

(n,k)-스타 그래프에서의 새로운 링 임베딩 및 결함허용 임베딩으로의 응용

(New Ring Embedding and its Application into
Fault-tolerant Embedding in (n,k)-star Graphs)

장정환[†] 좌경룡^{**}
(Jung-Hwan Chang) (Kyung-Yong Chwa)

요약 본 논문에서는 상호연결망 그래프 중 하나인 (n,k)-스타 그래프에 대한 링 임베딩 문제를 다룬다. (n,k)-스타 그래프에 대한 링 임베딩 전략의 유연성을 개선한 새로운 임베딩 기법을 제시하고, 아울러 예지에 결함을 갖는 경우의 결함허용 링 임베딩 문제에 응용 가능성을 보여줌으로써 본 기법의 확장성에서의 우수함을 밝히고자 한다.

본 논문에서 다루고 있는 사이클 특성 관련 연구는 병렬처리 분야에서의 멀티캐스팅 등과 같이 내재된 사이클 특성을 활용하는 분야에 응용이 가능하다.

Abstract In this paper, we consider ring embedding problem on (n,k)-star graphs. We first present a new ring embedding strategy and also prove the superiority in expandability by showing its application into the fault-tolerant ring embedding problem with edge faults. This result can be applied to the multicating applications that use the underlying cycle properties on the multi-computer system.

1. 서론

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 알고리즘들을 효율적으로 수용하여 제 성능을 발휘할 수 있도록 하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는 노드들의 연결 구조를 그래프로 표현한 상호연결망(interconnection network) 위상의 역할이 매우 중요하데, 그 이유는 해당 그래프에 대한 이론적인 특성 분석을 통해 해당 병렬처리시스템의 성능에 대한 예측이 가능하기 때문이다. 일반적으로 상호연결망의 성능에 큰 영향을 미치는 그래프 이론적인 요소로는 지름(diameter), 연결도(connectivity), 고장 허용도(fault tolerance), 라우팅 알고리즘의 간결성 및 효율성 등이 중요하게 평가되고 있다.

따라서 이러한 요소들의 특성을 비교 분석하여 보다

좋은 성능의 상호연결망을 설계하려는 시도는 그래프 이론 및 병렬처리 분야에서 많은 관심을 받고 있다. 뿐만 아니라 알고리즘에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호연결망 상호간 시뮬레이션을 위한 체계적인 접근으로서 그래프 임베딩(embedding) 문제가 대두하게 되었다[1,2].

지난 십 수년간 큰 관심을 받아 온 대표적인 상호연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube 또는 (이진) n-큐브)를 꼽을 수 있다[3]. 하이퍼큐브보다 우수한 상호연결망에 대해서도 많은 연구가 진행되었는데[4], 스타 그래프(star graph 또는 n-스타) 또한 성능에 영향을 주는 여러 가지 요소들에서 기존의 하이퍼큐브보다 우수한 것으로 알려져 있으며[5,6], 그래프 이론적인 특성에 대해서도 많은 연구가 있었다[7].

한편, 스타 그래프는 이러한 성능적인 요소에서의 우수함에도 불구하고 실질적인 응용분야에서 상호연결망으로 활용시 원하는 노드 개수를 지닌 적절한 차원을 결정하기가 어렵다는 단점이 지적되고 있다. 즉 n-차원 스타 그래프의 노드 수는 n!이라는 값에 의해 결정되기 때문에 n 값이 증가함에 따라 인접된 차원간의 차가 기

[†] 비 회 원 : 한국전기통신공사 통신망관리센터 선임연구원
jjh0726@kt.co.kr

^{**} 종신회원 : 한국과학기술원 전산학과 교수
kychwa@jupiter.kaist.ac.kr

논문접수 : 1999년 6월 7일
심사완료 : 2000년 1월 24일

하급수적으로 커지게 되므로 다양한 노드 수를 갖는 그래프 형태를 제공하지 못하기 때문에 현실적으로 구현하는데 있어서는 적당한 크기를 결정하기가 쉽지 않다는 것이다. 이러한 n -스타 그래프의 단점을 보완하기 위한 새로운 상호연결망으로서 (n,k) -스타 그래프가 등장하게 되었다[8].

