하는 것은 물론이지만 그 종합에 사용되는 전문가들의 입력이 얼마나 믿을 만한 것인가 하는 문제도 중요한 요인이 된다. 가치없는 입력자료로부터 좋은 결과를 기대할 수는 없을 것이다. 전문가 입력의 신뢰성 정도에 대한 척도는 여러 가지가 있을 수 있으나 크게 전문성과 일관성의 두 가지를 생각할 수 있다. 전문가들의 전문성을 판단한다는 것은 현실적 내지 방법적인 문제점이 있고 이는 의사결정자가 전문성을 고려하여 전문가를 선정함으로써 해결해야 할 것이다. 그러나 선정된 전문가의 입력이라 할지라도 착오 또는 무성의에 의한 비일관성의 가능성은 언제나 존재한다. 이 절에서는 전문가의 입력이 베이즈 정리를 만족하는가의 여부에 의해서 일관성을 검증하는 방법을 제시하고자 한다.

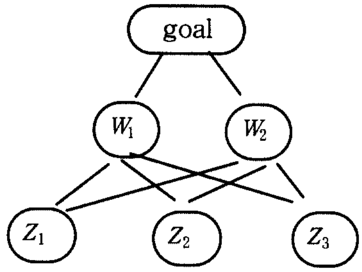
아래와 같은 단순한 계층구조를 고려하자. Goal에 대한 Z_j의 중요도(priority)를 g_j, $j=1,2,3$, 그리고 Z_j에 대한 W_i의 중요도를 c_{ij}, $i=1,2$ 라 하자.



그러면 AHP에 의한 대안 W_1과 W_2의 Goal에 대한 중요도는

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} g_j, \quad i=1,2 \tag{1}$$

이 된다. 이것을 확률로 대응시키면 $g_j = \Pr(Z_j)$, $c_{ij} = \Pr(W_i \mid Z_j)$, $a_i = \Pr(W_i)$로 나타낼 수 있고 역시 식 (1)이 성립한다. 즉, AHP의 각 대안의 전체적인 중요도는 확률의 기본법칙에 의한 W_i의 주변확률(또는 전확률)에 대응된다.



한편 주어진 계층구조의 역구조를 고려하여, W_i에 대한 Z_j의 중요도를 d_{ij} 라 하면

$$g_j = \sum_{i=1}^{2} d_{ij} a_i$$

가 되고 따라서

$$d_{ij} = c_{ij} g_j / a_i \tag{2}$$

로 표현된다. 식 (2)는 d_{ij}를 W_i에 대한 Z_j의 조건부확률로 해석할 때의 베이즈정리에 해당된다. Saaty and Vargas(1998)는 동일계층성분 간의 상호관계(interdependence)를 고려할 수 있는 ANP 구조를 바탕으로 위와 같은 AHP/ANP와 베이즈 정리의 관계를 설명하였다. 그들이 다룬 질병진단을 예로 들면, Z변수가 질병(감기, 폐렴, 비염 등)을 나타내고 W변수가 증상(기침, 콧물, 통증 등)을 나타낸다고 할 수 있다. Z에 대한 W의 중요도는, 예를 들어, '감기에 대하여 기침과 콧물 중 어느 것이 더 특징적인가'와 같은 쌍별비교에 의해서 얻어질 수 있다. 역구조에 해당하는 W에 대한 Z의 중요도는 '감기와 폐렴 중 어느 것이 더 기침을 유발할 것인가'와 같은 쌍별비교를 통해서 구할 수 있다. ANP가 아닌 전통적인 AHP에서도 역구조의 해석이 가능하다. 냉장고를 구입하는 예를 생각하여, 냉장고 선택기준으로 전력사용량, 디자인, 가격을 고려하고 A, B, C 세 개의 제품 중에서 선택한다고 하자. 정상적인 구조에서의 중요도 c_{ij}는 쉽게 구할 수 있으며, 역구조에서의 중요도 d_{ij}는, 예를 들어 'A 냉장고는 전력사용량과 디자인 중 어느 면에서 더 경쟁력이 있는가'와 같은 쌍별비교에 의해서 구할 수 있다.

한편 베이즈정리

$$\Pr(Z_j \mid W_i) = \frac{\Pr(W_i \mid Z_j)\Pr(Z_j)}{\Pr(W_i)}$$

는 다음과 같은 내용을 포함한다(O'Leary, 1998). 만약

$$\Pr(Z_j) > \Pr(W_i)$$

이면

$$\Pr(Z_j \mid W_i) > \Pr(W_i \mid Z_j) \tag{3}$$

이다. 여기서 부등호 (>)는 (=) 또는 (<)로 대치가능하다. 이것을 AHP의 중요도로써 표현하면

$$g_j > a_i \text{이면 } d_{ij} > c_{ij} \text{ (또는 =, 또는 <)} \tag{4}$$

의 관계가 성립해야 한다.

