

혼합 모드 파괴 기준에서의 T응력의 영향에 관한 연구

구재민[†] · 최태주^{*}

대림대학 기계과 · 동서울대학 금형설계과
(1999. 11. 4. 접수 / 2000. 3. 18. 채택)

A Study on the Effect of T-Stress in the Mixed Mode Fracture Criterion

Jae-Mean Koo[†] · Tae-Ju Choi^{*}

Department of Mechanical Engineering, Daelim College · Department of Mechanical Design, DongSeoul College
(Received November 4, 1999 / Accepted March 18, 2000)

Abstract : Under the mixed mode loading, it has been known that the influence of non-singular terms in the stress fields is serious, because the critical distance, r_0 - the distance of nonlinear elastic region near the crack tip has no negligible value. In this paper, it has been studied on the influence of non-singular terms, T-stress, and the case of $T=0$, $\sigma\cos^2\beta$, $\sigma\cos(2\beta)$ and $0.05\sigma\cos(2\beta)$, under uniaxial tension and compression. It has been seen that the T-stress of $\sigma\cos(2\beta)$ has better than others as comparing to the experimental data.

1. 서 론

구조물이나 부품들은 대부분이 인장이나 압축 하중 외에 비틀림 등에 의한 전단 하중이 작용하여 혼합 모드 하중이 작용하거나, 모드 I 하중이 작용하더라도, 결합 자체가 작용 하중에 대하여 경사지거나, 결합 등에 의해서 하중이 작용하는 동안에 자주 이축하중이나, 혼합 모드 하중이 되는 경우가 빈번하다. 이와 같은 혼합 모드 문제에 대하여, 1963년 Erdogan과 Sih¹⁾에 의해서 최초로 연구되어진 후, 이 문제는 많은 연구자들에 의하여 다루어져 왔다. 혼합 모드 균열은 모드 I의 경우와 비해서 최초의 형상과 다르게 성장하는 특성이 있으며, 균열의 성장 방향이 중요한 의미를 갖기 때문에 기존의 모드 I 해석과는 다르다고 하겠다.

혼합 모드 하중이 작용하는 경우에 균열 성장 하중과 성장 방향을 결정하기 위한 대표적인 파괴 기준에는

- 1) 최대 접선 응력 기준(MTS)
- 2) 최대 에너지 해방률 기준(MERR)
- 3) 최소 변형률 에너지 밀도 기준(SED)
- 4) 최대 접선 변형률 기준(MTSN)

등이 있다.

최대 접선 응력 기준은 Erdogan과 Sih¹⁾에 의해 제안된 기준인데, 이 파괴 기준은 접선 방향의 응력이 최대인 방향으로 균열이 진전한다는 가정에 의한 것으로, 취성 재료의 실험 결과^{2,3,4)}와 잘 일치하나, 많은 연구자들이 밝힌 바와 같이 전통적인 재료의 파손에 대한 학술 중의 최대 주 응력설처럼 취성 파괴에만 적용이 잘 된다는 문제점이 있다.

최대 에너지 해방률 기준은 사실상 Erdogan과 Sih¹⁾에 의해서 최초로 언급되었으며, Griffith의 에너지 해방률 개념에 기초를 둔 것으로 에너지 해방률이 최대인 방향으로 균열이 진전한다는 기준이다. 이 기준은 가지 형태로 성장한 탄성 응력장 해석에 관련된 수학적인 복잡성 때문에 적용이 어려우며, 해석 방법과 결과에 대하여는 쟁이 되고 있다.

[†]To whom correspondence should be addressed.
kim9000@chollian.net

Sih⁵⁻⁷⁾에 의해 제안된 최소 변형률 에너지 밀도 기준은 변형률 에너지 밀도 계수가 최소 값을 갖는 방향으로 균열이 진전한다는 가정에 의한 기준이나, 상대적인 최소 변형률 에너지 밀도 계수의 선택에 문제점이 있으며^{8,9)}, 일축 압축의 경우 실험치와 차이가 지는 문제점이 있다¹⁰⁾.

최대 접선 변형률 기준은 접선 변형률이 최대인 방향으로 균열이 진전한다는 가정에 기초한 기준으로 Chang¹¹⁾에 의하여 제안되어 졌다.

이와는 다른 파괴 기준으로서 Koo와 Choy¹⁰⁾는 접선 변형률 에너지 밀도 계수가 최대인 방향으로 균열이 진전한다는 가정 하에 최대 접선 변형률 에너지 밀도 기준(MTSE)을 제안하였는데, 일축 인장이나 압축인 경우에 다른 기준에 비해서 실험치와 잘 일치한다고 하였다.

혼합 모드 균열 문제에서 널리 사용되고 있는 응력장은 직교좌표계에 의한 응력장보다는 극좌표에 의한 Williams¹²⁾의 응력장인데, 고유 함수로부터 구한 Williams에 의한 응력장은 일반적으로 비특이항을 무시하고 사용된다. 그러나, Williams와 Ewing²⁾은 혼합 모드 균열 문제에서 고려되어 지는 비탄성영역의 임계 거리가 상당히 큰 값을 갖기 때문에, 비특이항을 무시할 수 없다고 하였다. 그들은 무한 경계에 작용하는 응력을 균열에 수직인 성분과 평행인 성분, 그리고 전단 성분으로 분해하여, 이중 평행인 성분(T 응력)으로부터 비특이항을 고려하였다.