표 1 상호연결망 그래프 특성

위 상	노드 수	에지 수	분지 수	지 류	동질성
n -큐브	2^n	$n2^{n-1}$	n	n	노드, 에지
n -스타	$n!$	$(n-1)n!/2$	$n-1$	$3(n-1)/2$	노드, 에지
(n,k) -스타	$n!/(n-k)!$	$(n-1)n!/2(n-k)!$	$n-1$	$2k-1, \text{ if } k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ $\lfloor (n-1)/2 \rfloor + k, \text{ otherwise}$	노드

n -스타 그래프에 대한 사이클 특성에 대해서는 이미 잘 알려져 있으며[9,10], 이진-트리 부류[11] 및 메쉬[12] 등의 구조를 n -스타 그래프로 임베딩하는 문제를 연구한 결과도 이미 잘 알려져 있다.

한편 (n,k) -스타 그래프는 [8]의 정의에 의하면 n -스타 그래프를 포함하는 초-집합(super-set)에 해당하지만 (n,k) -스타 그래프 특성을 밝힌 연구결과는 아직까지는 다양하지 못한 실정이다[13,14].

(n,k) -스타 그래프에서의 헤밀톤 사이클 특성을 분석한 연구로는 [15]의 연구결과가 알려져 있으나, [15]에서 제시하고 있는 헤밀톤 사이클의 구성 전략은 (n,k) -스타 그래프에 내재된 부그래프(sub-graph)로서의 $(n-k+3,3)$ -스타 그래프 및 $(n-k+2,2)$ -스타 그래프에서의 헤밀톤 사이클 구성을 기반으로 하여 상향식(bottom-up) 구성과정을 통해 재귀적 확장을 하게 되므로 최종적인 (n,k) -스타 그래프에서의 헤밀톤 사이클 구성 자체가 최초의 기반이 되는 두 부그래프에서의 사이클 구성에 의존적인(dependent) 사이클로 고정되는 경향이 있으며, 이러한 접근방법은 결국 고장허용 임베딩 등과 같은 응용분야로의 확대 적용 고려시 그대로 적용시키기에는 다소 무리가 있을 것으로 예상된다.

따라서 본 논문에서는 보다 유연한 사이클 구성을 보장해 줄 수 있는 새로운 하향식(top-down) 기법을 제시함으로써 고장허용 링 임베딩 등의 분야로 쉽게 확대 응용할 수 있는 방안을 제시하고자 한다.

사이클(혹은 링)은 대부분 알고리즘들의 수행에 필수적인 기본 구조일 뿐만 아니라 노드간의 라우팅 관련 분야에서 특별히 중요한 역할을 하고 있어 상호연결망

그래프에 대한 링 임베딩 특성은 상호연결망으로서 갖추어야 할 중요한 요소 중 하나로 평가받고 있다[16].

본 논문의 구성을 살펴보면 이어지는 제2절에서는 본 논문에서 주로 다루게 될 (n,k) -스타 그래프에 대한 정의 및 특성을 살펴보고 제3절에서 헤밀톤 사이클과 관련된 주요 성질들을 분석하여 헤밀톤 사이클을 찾는 새로운 링 임베딩 알고리즘을 제시하며, 이러한 기법을 예지에 고장을 갖는 고장허용 링 임베딩 문제로 응용가능함을 제4절에서 설명하고, 마지막 제5절에서 결론을 맺는다.

1. (n,k) -스타 그래프 특성

본 절에서는 (n,k) -스타 그래프에 대한 일반적인 성질 중에서 사이클 특성과 관련된 주요 성질들을 살펴보고자 한다. 본 논문에서 표현식 $\langle n \rangle$ 은 자연수의 집합 $\{1, 2, \dots, n\}$ 을 의미한다.