위와 같은 AHP와 베이즈 정리와의 관계를 이용하면 다음과 같이 전문가의 일관성을 검증할 수 있다. 전문가로부터 정상적인 계층구조에 대한 입력 g_j 와 c_{ij} 뿐만 아니라 역계층구조에 대한 d_{ij} 값도 입력에 포함시키도록 한다. g_j 와 c_{ij} 로부터 a_i 를 계산할 수 있으며, 이 값들을 이용해서 입력값이 관계 (4)를 만족하는지를 확인할 수 있고, 만족하지 않은 입력(전문가)은 베이즈 정리를 만족하지 않는 경우이므로 분석에서 제외하거나 재입력을 요구함으로써 좀더 정확한 종합중요도를 구할 수 있다. 따라서 앞으로 다루게 될 자료는 이와 같이 일관성이 없는 부분은 제외되고 남은 자료라고 가정한다.

3. Dirichlet 모형에 의한 종합중요도 결정

주어진 계층구조하에서 종합적인 의사결정을 내리기 위해서는 계층구조의 모든 단계의 각 비교부분의 중요도를 결정하고 이들을 이용하여 계층구조 전체에 대한 의사결정을 해야 한다. 이 논문에서는 이 전체적인 의사결정보다는 <그림 1>과 같은 간단한 계층구조에 대한 종합중요도를 결정하는 문제를 고려한다.

AHP 계층구조의 특정부분에 대한 종합중요도를 결정하려고 할 때 전문가들의 판단은 그들의 비교행렬의 형태로 나타난다. 이러한 비교행렬들로부터 하나의 종합중요도 벡터를 도출하는 것이 본 연구의 목표이다. 이를 위하여 전문가들의 신뢰성 정도를 확률이나 새로운 가중치의 형태로 표시하여 그들의 비교행렬이 얼마나 중요한 영향을 미칠 것인가를 결정해야 한다. 서론에서 언급한 바와 같이 이 논문에서 사용되는 용어상의 구별을 다음과 같이 명확히 하도록 한다. AHP 계층구조의 특정부분에 대하여 각 전문가의 판단을 '중요도'(priority), 전문가의 신뢰성 정도를 '가중치'(weight), 그리고 전문가들이 판단한 중요도를 종합한 의사결정자의 판단을 '종합중요도'(combined priority)라고 부르기로 한다.

<그림 1>에서

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$: $(C_1, \ldots, C_m)$ 의 Goal에 대한 중요도 벡터,

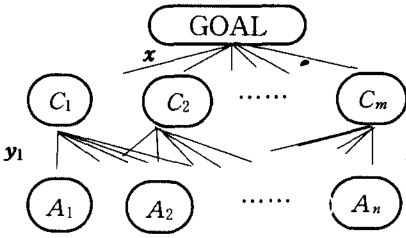


그림 1. AHP의 계층구조.

$\boldsymbol{y}_j = (y_{j1}, y_{j2}, \ldots y_{jn})^T$: $(A_1, \ldots, A_n)$ 의 C_j 에 대한 중요도 벡터, $j = 1, 2, \ldots, m$

이고, i번째 전문가 ($i = 1, 2, \ldots, k$)가 제시한 중요도벡터는 각각 $\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{y}_1^i, \boldsymbol{y}_2^i, \ldots, \boldsymbol{y}_m^i$ 로 표시하자.

비슷한 배경을 가진 전문가들은 어떤 공통적인 특성을 가진 집단으로 생각할 수 있으며 이들이 판단한 중요도벡터는 동일한 방법에 의해서 도출되는 것이므로 일정 모형에 의한 확률변수의 관찰값으로 볼 수 있다. 즉, 중요도벡터 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m$ 가 확률변수이고 k명의 전문가가 제시한 중요도벡터는 이 확률변수들의 임의표본이라고 볼 수 있는 것이다. 그러면 종합중요도는 이 확률변수의 추정값 또는 예측값으로서 나타낼 수 있다.