Swedlow⁸⁾는 균열에 평행인 성분의 응력에 수직인 성분은 부의 응력으로 작용한다고 생각하여, Williams와 Ewing과는 다른 T 응력을 제안하였다. 또한 Kfour¹⁸⁾는 일축 인장 하중 하의 경우 $T = -0.05\sigma$ 가 됨을 보여 주었다.

본 연구에서는 이와 같은 T 응력에 대해서 알아보고, Williams의 응력해에서 비특이항을 무시한 경우와 2가지 경우의 T 응력을 파괴 기준에 적용하여, 그 효용성을 알아보고자 한다.

2. 2차원 평면에서의 응력장과 T 응력

무한 경계에 σ 의 인장응력과 τ 의 전단응력이 작용할 때의 직교 좌표에서의 균열 첨단 응력장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \\ &\quad - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ &\quad + \text{non-singular terms} \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ &\quad + \text{non-singular terms} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \\ &\quad + \text{non-singular terms} \end{aligned} \tag{1}$$

평면 변형률의 경우에는

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{2}$$

와 같다. 위 응력장은 다음과 같은 형태로도 나타낼 수 있는데.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} f_x(\theta) \\ f_y(\theta) \\ f_{xy}(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{higher order terms in } r \tag{3}$$

이다. 여기에서 L 은 r 에 독립이며, 균열에 평행으로 작용하는 분해된 수직응력의 크기에 종속된다. 이 L 의 값은 균열에 평행 되게 분해한 원방 수직 응력의 성분을 포함하고 있다. 이 L 을 T 응력라 하는데, Irwin¹³⁾과 Williams¹²⁾의 해석에도 나타나고 있다. Irwin¹³⁾은 모드 I의 경우 ($K_{II}=0$), 이 T 응력을 $-\sigma_{\alpha}$ 라 하였는데, 그는 유한 폭 판재의 균열 문제의 경우, 이 $-\sigma_{\alpha}$ 의 적절한 선택이 불확실하다고 하였다.

Williams¹²⁾는 극좌표에서의 고유 응력 함수로부터 다음과 같은 응력장을 구하였다.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{4r^{1/2}} \{ a_1(-5 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}) \\ &\quad + b_1(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2}) \} \\ &\quad + 4a_2 \cos^2 \theta + O(\mu^2) + \dots \end{aligned}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{4r^{1/2}} \left\{ a_1 \left(-3 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + b_1 \left(-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right\} + 4a_2 \sin^2 \theta + O(r^{1/2}) + \dots \quad (4)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{4r^{1/2}} \left\{ a_1 \left(-\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) + b_1 \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right\} - 2a_2 \sin 2\theta + O(r^{1/2}) + \dots$$

a_2 에 해당하는 항들을 직교 좌표로 나타내면,

$$\sigma_x = 4a_2, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

이 되는데, 인장이나, 굽힘 시편의 모서리를 따라서 응력이 작용하지 않으므로, $\sigma_x = 0$ 가 되어야 한다고 하였다. 따라서, $a_2 = 0$ 가 되어야 하며, 균열 첨단 근처, 즉, $r \rightarrow 0$ 일 때는 특이항($r^{-1/2}$)을 제외하고는 무시할 수 있다고 하였다. 이 응력장은 일반적으로 특이항만을 고려한 경우에 다음과 같은 형태로 바꾸어 사용하고 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2(2r)^{1/2}} \left\{ k_1 (3 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + k_2 (3 \cos \theta - 1) \sin \frac{\theta}{2} \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2(2r)^{1/2}} \left\{ k_1 (1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} - k_2 (3 \sin \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2(2r)^{1/2}} \left\{ k_1 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + k_2 (3 \cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

이때에 응력확대계수 k_1, k_2 는 식(4)와

$$a_1 + ib_1 = (2)^{-1/2} (k_1 - ik_2) \quad (6)$$

의 관계가 성립되며, Sih, et al.¹⁵⁾에 의하여 다음과 같이 제안되었다.

$$\begin{aligned} k_1 &= \sigma \sqrt{a} \sin^2 \beta \\ k_2 &= \sigma \sqrt{a} \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (7)$$

식(4)에서 비특이항을 Williams와 Ewing²⁾은 다음과 같은 방법으로 제안하였다. 무한 경계에 작

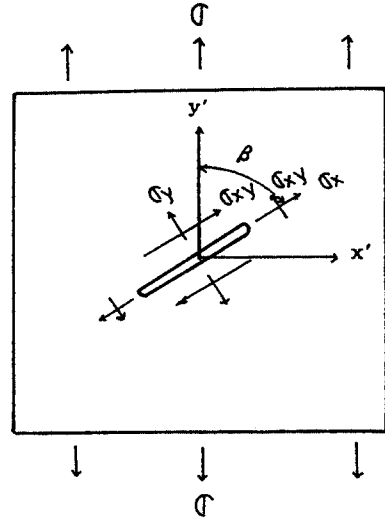


Fig. 1. Stress system

용하는 응력을 균열에 수직인 성분과 평행인 성분, 그리고 전단 성분으로 분해하였다(Fig. 1). 즉, $x'-y'$ 축을 반시계방향으로 $\theta = (90 - \beta)^\circ$ 만큼 회전시켰을 때,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{xy} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