[정의 1] $1 \leq k < n$ 을 만족하는 주어진 두 정수 n 과 k 값에 의해 다음과 같이 (n,k) -스타 그래프 $S_{n,k}$ 를 정의한다[8]. 즉 노드의 집합 $V(S_{n,k})$ 는 아래와 같이 정의한다.

$$V(S_{n,k}) = \{p_1 p_2 \dots p_k \mid p_i \in \langle n \rangle, 1 \leq i \leq k\}$$

여기서 $V(S_{n,k})$ 에 속하는 임의의 노드 $p = p_1 p_2 \dots p_k$ 는 다음과 같은 규칙에 의해 해당되는 노드들과 두 종류의 에지들로 상호 연결시킨다.

- ① $2 \leq i \leq k$ 를 만족하는 노드 $q = p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_k$ 와 i -차원 에지를 통해 연결하고,
- ② 노드들의 집합 $\{x p_2 \dots p_i \dots p_k \mid x \in \langle n \rangle \setminus \{p_j \mid 1 \leq j \leq k\}\}$ 에 해당하는 노드들과 각각 1-차원 에지로 연결시킨다(여기서 부호 '\setminus'는 차집합을 의미한다).

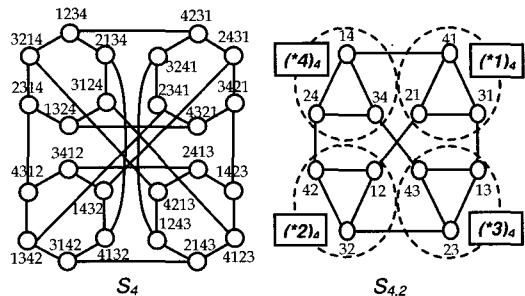


그림 1 4-스타 및 (4,2)-스타 그래프

(그림 1)은 (4,2)-스타 그래프의 예를 대응되는 4-스타 그래프와 비교하여 보여주고 있는데 4-스타 그래프에서는 2-차원, 3차원, 또는 4-차원 에지들만 존재하나 (4,2)-스타 그래프에서는 노드 14와 인접된 에지들을 살펴보면 2-차원 에지로 연결된 노드 41 외에도 4-스타 그래프에서는 볼 수 없었던 1-차원 에지를 통해 연결된 노드 24 및 34가 있음을 알 수 있다.

이어서 (n,k)-스타 그래프의 부그래프(sub-graph)를 나타내는 표현식을 아래와 같이 정의하고자 한다.

[정의 2] 표현식 $S = (s_1, s_2, \dots, s_k)_n$ 는 $n > k$ 를 만족하고 해당 범위 내의 각 i 에 대해서 $s_i \in \{<n> \cup \{*\}$ 를 만족하는 길이 k 의 스트링 표현이라고 하자. 만일 S 의 스트링 표현식 내에 $1 \leq l \leq k$ 를 만족하는 l 개의 '*'부호를 포함하고 있다면 S 는 $S_{n,k}$ 로부터 분할된 결과로 얻어진 $(n-k+l, l)$ -부스타 그래프를 나타내고 있다. 여기서 특별한 부호인 '*'는 해당되는 차원이 미확장 상태임을 의미하며 집합 $<n> \setminus \{U_{1 \leq j \leq k} \{s_j \mid s_j \neq '*'\}\}$ 에 해당되는 임의의 부호가 올 수 있음을 의미한다.