3.1 Dirichlet 모형

AHP의 중요도를 확률모형 측면에서 접근한다면, 종합중요도를 단순히 여러 전문가가 제시한 중요도의 산술평균 또는 가중평균으로 구할 것이 아니라 그 확률모형의 기대값으로 구해야 할 것이다. 중요도벡터는 합이 1인 0과 1 사이의 값을 가지므로 Dirichlet 모형을 가정할 수 있다. 중요도 $\boldsymbol{x}$의 Dirichlet 모형에 대한 모수를 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m)^T$라 하고, $\boldsymbol{y}_j (j = 1, 2, \theta_m)$의 Dirichlet 모형의 모수를 $\boldsymbol{\tau}_j = (\tau_{j1}, \ldots, \tau_{jn})^T$라고 하자. 이 모형을 간단한 영향도(influence diagram)로 표시하면 <그림 2>와 같고 이 관계로부터 $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_m$ 에 대한 추론이 필요하다.

동일 전문가가 부여하는 각 부분별 중요도가 서로 관련이 있다고 볼 수도 있으나, AHP의 쌍별비교가 기본적으로 문제를 분해하는 독립적인 부여를 전제하고 있고, 중요도의 결합과정이 각 부분별로 별도로 진행되고 개인의 특성을 고려하지 않

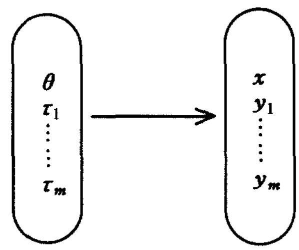


그림 2. AHP 확률모형의 영향도.

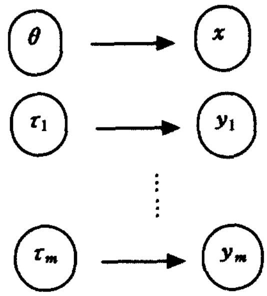


그림 3. AHP 모형의 독립성을 고려한 확률모형.

으며 또한 일관성이 없는 자료는 제외될 수 있으므로 각 부분별 중요도 $\boldsymbol{x}, y_1, \ldots, y_m$ 은 서로 조건부독립이다. 즉, $\boldsymbol{\theta}$가 주어졌을 때 $\boldsymbol{x}$는 $\tau_1, \ldots, \tau_m$ 과 독립이고 또한 τ_j가 주어졌을 때 y_j는 τ_j를 제외한 다른 τ들 및 $\boldsymbol{\theta}$와 독립이다. 이 조건부독립의 관계를 고려한 모형의 영향도는 <그림 3>과 같다.

따라서 AHP 계층구조의 확률모형에서 각 부분의 종합화를 독립적으로 고려할 수 있으며 앞으로는 $\boldsymbol{\theta}$와 $\boldsymbol{x}$의 관련된 부분만 고려하도록 한다.

$\boldsymbol{x}$가 Dirichlet($\boldsymbol{\theta}$)의 분포를 따르는 모형에서, k명의 전문가가 제시한 중요도 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^k$는 $\boldsymbol{x}$의 임의표본이다. $\tilde{\boldsymbol{x}}$를 종합중요도라 하면 $\tilde{\boldsymbol{x}}$는 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^k$의 함수로 표시되어야 한다. 종합중요도 $\tilde{\boldsymbol{x}}$를 $\boldsymbol{x}$의 예측값으로 볼 때

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}} &= E(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k)\\ &= \int E(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k) d\boldsymbol{\theta}\end{aligned}$$

가 되며, 이 경우 $\boldsymbol{\theta}$의 사전분포에 의한 사후분포의 계산과 그 적분이 필요하다. 이 과정은 사전분포의 부여에 따른 어려움 뿐만 아니라 그 계산도 매우 복잡하게 된다. 그러나 종합중요도를 확률모형의 기대값으로 해석한다면 그 기대값 $E(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta})$에 대한 추정값(MLE; 최우추정량)을 종합중요도로 사용하는 것이 바람직한 방법이다. 즉, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$를 $\boldsymbol{\theta}$의 MLE라 하면 $\tilde{\boldsymbol{x}}$는 $E(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta})$ 의 MLE이고, MLE의 불변성(invariance property)에 의하여

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \widehat{E}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) = E(\boldsymbol{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{5}$$

가 된다.

3.2 Dirichlet 모수의 MLE와 종합중요도

m차원 벡터 확률변수 $\boldsymbol{x}$가 Dirichlet($\boldsymbol{\theta}$) 분포를 따른다고 하자. k개의 임의표본 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$에 대해서 $\boldsymbol{\theta}$의 우도함수는

$$\prod_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{x}^i \mid \boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\Gamma(\theta_1 + \cdots + \theta_m)}{\Gamma(\theta_1) \cdots \Gamma(\theta_m)}\right]^k \times \left(\prod x_1^i\right)^{\theta_1 - 1} \cdots \left(\prod x_m^i\right)^{\theta_m - 1}$$