이다. 이때,

$$\sigma_y = \sigma, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad (9)$$

이므로, 식(8)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \sin^2 (90^\circ - \beta) = \sigma \cos^2 \beta \\ \sigma_y &= \sigma \cos^2 (90^\circ - \beta) = \sigma \sin^2 \beta \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin (90^\circ - \beta) \cos (90^\circ - \beta) = \sigma \cos \beta \sin \beta \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)과 식(7)로부터,

$$\begin{aligned} k_1 &= \sigma \sqrt{a} \\ k_2 &= \tau_{xy} \sqrt{a} \end{aligned} \quad (11)$$

의 관계가 성립됨을 알 수 있다. 그러나, σ_x 는 응력확대계수와는 무관하며, 응력분포에 증첩된다

고 하였다. $r^{1/2}$ 이상의 고차항을 무시하고, 직교좌표에 의한 비특이항의 a_2 의 값을 알아보기 위하여, 식(5)의 극좌표계를 직교좌표계로 변환하면,

$$\sigma_x = 4a_2, \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

가 된다. 따라서, 식(4)에서 $4a_2$ 를 $\sigma \cos^2 \beta$ 로 놓음으로써 식(10)의 σ_x 를 중첩할 수 있다고 하였다. 이 경우 T 응력은 $T = \sigma \cos^2 \beta$ 이 되어진다. 그러나, Swedlow⁸⁾는 σ_x 의 응력이 균열을 예리하게 하는데 비하여, σ_y 는 균열을 무디게(blunting)하는 응력으로 작용하기 때문에, σ_x 에 부의 응력으로 작용하므로, σ_x 방향의 응력을 다음과 같이 제안하여 비특이항을 고려하였다. 즉,

$$T = \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \quad (12)$$

라 정의할 때 응력장이 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2(2r)^{1/2}} \left\{ k_1(3 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. + k_2(3 \cos \theta - 1) \sin \frac{\theta}{2} \right\} \\ &\quad + T \cos^2 \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2(2r)^{1/2}} \left\{ k_1(1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} - k_2(3 \sin \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \\ &\quad + T \sin^2 \theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2(2r)^{1/2}} \left\{ k_1 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + k_2(3 \cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \\ &\quad - T \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Swedlow에 의한 T 응력은 Eftis와 Subramonian¹⁷⁾이 이축하중이 작용하는 경우에 응력함수를 멱급수(power series)로 전개하여 구한 결과를 일축하중으로 해석한 경우, 즉

$$T = \sigma \cos 2\beta \quad (14)$$

와 동일하다. Eftis와 Liebowitz¹⁶⁾는 모드 I의 경우, $T = -\sigma$ 가 됨을 보여 주었는데, 식(14)에서 모드 I($\beta = \frac{\pi}{2}$)인 경우에는 동일한 결과가 된다.

Kfoury¹⁸⁾는 일축 인장 하중 하의 경우 $T = -0.05\sigma$ 가 됨을 보여 주었다. 또한, Hallström과

Grenstedt¹⁹⁾는 PVC foam에 대한 실험 결과에 식(13)를 적용한 결과, T 응력이 균열 진전 예측의 정확성을 높인다고 하였다.

3. 혼합 모드 파괴 기준

일반적으로 혼합 모드 파괴 기준으로 가장 잘 알려진 최대 접선 응력기준(Maximum Tangential Stress Criterion; MTS)은 Erdogan과 Sih¹⁾에 의하여 제안된 파괴 기준으로 다음과 같은 가정에 기초하고 있다. 즉,

(1) 균열 진전은 접선응력 σ_θ 가 최대인 방향으로 일어난다.

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0, \theta = \theta_0 \quad (15)$$

(2) 균열 진전은 접선응력 σ_θ 가 임계치에 도달할 때 일어난다.

$$\sigma_{cr} = \sigma_\theta |_{\theta = \theta_0} = \frac{1}{2(2r)^{1/2}} \left\{ k_1(1 + \cos \theta_0) \cos \frac{\theta_0}{2} - k_2(3 \sin \theta_0) \cos \frac{\theta_0}{2} \right\} \quad (16)$$

여기에서 θ_0 는 균열진전각이며, 임계응력과 최대 접선응력과의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{\sigma_{cr(90^\circ)}}{\sigma_{cr(\beta)}} = \frac{\sigma_{\theta \max(\beta)}}{\sigma_{\theta \max(90^\circ)}} \quad (17)$$

의 관계가 성립한다. $\sigma_{cr(90^\circ)}/\sigma_{cr(\beta)}$ 는 실험적으로 구하여지는 결과이며, $\sigma_{\theta \max(\beta)}/\sigma_{\theta \max(90^\circ)}$ 는 이론적으로 산출된 결과이다. 이 파괴 기준은 많은 연구자들에 의하여 다루어져 왔으며, 사용하기에 편리한 장점이 있다. 이 기준은 취성재료의 실험 결과와 잘 일치하는 것으로 알려져 있다.