[정의 3] $S_{n,k}$ 내에서 $X = (x_1 \dots x_j \dots x_k)_n$ 를 $x_j = '*'$ 인 $(n-l, k-l)$ -부스타 그래프라고 하자. X 상에 j -차원 확장(j-dimensional expansion)을 적용한다는 의미는 X 를 차원 j 를 따라 확장시킴으로써 $n-l$ 개의 $(n-l-l, k-l-l)$ -부스타 그래프들로 분할함을 의미한다. 본 정의는 순서를 갖는 차원들의 집합으로 그 범위를 확장할 수도 있다. 즉 $m < k-l$ 인 m 에 대해 $D = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ 라고 가정하면, D -확장은 d_1 -확장, d_2 -확장, ..., d_m -확장 순으로 m 번의 연속적인 확장을 차례로 적용함을 의미하게 되며, 적용 후에는 $(n-l)(n-l-1) \dots (n-l-m+1)$ 개의 $(n-l-m, k-l-m)$ -부스타 그래프들로 분할된다.

예를 들어 $X = (21 * * 5)_8$ 는 $S_{8,5}$ 에 존재하는 (5,2)-부스타 그래프를 나타낸다. 여기서 X 에 4-차원 확장을 적용하게 되면 $(21 * 35)_8, (21 * 45)_8, (21 * 65)_8, (21 * 75)_8$, 그리고 $(21 * 85)_8$ 의 5개 (4,1)-부스타 그래프들로 분할할 수 있다.

차원에 대한 확장과정에서 첫 번째 차원인 1-차원은 특별하게 취급을 하게 되는데, 만일 1-차원 확장을 적용하게 되면 적용결과 생성되는 부스타 그래프들에서 더 이상 재귀적 성질을 기대할 수 없게 되어 위에서 언

급된 성질들을 활용할 수 없게 되기 때문이다.

[정의 4] $S_{n,k}$ 에서 임의의 인접한 두 $(n-j, k-j)$ -부스타 그래프를 X, Y 라고 하자. 만일 X 와 Y 의 스트링 표기법에서 '*'를 제외한 부호들이 위치하고 있는 차원들 중에서 오직 하나의 차원에서만 대응되는 부호가 서로 다른 경우에 X 와 Y 는 서로 인접 관계(adjacent relation)에 있다고 한다. 인접 관계의 두 $(n-j, k-j)$ -부스타 그래프 X 및 Y 에 대해서 X 로부터 Y 로의 차-부호(difference in symbol)란 X 를 구성하는 부호 중에서 Y 에는 존재하지 않는 부호를 의미하고, $difS(X, Y)$ 로 표기한다. 유사한 방법에 의해 X 로부터 Y 로의 차-차원(difference in dimension)은 $difD(X, Y)$ 에 해당하는 부호가 위치하고 있는 차원을 의미하고 $difD(X, Y)$ 로 표기한다. 일반적으로 $difD(X, Y) = difD(Y, X)$ 가 성립하지만, $difS(X, Y) \neq difS(Y, X)$ 이다.

[성질 1] $(n, n-1)$ -스타 그래프 $S_{n, n-1}$ 은 n -스타 그래프 S_n 과 동형(isomorphic)이다[13].□

[보조정리 1] (m, l) -스타 그래프 $S_{m, l}$ 은 m 개의 노드를 갖는 완전그래프 K_m 과 동형(isomorphic)이다.

[증명] (n, k) -스타 그래프의 정의에 의해 $S_{m, l}$ 은 m 개의 노드로 구성되어 있으며 $m(m-1)/2$ 개의 1-에지들로만 구성된 정규(regular) 그래프임을 쉽게 알 수 있다. 또한 1-에지의 정의에 의하면 각 노드는 자신을 제외한 다른 모든 노드들과 1-차원 에지를 통해 연결되어 있음을 알 수 있다. 이는 m 개의 노드를 갖는 완전 그래프 K_m 과 동형임을 의미한다.□

[정의 5] $S_{n,k}$ 로부터 파생된 임의의 연속된 $(n-j, k-j)$ -부스타 그래프들의 집합 $X = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 에서 각 X_i 가 전후에 위치한 두개의 $(n-j, k-j)$ -부스타 그래프들 $X_{(i-1) \bmod r}$ 과 $X_{(i+1) \bmod r}$ 상호간에 인접(adjacent) 관계를 만족하는 경우에 X 를 길이 r 의 $(n-j, k-j)$ -부스타-링이라고 칭하고, $R'_{n-j, k-j}$ 로 표기한다. 여기서 각 X_i 를 $(n-j, k-j)$ -부스타-노드로, X_i 와 인접 $(n-j, k-j)$ -부스타-노드와의 연결에 참여하고 있는 에지들의 집합을 $(n-j, k-j)$ -부스타-에지로 일컫는다.