이고 이것의 대수함수는

$$\log \prod_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{x}^i \mid \boldsymbol{\theta}) = k \log \Gamma(\theta_1 + \cdots + \theta_m) - k \sum_{j=1}^{m} \log \Gamma(\theta_j) + \sum_{j=1}^{m} (\theta_j - 1) \sum_{i=1}^{k} \log x_j^i \tag{6}$$

이 된다. 이 대수우도함수는 감마함수 $\Gamma(\theta_j)$를 포함하며 감마함수는 미분가능하다. $\log \Gamma(z)$ 의 도함수는 digamma function 이라는 함수로 알려져 있고 실수 z에 대하여

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

로 정의된다(Hildebrand, 1976). 또한 $\Gamma(\theta_1 + \cdots + \theta_m)$에 대한 digamma function은

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log \Gamma(\theta_1 + \cdots + \theta_m)\\ &= \psi(\theta_1 + \cdots + \theta_m) \frac{\partial(\theta_1 + \cdots + \theta_m)}{\partial \theta_j}\\ &= \psi(\theta_1 + \cdots + \theta_m)\end{aligned}$$

이 되어 그대로 적용할 수 있다. 따라서 $\boldsymbol{\theta}$의 MLE(최우추정량)는 식 (6)을 θ_j, $j = 1, \ldots, m$ 에 대하여 편미분하여 구할 수 있다. 즉,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log \prod_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{x}^i \mid \boldsymbol{\theta}) = k[\psi(\theta_1 + \cdots + \theta_m) - \psi(\theta_j)] + \sum_{i=1}^{k} \log x_j^i = 0$$

또는

$$\psi(\theta_j) - \psi(\theta_1 + \ldots + \theta_m) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \log x_j^i}{k}, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{7}$$

의 연립방정식의 해로서 $\boldsymbol{\theta}$의 MLE를 구할 수 있다. θ_j의 MLE $\hat{\theta}_j$은 위 (7)의 연립방정식의 해로서 구해진 값이며 $\hat{\theta}_0 = \sum_{j=1}^{m} \hat{\theta}_j$ 이라 하면 종합중요도는 식 (5)로부터 $\tilde{\boldsymbol{x}} = E(\boldsymbol{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}})$이고 그 j 번째 성분은 $\tilde{x}_j = \hat{\theta}_j / \hat{\theta}_0$ 가 된다. 즉,

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_0}, \cdots, \frac{\hat{\theta}_m}{\hat{\theta}_0}\right)^T \tag{8}$$

으로서 θ_j들의 상대적 크기로 종합중요도를 나타내게 된다.

Dirichlet 모수의 합 $\theta_1 + \ldots + \theta_m$ 을 θ_0 라 하면 Dirichlet 변수 x_j의 분산은

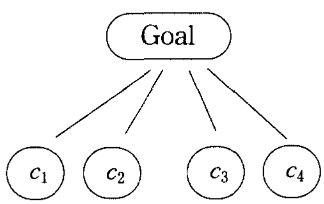
$$V(x_j) = \frac{\theta_j(\theta_0 - \theta_j)}{\theta_0^2(\theta_0 + 1)} \tag{9}$$

이므로 θ_0가 클수록 $V(x_j)$가 작아진다고 할 수 있다. 즉, θ_0가 클수록 전문가들의 반응이 일치하는 방향으로 나타나게 되어 θ_0를 집단의 동질성의 척도로 해석할 수 있다. 즉, θ_0가 클수록 k명의 전문가가 비슷한 중요도를 제시한 것으로서 구해진 종합중요도의 신뢰성이 높음을 의미하는 것이다. 물론 비슷한 배경이나 견해를 가진 전문가들로만 구성되어 의견의 치우침이 있는 집단이 생긴 경우에는 θ_0가 크다고 해서 신뢰성이 높다고 해석할 수는 없다. 이런 경우는 전문가 선정이 올바르지 않은 경우인데 이것은 전문가 선정에 신중을 기하여 의견의 치우침이 없는 집단을 선정하도록 하여 해결해야 할 것이다.