최소 변형률 에너지 밀도 기준(Minimum Strain Energy Density Criterion; SED)은 Sih⁵⁻⁷⁾는 미소요소 $dA = r d\theta dr$ 에 축적된 변형률 에너지

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_r \epsilon_r + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) dA \quad (18)$$

로부터, 변형률 에너지 밀도 계수 S 를 다음과 같이 정의하였다.

$$S = a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2 \quad (19)$$

여기에서 계수 $a_{ij}(i, j=1, 2)$ 는

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu} \{ (1 + \cos \theta)(x - \cos \theta) \} \\ a_{12} &= \frac{1}{16\mu} \sin \theta \{ 2 \cos \theta - (x - 1) \} \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu} \{ (x + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1) \} \end{aligned} \quad (20)$$

이다. 여기에서 μ 는 탄성계수이고, x 는 평면응력상태와 평면 변형률 상태일 때, 각각 $(3-\nu)/(1+\nu)$ 와 $(3-4\nu)$ 이다. 이 파괴 기준은 다음과 같은 두 개의 가정에 기초하고 있다.

이 S 는 변형률 에너지와 다음과 같은 관계가 있다.

$$S = r_o \frac{dW}{dA} \quad (21)$$

의 관계가 있는데, 여기에서 r_o 는 임계 거리로서 선형 탄성적인 해석이 가능한 영역이며, 재료의 물성치이다.

(1) 초기 균열 진전은 변형률 에너지 밀도 계수 S 가 최소 값을 갖는 방향으로 일어난다. 즉,

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0, \quad \theta = \theta_0 \quad (22)$$

(2) 초기 균열 진전은 변형률 에너지 밀도 계수 S 가 임계치에 도달할 때 발생한다.

$$S_{cr} = a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2, \quad \theta = \theta_0 \quad (23)$$

여기에서 θ_0 는 균열진전각이다. 또한, 임계응력과의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{\sigma_{cr(90^\circ)}}{\sigma_{cr(\theta)}} = \sqrt{\frac{S_{cr(90^\circ)}}{S_{cr(\theta)}}} = \sqrt{\frac{S_{\min(\theta)}}{S_{\min(90^\circ)}}} \quad (24)$$

이 파괴 기준은 인장인 경우에는 실험치와 잘

일치하나, 압축인 경우에는 실험치와 차이가 있다고 하겠으며¹⁰⁾, 인장이나 압축의 경우에 S 의 θ 에 대한 분포가 같기 때문에 S_{\min} 의 선택에 문제점이 있다⁹⁾고 보고 되어 있으며, 모드 III의 경우에는 S 가 일정한 값이 되어 균열 진전 방향을 예측할 수 없다고 알려져 있다. 그러나, 이 기준은 연구자들에 의하여 적용에 대한 연구가 많이 이루어졌으며, 특히 혼합 모드 피로 문제에 대한 연구가 다른 기준에 비하여, 많이 이루어졌으며, 적용하기 편리하다는 장점이 있다.

최대 접선 변형률 에너지 밀도 기준(Maximum Tangential Strain Energy Density Criterion; MTSE)은 Koo와 Choy¹⁰⁾에 의해 제안된 파괴 기준으로, 미소 요소 $dA = r d\theta dr$ 에 축적된 접선 변형률 에너지

$$dW_\theta = \frac{1}{2} \sigma_\theta \epsilon_\theta dA \quad (25)$$

의 식에 식(5)의 응력해를 적용시켜 접선 변형률 에너지 밀도를 다음과 같이 정의하였다.

$$\frac{dW_\theta}{dA} = \frac{1}{r} (b_{11}k_1^2 + 2b_{12}k_1k_2 + b_{22}k_2^2) \quad (26)$$

여기에서 계수 $b_{ij}(i, j=1, 2)$ 는

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{64\mu} \{ (1 + \cos \theta)(x + 2 + \cos \theta) \} \\ b_{12} &= \frac{1}{64\mu} \{ \sin \theta (-3 \cos \theta - x - \frac{3}{2}) \} \\ b_{22} &= \frac{1}{64\mu} \{ 3 \sin \theta (x + 3 \cos \theta) \} \end{aligned} \quad (27)$$

이다. 여기에서 μ 는 탄성계수이고, x 는 평면응력상태와 평면 변형률 상태일 때, 각각 $(3-4\nu)/(1+\nu)$ 와 $(3-4\nu)$ 이다.

위 식에서 접선 변형률 에너지 밀도 계수 C 를 다음과 같이 정의하였다.

$$C = b_{11}k_1^2 + 2b_{12}k_1k_2 + b_{22}k_2^2 \quad (28)$$

균열 진전은 다음과 같은 두 개의 가정에 기초하고 있다.

(1) 초기 균열 진전은 접선 변형률 에너지 밀도 계수 C 가 최대값을 갖는 방향으로 일어난다.