$(n-j, k-j)$ -부스타-링 내의 인접한 두 $(n-j, k-j)$ -부스타-노드를 각각 $X = (x_1 x_2 \dots x_k)_n$ 와 $Y = (y_1 y_2 \dots y_k)_n$ 라고 가정하고 임의의 l -차원($2 \leq l \leq k$)에서의 해당되는 부호가 $x_l = y_l = '*'$ 라고 할 때, X 와 Y 에 각각 l -차원 확

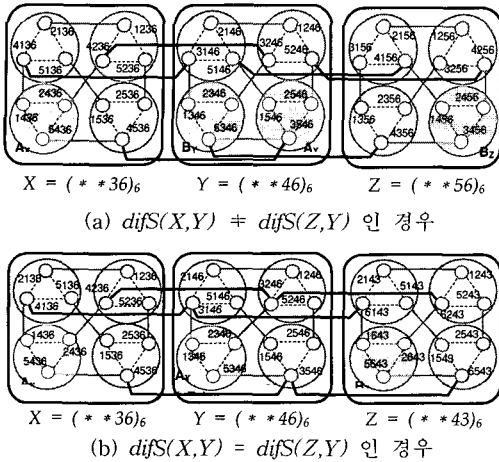


그림 2 인접한 부스타-노드간 상호관계

장을 적용함으로써 각각으로부터 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드들을 얻게 되는데 이들 상호간에 유지되는 성질의 특성을 살펴보고자 한다.

[성질 2] X 로부터 확장되어 생산된 각 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드들은 인접관계의 측면에서 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-에지에 의해 서로 완전 연결(completely connected) 구조를 이루고 있으며, Y 에서도 성립한다. 뿐만 아니라 X 내의 특정한 한 개의 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드(특별히 A_X 라고 칭함, (그림 2) 참조)를 제외한 $n-j-1$ 개의 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드들은 각각 Y 내의 대응되는 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드와 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-에지에 의해 일대일 방식으로 서로 연결되어 있다(물론 Y 내에도 X 의 대응되는 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드와 연결될 수 없는 특별한 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드가 하나 존재하며 이를 B_Y 라고 칭하겠음(그림 2) 참조).

여기서 상호간에 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-에지로 연결이 될 수 없는 특별한 두 개의 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드 A_X 와 B_Y 에 해당하는 스트링 표현식에서 확장된 차원인 차원 l 의 부호로 아래와 같은 특별한 값을 갖는 경우에 해당하게 된다.

$$A_X = (x_1x_2 \dots x_{l-1} \text{difS}(Y, X)x_{l+1} \dots x_n)_n$$

$$B_Y = (y_1y_2 \dots y_{l-1} \text{difS}(X, Y)y_{l+1} \dots y_n)_n \quad \square$$

(성질 2)로부터 유추해 보면 인접된 3개의 $(n-j, k-j)$ -부스타-노드 $X, Y,$ 및 Z 중에서 Y 내의 분할된 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드들의 인접관계를 살펴보면,

$\text{difS}(X, Y) = \text{difS}(Z, Y)$ 인 경우에는 하나의 동일한 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드가 X 및 Z 와 동시에 연결될 수 없게 됨을 알 수 있다(그림 2)(b) 참조).