Dirichlet 분포의 평균과 분산을 분석하면 식 (8)로부터 구한 종합중요도 $\tilde{\boldsymbol{x}}$와 산술평균과의 편차가 θ_0의 크기에 따라 다음과 같이 변하는 것을 알 수 있다. 식 (9)에 의하면 θ_0가 작을수록 $V(x_j)$가 커지는데, θ_0가 작아져서 $V(x_j)$가 커지고 균일분포에 가까워지면 $E(x_j) \approx 1/m$이 된다. θ_0가 더욱 작아져서 $V(x_j)$가 더 커지면 확률분포는 아래로 볼록한 형태가 되며 이때 $E(x_j) = \theta_j/\theta_0$는 x_j^i들의 산술평균보다는 $1/m$에 가까운 값을 갖게 된다. 즉, θ_0가 작으면 x_j^i값의 차이가 큰 경우이고 이 경우에는 산술평균이나 가중평균은 대표값으로 부적당한 것이다. 따라서 식 (8)에서 제시하는 종합중요도 $\tilde{\boldsymbol{x}}$는 신뢰성이 작을 때에는 $1/m$에 가까운 보수적인 값을 갖게 됨으로써 산술평균이나 가중평균보다 합리적인 결과를 주게 된다. <그림 3>의 AHP 확률모형의 $\boldsymbol{y}_j$에 대한 종합중요도도 같은 방법으로 구할 수 있다.

4. 수치예제

예를 들어 앞의 <그림 1>에서 $m=4$일 때 상층부만을 고려하자.



이 부분에 대해서 $k=3$명의 전문가가 각자의 비교행렬로부터 하나씩의 중요도벡터 $\boldsymbol{x}^1=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$, $\boldsymbol{x}^2=(0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$, $\boldsymbol{x}^3=(0.25, 0.3, 0.2, 0.25)$를 제시하였다고 하자. $\boldsymbol{\theta}$의 MLE는 식 (7)의 해로써 구해지고 식 (7)은 digamma 함수를 포함하는 4원 연립방정식이다. Mathematica 패키지를 이용하여 (Wolfram, 1996) 구한 $\boldsymbol{\theta}$의 MLE는 $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(9.826, 12.99, 14.80, 17.45)$이고 이들의 합은 $\hat{\theta}_0=55.07$이다. 종합중요도는 식 (8)로부터 이들의 상대적 크기로서 $\tilde{\boldsymbol{x}}=(0.1784, 0.2359, 0.2687, 0.3169)$로

표 1. 4개의 가지에 3명의 전문가가 응답한($m=4$, $k=3$) 경우의 종합중요도

					$\hat{\theta}$	$E[X \mid \hat{\theta}\,]$	산술평균
	0.1	0.2	0.25		9.82622	0.178446	0.183333
	0.2	0.2	0.3		12.9892	0.235887	0.233333
(1)	0.3	0.3	0.2		14.7975	0.268726	0.266667
	0.4	0.3	0.25		17.4525	0.316941	0.316667
					θ_0= 55.06542		
	0.1	0.25	0.4		4.64956	0.234772	0.25
	0.2	0.25	0.3		5.25274	0.265228	0.25
(2)	0.3	0.25	0.2		5.25274	0.265228	0.25
	0.4	0.25	0.1		4.64956	0.234772	0.25
					θ_0= 19.8046		
	0.1	0.05	0.1		3.4541	0.091154	0.083333
	0.2	0.05	0.1		4.22834	0.111586	0.116667
(3)	0.3	0.2	0.3		10.2958	0.271708	0.266667
	0.4	0.7	0.5		19.9147	0.525552	0.533333
					θ_0= 37.89294		
	0.05	0.25	0.8		1.215372	0.301386	0.366667
	0.05	0.25	0.1		0.80093	0.198614	0.133333
(4)	0.1	0.25	0.05		0.80093	0.198614	0.133333
	0.8	0.25	0.05		1.215372	0.301386	0.366667
					θ_0= 4.032604		
	0.1	0.1	0.1		16299.5	0.100002	0.1
	0.2	0.2	0.2		32598.6	0.200002	0.2
(5)	0.3	0.3	0.3		48897.4	0.3	0.3
	0.4	0.4	0.4		65195.6	0.399995	0.4
					θ_0= 162991.1		