즉,

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} < 0, \theta = \theta_0 \quad (29)$$

(2) 초기 균열 진전은 변형률 에너지 밀도 계수 C 가 임계치에 도달할 때 발생한다.

$$C_{cr} = b_{11}k_1^2 + 2b_{12}k_1k_2 + b_{22}k_2^2, \theta = \theta_0 \quad (30)$$

여기에서 θ_0 는 균열진전각이다. C_{cr} 와 k_{1c} 와의 관계는 평면 변형률 조건일 때,

$$C_{cr} = \frac{(1-2\nu)}{8\mu} k_{1c}^2 \quad (31)$$

이 되며, 임계응력과의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{\sigma_{cr(90^\circ)}}{\sigma_{cr(\beta)}} = \sqrt{\frac{C_{cr(90^\circ)}}{C_{cr(\beta)}}} = \sqrt{\frac{C_{max}(\beta)}{C_{max}(90^\circ)}} \quad (32)$$

여기에서의 C_{max} 는 균열성장각에서의 C 값이다. 이 C 는 점선 변형률 에너지를 다음과 같은 관계가 있다.

$$C = r_o \frac{dW_\theta}{dA} \quad (33)$$

의 관계가 있는데, 여기에서 r_o 는 임계 거리로서 선형 탄성적인 해석이 가능한 영역이며, 재료의 물성치이다. 이 파괴 기준은 일축 인장이나 압축의 경우에도 실험치와 잘 일치한다고 보고하고 있으나, 모드 III의 경우에는 아직 적용이 되지 않는다는 문제가 있으므로, 더욱 연구가 필요하다고 하겠다.

4. 일축 인장과 압축 하중의 경우에 혼합 모드 파괴 기준의 적용

본 연구에서는 T 응력의 영향과 적절한 T 응력의 식을 찾기 위해, $r_o/a=0.01$ 인 경우, 식(13)에 $T=0$, $\sigma \cos^2 \beta$, $\sigma \cos(2\beta)$ 와 Kfouri¹⁸⁾의 결과를 혼합 모드 경우로 환산한 $0.05\sigma \cos(2\beta)$ 의 4가지 경우에 대하여 파괴 기준들을 비교하였다. 본 연구에서 일축 인장인 경우 비교한 실험치는 Erdogan

과 Sih¹⁾, Williams와 Ewing²⁾과 Palaniswamy와 Knauss²⁰⁾의 결과이며, 일축 압축인 경우에는 노치 첨단의 곡률반경비가 $\rho/a=0.031$, 0.055 인 Tirosh와 Elicatz³⁾의 실험 결과와 비교하였다.

일축 인장 하중이 작용할 때, 각 파괴 기준에 T 응력에 대한 4개의 경우를 적용하여 비교한 그림은 Figs 2-7과 같다.

Figs 2-4는 MTS, SED와 MTSE의 경우에 하중 방향에 대한 균열각, β 와 균열진전각, θ_0 의 관계를 각각 나타낸 그림으로, $T=\sigma \cos^2 \beta$ 와 $\sigma \cos(2\beta)$ 는 파괴 기준에 관계없이 실험치와 잘 일치하고 있으나, $T=0$ 과 $0.05\sigma \cos(2\beta)$ 인 경우는 거의 비슷한 값을 가지며, Fig. 3의 SED를 제외하고는 $T=\sigma \cos^2 \beta$, $\sigma \cos(2\beta)$ 의 경우와 $T=0$ 과 $0.05\sigma \cos(2\beta)$ 가 균열각이 작은 범위에서 차이가 많이 나

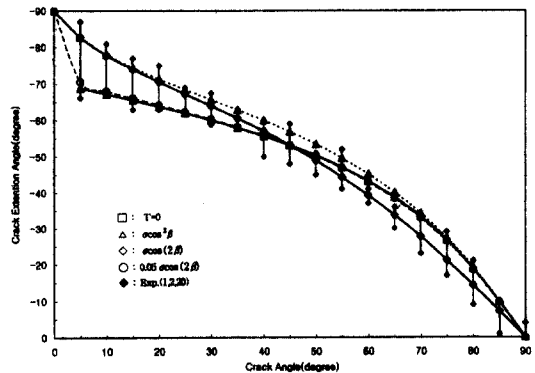


Fig. 2. Crack extension angle (θ_0) vs. the crack angle β according to MTS as compared to T-stress in the uniaxial tension

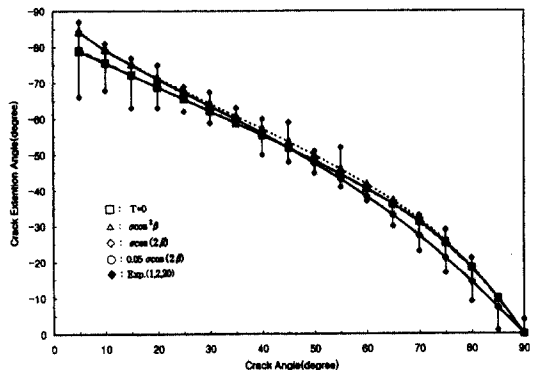


Fig. 3. Crack extension angle (θ_0) vs. the crack angle β according to SED as compared to T-stress in the uniaxial tension