[성질 3] 두 $(n-j, k-j)$ -부스타-노드 X 와 Y 사이의 인접관계를 표시하고 있는 $(n-j, k-j)$ -부스타-에지는 그 그래프 $S_{n,k}$ 의 에지들 중에서 차원이 $\text{difD}(X, Y)$ 인 에지들의 집합을 의미하며, 그 연결된 에지의 수는 $(n-j-1)(n-j-2) \dots (n-k+1)$ 개이다. \square

지금까지 살펴본 성질들은 (그림 2)에서 쉽게 확인할 수 있다.

본 논문에서 언급될 임의의 부스타-링 $R = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 에서 각 X_j 의 인덱스를 나타내는 j 의 표기 상에서 " $j+1$ " 또는 " $j-1$ "은 특별한 언급이 없는 한 각각 " $(j+1) \bmod r$ " 또는 " $(j-1) \bmod r$ "을 의미한다.

2. 새로운 링 임베딩 기법

본 절에서는 (n, k) -스타 그래프에서의 재귀적 특성을 이용하여 하향식(top-down) 접근 기법을 체계화시킨 새로운 링 임베딩을 소개하고 관련 해밀톤 사이클을 찾을 수 있는 알고리즘을 제시하고자 한다.

2.1 그래프 특성

앞에서 언급한 바와 같이 (n, k) -스타 그래프는 n -스타 그래프를 포함하는 초집합(super set)에 해당하는 포괄적인 그래프 부류에 속하며 상호간에는 앞에서 설명한 바와 같이 (성질 1)과 같은 상관관계를 갖는 것으로 알려져 있다.

이러한 성질은 n -스타 그래프와 마찬가지로 그래프가 재귀적(recursive) 특성을 보유하고 있음을 의미하게 되므로 이를 효율적으로 활용함으로써 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

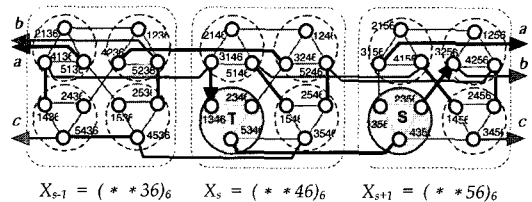


그림 3 (보조정리 2) 증명의 설명

[보조정리 2] $S_{n,k}$ 내에서 $i \leq k-3$ 를 만족하는 임의의 $(n-i, k-i)$ -부스타-링 $R = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 이 아래에

주어진 조건들을 만족하면, 주어진 R로부터 길이 (n-i)r의 (n-i-1, k-i-1)-부스타-링 R' 을 항상 만들 수 있다.

- ① 각 X_j의 미확장 차원들은 모두 위치가 같고, 1-차원을 반드시 포함하며,
- ② difS(X_{s-1}, X_s) ≠ difS(X_{s+1}, X_s)를 만족하는 인덱스 s가 적어도 하나 이상 존재한다.

[증명] n-k=1인 경우는 (성질 1)에 의해 n-스타 그래프와 동형으로써 스타 그래프에 관한 연구결과[9,10]에 의해 이미 증명된 사실이므로, 여기서는 n-k ≥ 2인 경우에 대해서만 고려한다.

R로부터 실제 (n-i-1, k-i-1)-부스타-링을 만드는 과정을 통해 본 보조정리가 성립함을 보이고자 한다.

먼저, 미확장 차원들 중에서 첫 번째 차원이 아닌 임의의 한 차원을 선택하여 그 차원을 d라고 하자(R 내의 각 X_j 들은 (n-i, k-i)-부스타 그래프이므로 각각 k-i개의 미확장 차원이 존재하는데, i ≤ k-β이므로 적어도 3개 이상의 미확장 차원이 존재함).

R 내의 각 X_j 들에 대해 d-차원 확장을 적용하면 각 X_j로부터 n-i개의 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드들을 얻게 되어 전체적으로 R 내에 r(n-i)개의 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드들을 얻게 된다. 따라서 생성된 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드들을 체계적인 방법에 의해 서로 연결시켜 길이 r(n-i)인 (n-i-1, k-i-1)-부스타-링을 만드는 기법을 보이고자 한다.