구해지며 비교를 위하여 산술평균을 구해보면 $\bar{\boldsymbol{x}}=(0.1833, 0.2333, 0.2667, 0.3167)$과 같다. <표 1>은 4개의 가지에 3명의 전문가가 응답한 경우의($m=4$, $k=3$) 여러 가지 입력상황에 대한 결과를 정리한 것이다. 상황 (2)는 전문가들의 의견이 상반되게 나타난 경우로서 $\hat{\theta}_0(=19.80)$의 값이 상대적으로 작고 산술평균과의 차이가 (약 0.015) 커졌다. 상황 (4)는 상황 (2)보다 의견이 다른 정도가 더 심한 경우이며 $\hat{\theta}_0(=4.03)$이 더 작아지고 산술평균과의 차이가 (약 0.065) 더 커졌다. 상황 (5)는 그 반대의 극단적인 경우로서 세 전문가의 의견이 완전히 일치하였다. $\hat{\theta}_0(=162991.1)$이 매우 크며 당연히 종합중요도가 산술평균과 일치하는 것을 볼 수 있다. 이 결과를 종합하면, 전문가들의 의견이 비슷할수록 θ_0가 커지며 이는 앞 절에서 언급한 바와 같이 θ_0가 전문가들의 동질성, 나아가서는 신뢰성을 나타내는 척도임을 보여주는 결과이다. 또한 θ_0가 작을수록 종합중요도 $\tilde{\boldsymbol{x}}$와 산술평균의 차이가 커지는 것을 볼 수가 있다. 이 경우의 산술평균과의 편차는 $\tilde{\boldsymbol{x}}$가 산술평균보다 성분간의 차이를 줄이는 방향으로 발생한다. 즉, 자료의 신뢰성이 작을 때는 보수적인 판단을 내림으로써 오류의 가능성을 최소화하도록 해준다. 반면에 상황 (2)에서와 같이 θ_0가 작을 때 전문가들의 대칭적인 의견에 의해서 산술평균이 모두 같은 값이 나올 상황에서는 그 차이를 고려하는 종합중요도를 산출한다.

표 2. 1명의 전문가가 추가된 (m=4, k=4) 경우의 종합중요도

						$\hat{\theta}$	$E[X\mid\hat{\theta}]$	산술평균
(1)	0.1	0.2	0.25	0.2		13.04171	0.183569	0.1875
	0.2	0.2	0.3	0.25		17.00761	0.239391	0.2375
	0.3	0.3	0.2	0.25		18.76926	0.264187	0.2625
	0.4	0.3	0.25	0.3		22.22679	0.312853	0.3125
					θ_0=71.04537			
(2)	0.1	0.25	0.4	0.3		6.279955	0.248947	0.2625
	0.2	0.25	0.3	0.25		6.612383	0.262125	0.25
	0.3	0.25	0.2	0.25		6.612383	0.262125	0.25
	0.4	0.25	0.1	0.2		5.721361	0.226803	0.2375
					θ_0=25.22608			
(3)	0.1	0.05	0.1	0.05		3.433658	0.081396	0.075
	0.2	0.05	0.1	0.15		5.104292	0.120999	0.125
	0.3	0.2	0.3	0.2		10.70675	0.253806	0.25
	0.4	0.7	0.5	0.6		22.94001	0.543799	0.55
					θ_0=42.18471			
(4)	0.05	0.25	0.8	0.3		1.532293	0.303035	0.35
	0.05	0.25	0.1	0.25		1.049125	0.207481	0.1625
	0.1	0.25	0.05	0.25		1.049125	0.207481	0.1625
	0.8	0.25	0.05	0.2		1.425947	0.282003	0.325
					θ_0=5.05649			
(5)	0.1	0.1	0.1	0.1		72.07402	0.100627	0.1
	0.2	0.2	0.2	0.15		133.7155	0.186688	0.1875
	0.3	0.3	0.3	0.35		223.6601	0.312266	0.3125
	0.4	0.4	0.4	0.4		286.7999	0.400419	0.4
					θ_0=716.2495			

표 3. 1명의 비전문가가 추가된 (m=4, k=4) 경우의 종합중요도

						$\hat{\theta}$	$E[X\mid\hat{\theta}]$	산술평균
(1)	0.1	0.2	0.25	0.55		3.43566	0.256828	0.275
	0.2	0.2	0.3	0.25		3.50081	0.261699	0.2375
	0.3	0.3	0.2	0.15		3.422089	0.255814	0.2375
	0.4	0.3	0.25	0.05		3.018703	0.225659	0.25
					θ_0=13.37726			
(2)	0.1	0.25	0.4	0.3		3.577449	0.261063	0.2625
	0.2	0.25	0.3	0.05		2.66686	0.194613	0.2
	0.3	0.25	0.2	0.5		4.375834	0.319325	0.3125
	0.4	0.25	0.1	0.15		3.08326	0.225	0.225
					θ_0=13.7034			
(3)	0.1	0.05	0.1	0.3		2.00526	0.139889	0.1375
	0.2	0.05	0.1	0.3		2.298934	0.160376	0.1625
	0.3	0.2	0.3	0.2		3.877318	0.270486	0.25
	0.4	0.7	0.5	0.2		6.153102	0.429248	0.45
					θ_0=14.33461			
(4)	0.05	0.25	0.8	0.3		1.389767	0.311193	0.35
	0.05	0.25	0.1	0.05		0.768497	0.17208	0.1125
	0.1	0.25	0.05	0.5		1.072373	0.240123	0.225
	0.8	0.25	0.05	0.15		1.235292	0.276604	0.3125
					θ_0=4.465929			
(5)	0.1	0.1	0.1	0.3		5.408818	0.142857	0.15
	0.2	0.2	0.2	0.3		8.764768	0.231493	0.225
	0.3	0.3	0.3	0.2		10.62426	0.280606	0.275
	0.4	0.4	0.4	0.2		13.06401	0.345044	0.35
					θ_0=37.86186			