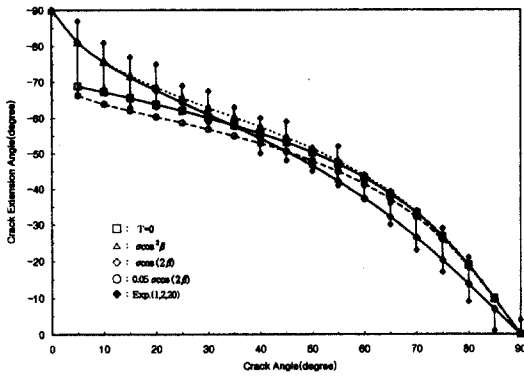


Fig. 4. Crack extension angle (θ_0) vs. the crack angle β according to MTSE as compared to T-stress in the uniaxial tension

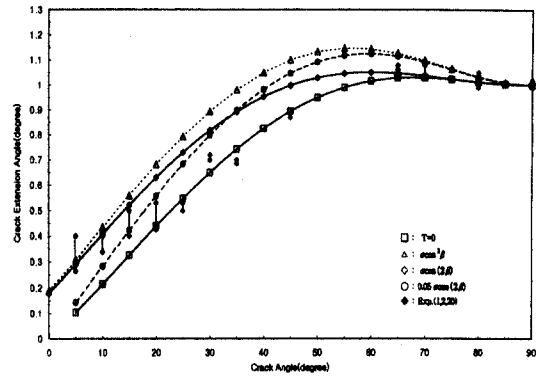


Fig. 7. Critical stress ratio vs. the crack angle β according to MTSE as compared to T-stress in the uniaxial tension

고 있다.

Figs 5-7은 MTS, SED와 MTSE의 경우에 하중

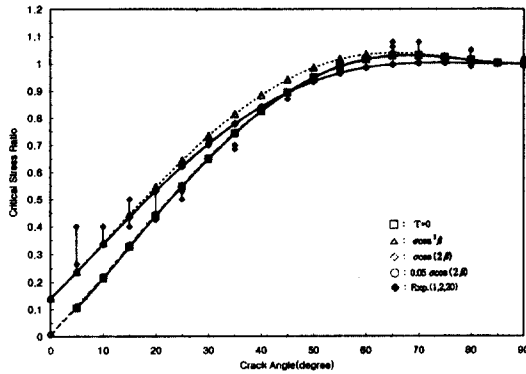


Fig. 5. Critical stress ratio vs. the crack angle β according to MTS as compared to T-stress in the uniaxial tension

방향에 대한 균열각, β 와 균열 진전 임계 응력 비, $\sigma_{cr(90^\circ)}/\sigma_{cr(\beta)}$ 의 관계를 각각 나타낸 그림으로, Fig. 5의 MTS에 의한 해석 결과는 실험치와 비교적 잘 일치하고 있다. Fig. 6의 SED에 의한 해석 결과는 실험치 보다 작은 경향을 보이나, Fig. 7의 MTSE는 약간 큰 경향을 보이고 있다. 또한, 전체적으로 $T=0$ 과 $0.05\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우는 거의 비슷한 값을 가지며, 앞의 경우나 $\sigma\cos^2\beta$ 인 경우에 비해서 $\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우가 실험치와 보다 더 잘 일치하고 있는 경향을 보이고 있다.

일축 압축 하중이 작용할 때, 각 파괴 기준에 T 응력에 대한 4개의 경우를 적용하여 비교한 그림은 Figs 8-13과 같다.

Figs 8-10은 MTS, SED와 MTSE의 경우에 하중 방향에 대한 균열각, β 와 균열진전각, θ_0 의

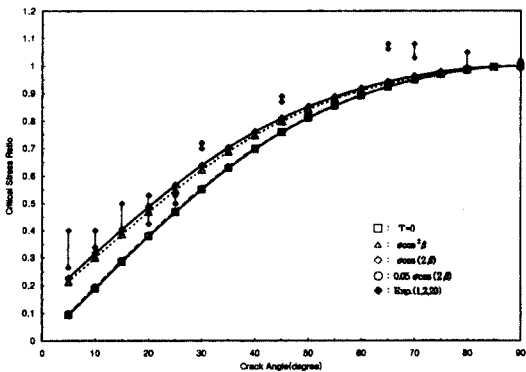


Fig. 6. Critical stress ratio vs. the crack angle β according to SED as compared to T-stress in the uniaxial tension

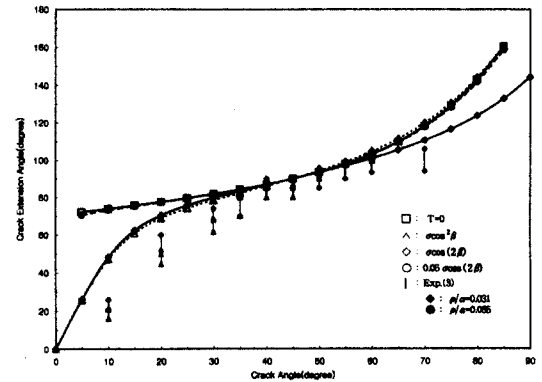


Fig. 8. Crack extension angle (θ_0) vs. the crack angle β according to MTS as compared to T-stress in the uniaxial compression