<표 2>와 <표 3>은 $m=4$, $k=4$의 경우로서 <표 1>보다 1명이 추가된 결과이다. <표 2>는 전문가라고 할 수 있는 사람이 추가된 경우이고 <표 3>은 비전문가가 추가된 경우의 결과이다. <표 4>는 전문가가 많은 경우이고($m=4$, $k=8$) <표 5>는 가지가 많은 경우이다(m=8, k=4). 역시 θ_0의 크기가 전문가 집단의 동질성 및 신뢰성 정도를 의미하고, θ_0 가 작

표 4. 4개의 가지에 8명의 전문가가 응답한(m=4, k=8) 경우의 종합중요도

										$\hat{\theta}$	$E[X\mid\hat{\theta}]$	산술평균
(1)	0.1	0.2	0.25	0.2	0.25	0.1	0.3	0.3		4.813465	0.214266	0.2125
	0.2	0.2	0.3	0.25	0.25	0.1	0.25	0.05		4.364227	0.194269	0.2
	0.3	0.3	0.2	0.25	0.25	0.3	0.25	0.5		6.729471	0.299555	0.29375
	0.4	0.3	0.25	0.3	0.25	0.5	0.2	0.15		6.5577	0.291909	0.29375
									θ_0=22.46486			
(2)	0.1	0.05	0.1	0.05	0.2	0.25	0.05	0.25		2.432986	0.128219	0.13125
	0.2	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.15	0.3		3.354319	0.176773	0.175
	0.3	0.2	0.3	0.2	0.3	0.25	0.25	0.2		5.040102	0.265615	0.25
	0.4	0.7	0.5	0.6	0.3	0.25	0.55	0.25		8.147844	0.429393	0.44375
									θ_0=18.97525			
(3)	0.05	0.25	0.8	0.3	0.1	0.2	0.1	0.2		1.312591	0.252487	0.25
	0.05	0.25	0.1	0.25	0.7	0.1	0.1	0.05		1.078903	0.207536	0.2
	0.1	0.25	0.05	0.25	0.1	0.6	0.4	0.2		1.337834	0.257343	0.24375
	0.8	0.25	0.05	0.2	0.1	0.1	0.4	0.55		1.469312	0.282634	0.30625
									θ_0=5.19864			
(4)	0.1	0.2	0.25	0.55	0.2	0.2	0.1	0.1		3.079986	0.206413	0.2125
	0.2	0.2	0.3	0.25	0.2	0.2	0.1	0.1		3.108548	0.208327	0.19375
	0.3	0.3	0.2	0.15	0.3	0.3	0.3	0.3		4.261095	0.285567	0.26875
	0.4	0.3	0.25	0.05	0.3	0.3	0.5	0.5		4.471872	0.299693	0.325
									θ_0=14.9215			

표 5. 8개의 가지에 4명의 전문가가 응답한 ($m=8$, $k=4$) 경우의 종합중요도

						$\hat{\theta}$	$E[X \mid \hat{\theta}]$	산술평균
(1)	0.05	0.1	0.1	0.1		8.354879	0.088907	0.0875
	0.15	0.125	0.15	0.125		13.29615	0.141489	0.1375
	0.15	0.15	0.1	0.125		12.60144	0.134096	0.13125
	0.2	0.15	0.125	0.15		14.89236	0.158475	0.15625
	0.05	0.1	0.2	0.15		10.84051	0.115358	0.125
	0.1	0.125	0.15	0.125		12.06192	0.128355	0.125
	0.1	0.125	0.125	0.125		11.54643	0.12287	0.11875
	0.2	0.125	0.05	0.1		10.3794	0.110451	0.11875
						$\theta_0=93.97309$		
(2)	0.05	0.025	0.05	0.025		1.1695	0.056051	0.0375
	0.4	0.125	0.025	0.1		2.634613	0.12627	0.1625
	0.15	0.1	0.15	0.1		2.97801	0.142728	0.125
	0.2	0.35	0.25	0.3		5.974768	0.286355	0.275
	0.025	0.125	0.4	0.15		2.866125	0.137366	0.175
	0.025	0.125	0.05	0.125		1.824708	0.087454	0.08125
	0.05	0.125	0.025	0.125		1.824708	0.087454	0.08125
	0.1	0.025	0.05	0.075		1.592445	0.076322	0.0625
						$\theta_0=20.86488$		
(3)	0.05	0.1	0.125	0.275		4.003879	0.128317	0.1375
	0.1	0.1	0.15	0.125		4.081466	0.130803	0.11875
	0.15	0.15	0.1	0.075		3.987761	0.1278	0.11875
	0.05	0.125	0.2	0.15		4.081466	0.130803	0.13125
	0.2	0.15	0.125	0.025		3.507672	0.112414	0.125
	0.1	0.125	0.15	0.025		3.024458	0.096928	0.1
	0.15	0.125	0.1	0.25		5.00873	0.16052	0.15625
	0.2	0.125	0.05	0.075		3.507672	0.112414	0.1125
						$\theta_0=31.2031$		
(4)	0.4	0.125	0.025	0.075		1.975618	0.125327	0.15625
	0.1	0.025	0.05	0.15		1.466374	0.093022	0.08125
	0.15	0.1	0.15	0.1		2.3481	0.148956	0.125
	0.2	0.35	0.25	0.1		3.609284	0.228961	0.225
	0.025	0.125	0.4	0.15		2.263835	0.14361	0.175
	0.025	0.125	0.05	0.025		1.125664	0.071408	0.05625
	0.05	0.125	0.025	0.25		1.674434	0.106221	0.1125
	0.05	0.025	0.05	0.15		1.30042	0.082494	0.06875
						$\theta_0=15.76373$		

을수록 대체로 산술평균과의 편차가 커지지만 산술평균보다 보수적인 값을 제시하는 것으로 나타났다. 여기서 k는 Dirichlet 모형의 표본크기로서 이론적으로 k가 작을 때에는 MLE의 성질을 적용하기 어렵지만 여기서는 구해진 종합중요도의 특성을 가시화하기 위하여 예시한 것이며 k의 크기에 무관하게 적용할 수 있음을 보여 준다.

5. 결론 및 요약

여러 전문가의 의견을 종합하여 AHP의 종합중요도를 구하는 방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있는데, 하나는 각 전문가가 제시한 중요도를 이용하여 종합중요도를 구하는 것이고, 또 하나는 전문가들의 비교행렬을 종합하여 이로부터 종합중요도를 구하는 방법이다. 이 논문에서는 전자의 경우에 각 전문가의 중요도를 Dirichlet 확률모형으로부터의 표본이라는 측면에서 접근하여 종합중요도를 이들의 가중평균 형태가 아닌 모형의 기대값으로 나타냈다. 이를 위하여 Dirichlet 분포의 모수 $\boldsymbol{\theta}$의 MLE를 구하는 방법을 유도하고 종합중요도는 이 모수의 추정값에 의한 모형의 기대값 $E(\boldsymbol{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}})$으로 구하였다. 이 과정에서 구해지는 $\boldsymbol{\theta}$의 성분들의 합 θ_0의 크기는 전문가 집단의 동질성 및 신뢰성 정도를 의미하고 θ_0가 클수록 k명의 전문가가 비슷한 중요도를 제시한 것으로서 구해진 종합중요도의 신뢰성이 높음을 의미한다. 또한 θ_0가 작은 경우, 즉 집단의 동질성이나 신뢰성이 떨어지는 경우에는 산술평균보다는 균일분포의 평균인 $1/m$에 좀더 가까운 종합중요도를 산출하여 오류의 가능성을 줄이도록 하는 성질을 갖고 있다.

참고문헌

김성철, 어하준 (1994), AHP 가중치 결정에서의 다수 전문가 의견종합 방법, *한국경영과학회지*, 19(3), 41-51.

Aczel, J., and Roberts, F. S. (1989), On the Possible Merging Functions, *Mathematical Social Sciences*, 17, 205-243.

Aczel, J., and Saaty, T. L. (1983), Procedures for Synthesizing Ratio Scale Judgements, *Journal of Mathematical Psychology*, 27, 93-102.

Hildebrand, F. B. (1976), *Advanced Calculus for Application*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

O'Leary, D. E. (1998), Knowledge Acquisition from Multiple Experts: An Empirical Study, *Management Science*, 44(8), 1049-1058.

Saaty, T. L. (1996), Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytic Network Process, RWS Publication, Pittsburgh, PA.

Saaty, T. L., and Vargas, L. G. (1998), Diagnosis with Dependent Symptoms: Bayes Theorem and the Analytic Hierarchy Process, *Operations Research*, 46(4), 491-502.

Wolfram, S. (1996), *The Mathematica Book*, 3rd ed., Wolfram media (Champaign, IL) and Cambridge Univ. Press (Cambridge, UK).