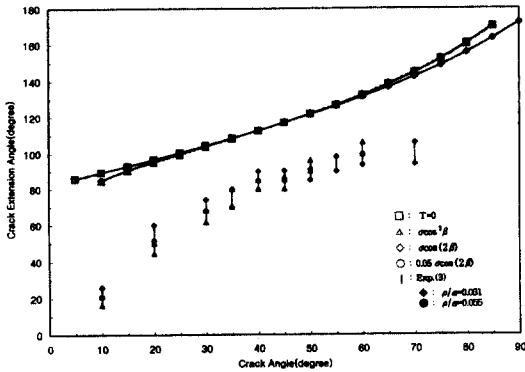


Fig. 9. Crack extension angle (θ_0) vs. the crack angle β according to SED as compared to T-stress in the uniaxial compression

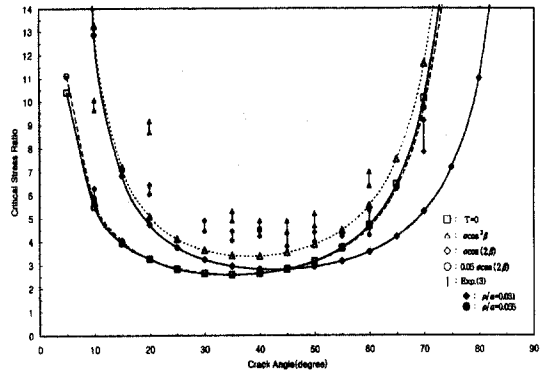


Fig. 11. Critical stress ratio vs. the crack angle β according to MTS as compared to T-stress in the uniaxial compression

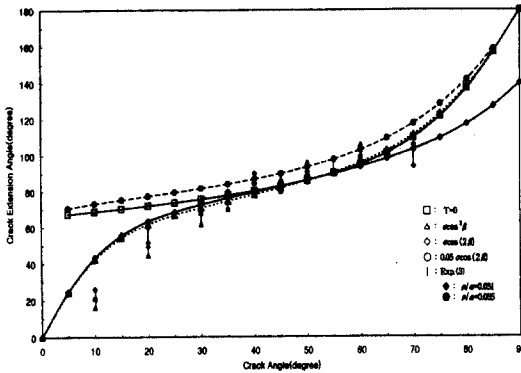


Fig. 10. Crack extension angle (θ_0) vs. the crack angle β according to MTSE as compared to T-stress in the uniaxial compression

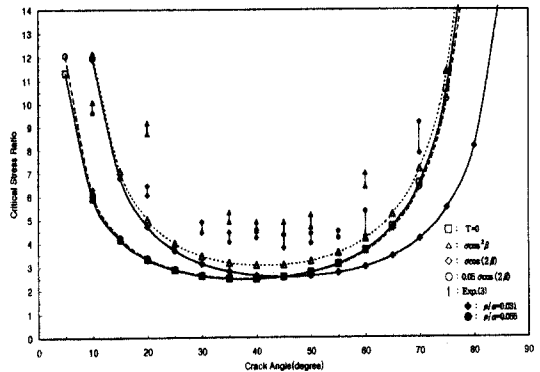


Fig. 12. Critical stress ratio vs. the crack angle β according to SED as compared to T-stress in the uniaxial compression

관계를 각각 나타낸 그림으로, Fig. 9의 SED는 실험치와 경향이 많이 다르다. Fig. 8의 MTS와 Fig. 10의 MTSE는 비교적 실험치와 경향이 잘 일치하고 있으며, 특히 $\sigma \cos(2\beta)$ 의 경우가 실험치와 경향이 더욱 잘 일치하고 있다. 일축 인장인 경우와 마찬가지로 T=0과 $0.05 \cos(2\beta)$ 인 경우는 거의 비슷한 값을 가지며, 실험치와 다른 경향을 보이고 있다.

Figs 11-13은 MTS, SED와 MTSE의 경우에 하중 방향에 대한 균열각, β 와 균열 진전 임계 응력비, $\sigma_{cr}(\beta)/\sigma_{cr}(90^\circ)$ 의 관계를 각각 나타낸 그림으로, 여기에서의 $\sigma_{cr}(90^\circ)$ 는 일축 인장인 경우의 값이다. 이 관계를 고찰해 보면, Fig. 11의 MTS가 실험치와 경향이 비교적 잘 일치하고 있으며, 특히, $\sigma \cos^2\beta$ 인 경우가 실험치와 보다 더 잘 일

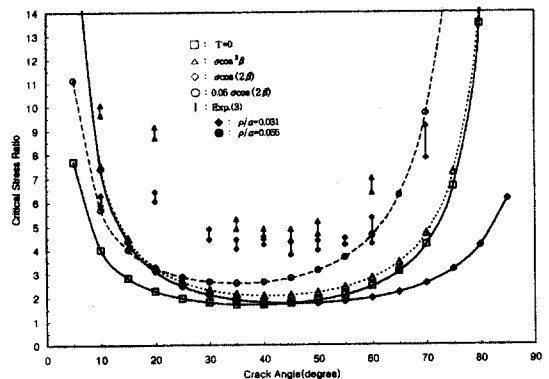


Fig. 13. Critical stress ratio vs. the crack angle β according to MTSE as compared to T-stress in the uniaxial compression

치하고 있다. 그러나, 현재 다루고 있는 응력장

에 해당하는 공간이 없는 직선 균열은 시편 가 공상 불가능하며, 본 연구에서 비교한 실험치는 노치 첨단 곡률반경비가 $\rho/a=0.031, 0.055$ 인 Tirosh와 Elicatz³⁾의 실험 결과로써, 균열의 공간이 특히, 일축 압축인 경우에 하중에 미치는 크기 때문에 정확한 비교를 할 수는 없지만, 실험 결과를 분석해 볼 때, 균열 진전 시작각, θ_0 는 곡률반경비에 따라 서로 섞여서 영향을 비교적 덜 받음을 알 수 있으나, 균열 진전 임계 응력비, $\sigma_{cr(\beta)}/\sigma_{cr(90^\circ)}$ 는 $\rho/a=0.031$ 일 때가 0.055인 경우에 비하여 작으므로, $\rho/a=0$ 일 때는 더욱 작을 것이란 추론할 수 있다. 이에 따르면, 이 경우도 역시 $\sigma\cos^2\beta$ 인 경우보다 $\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우가 더 나은 결과를 해석해 낼 수 있다고 하겠다. 이 경우도 전체적으로 $T=0$ 과 $0.05\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우는 거의 비슷한 값을 가진다.

일반적으로 많이 사용하고 있는 $\sigma\cos^2\beta$ 인 경우보다 $\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우가 실험치와 보다 더 잘 일치하기도 하지만, Swedlow⁸⁾의 균열에 평행인 성분의 응력에 수직인 성분은 부의 응력으로 작용한다고 생각하여 구한 결과나, Eftis와 Subramonian¹⁷⁾이 이축하중이 작용하는 경우에 응력 함수를 멱급수(power series)로 전개하여 구한 결과를 일축 하중으로 해석한 경우가 같기 때문에, $\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우가 더 신뢰성이 있다고 생각되어 진다.

5. 결론

이상의 연구로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 일축 인장이나 압축 하중의 경우에 T 응력이 0인 경우와 $0.05\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우는 해석 결과가 거의 비슷한 값을 가지므로, $0.05\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우는 의미가 없다고 하겠다.
- 2) 일축 인장이나, 압축 하중의 경우에 $T=\sigma\cos^2\beta$ 와 $\sigma\cos(2\beta)$ 는 비교적 실험치와 경향이 잘 일치하고 있으나, $\sigma\cos^2\beta$ 인 경우에 비해서 $\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우가 실험치와 보다 더 잘 일치하고 있는 경향을 보이고 있으며, 멱급수(power series)로 전개하여 구한 결과를 일축 하중으로 해석한 경우가 같기 때문에, $\sigma\cos(2\beta)$ 인 경우가 더 신뢰성이 있다고 생각되어 진다.

3) 이와 같은 T 응력을 고려한 일축 인장이나, 압축 하중의 경우에 SED에 비하여, MTS와 MTSE가 더 효용성이 있다고 하겠다.

감사의 글 : 본 연구는 동서울대 교내연구비 지원에 의한 결과입니다.

참고문헌

- 1) F. Erdogan and G. C. Sih, J. Basic Engng., Trans. ASME Vol. 85, pp. 519~527, 1963.
- 2) J. G. Williams and P. D. Ewing, Int. J. of Fracture Mech., Vol. 8, No. 4, pp. 441~446, 1972.
- 3) J. Tirosh and Elicatz, Engng. Fracture Mech., Vol. 14, pp. 27~38, 1981.
- 4) P. D. Ewing and J. G. Williams, Int. J. of Fracture Mech., Vol. 10, pp. 537~544, 1974.
- 5) G. C. Sih, Engng. Fracture Mech., Vol. 5, pp. 365~377, 1973.
- 6) G. C. Sih, Mech. of Fracture 1(ed. G.C. Sih), Noordhoff Int. Publishing, Leyden, pp. XXI~XLV, 1973.
- 7) G. C. Sih, Int. J. of Fracture, Vol. 10, pp. 305~321, 1974.
- 8) J. L. Swedlow, Cracks and fracture, ASTM STP 601, pp. 506~521, 1976.
- 9) K. J. Chang, J. appl. Mech., Vol. 49, pp. 377~382, 1982.
- 10) J. M. Koo and Y. S. Choy, Engng. Fracture Mech., Vol. 39, No. 3, pp. 443~449, 1991.
- 11) K. J. Chang, Engng. Fracture Mech., Vol. 14, pp. 107~124, 1981.
- 12) M. L. Williams, J. Appl. Mech., Vol. 24, No. 1, pp. 109~114, 1957.
- 13) G. R. Irwin, J. Appl. Mech., Vol. 24, pp. 361~364, 1957.
- 14) J. R. Rice, J. Mech. Phys. Solids Vol. 22, pp. 17~26, 1974.
- 15) G. C. Sih, P. C. Paris, and F. Erdogan, J. of Appl. Mech., Vol. 29, pp. 306~312, 1962.
- 16) J. Eftis and H. Liebowitz, Int. J. Fracture Mech., Vol. 8, pp. 383~392, 1972.
- 17) J. Eftis and N. Subramonian, Engng. Fracture Mech., Vol. 10, pp. 41~67, 1978.
- 18) A. P. Kfoury, Int. J. Fracture, Vol. 30, pp. 301~315, 1986.
- 19) S. Hallström and J. L. Grenestedt, Int. J. Fracture, Vol. 88, pp. 343~358, 1997.