(성질 2)로부터 각 X_j는 내부에 생성된 n-i개의 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드들 상호간에 완전 연결 구조를 갖고 있으며, 인접된 두개의 (n-i, k-i)-부스타-노드들인 X_{i-1} 및 X_{i+1} 내부에 존재하는 각각의 n-i개의 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드들과도 특정한 하나씩을 제외하고는 모두 인접관계적 측면에서 연결되어 있다는 사실을 알 수 있다.

따라서 R 내에서 조건 difS(X_{s-1}, X_s) ≠ difS(X_{s+1}, X_s)를 만족하는 임의의 한 (n-i, k-i)-부스타-노드 X_s와 X_{s+1}를 각각 최종 및 출발 부스타-노드로 설정하게 되며, X_{s+1}과 X_s 내에서 (n-i-1, k-i-1)-부스타-링 구성의 시작 및 최종 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드가 될 S와 T를 선정하는 방법은 최종 연결 단계에서의 링 구성을 보장받기 위해 (그림 3)에서 설명하고 있는 것과 같이 특별한 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드들로 선택해야 한다. 즉, 조건 difS(X_{s-1}, X_s) ≠ difS(X_{s+1}, X_s)에 의해 X_s 내에는 X_{s-1}의 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드와는 연결되지 않고 X_{s+1}의 해당 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드와만 연결을 갖는 그런 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드가 반드시 하나 이상 존재하게 되는데 이 특정 (n-i-1, k-i-1)-부스타-

노드를 T로, 그리고 T와 연결된 X_{s+1} 내의 해당 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드를 S로 선정한다. 따라서 X_{s+1} 내의 S를 시작으로 하여 R의 링을 따라 각 (n-i, k-i)-부스타-노드들을 차례로 방문하면서 그 내부에 존재하는 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드들을 일정한 규칙을 적용하면서 연결시켜 패스를 구성하고 최종적으로 X_s를 방문하여 X_s 내의 T를 최종적으로 방문함으로써 T와 S를 연결시키게 되어 궁극적으로 (n-i-1, k-i-1)-부스타-링을 만들게 된다. 즉, T를 정함에 있어 X_{s-1}의 해당 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드와 연결되지 않는 것으로 제한함으로써 X_{s-1} 방문 후 X_s로 진입시 T를 통한 진입 자체를 원천 봉쇄함으로써 X_s 방문 후 T와 S의 연결을 보장받을 수 있도록 해 주게 되는 것이다. 주어진 부스타-링 내의 각 부스타-노드들을 순차적으로 다음과 같은 단순한 규칙에 따라 방문하면서 새로운 (n-i-1, k-i-1)-부스타-링을 쉽게 만들 수 있게 된다.

- ① X_j 내부로 일단 들어오면 X_j를 떠나 다음 차례의 X_{j+1}로 진행하기 전에 X_j 내에 존재하는 모든 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드들을 우선적으로 방문한다.
- ② X_j 내에 존재하는 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드들 중에서 다음 차례에 방문하게 될 X_{j+1}과 연결되어 있지 않는 특정 (n-i-1, k-i-1)-부스타-노드를 마지막에 방문하지 않는다.

지금까지 설명한 체계적인 기법을 통해 주어진 (n-i, k-i)-부스타-링 R로부터 길이 n-i인 한 차원 낮은 새로운 (n-i-1, k-i-1)-부스타-링 R' 을 만들 수 있음을 보였다.□

(보조정리 2)는 주어진 S_{n,k}로부터 S_{n-1, k-1}를 만든 다음 S_{n-1, k-1}, S_{n-2, k-2}, ..., S_{n-k+3, 3}, 까지 분할시키는 일련의 과정들을 그래프 자체의 재귀적 성질을 이용하여 연속적으로 만들 수 있음을 의미하고 있다.

그러나 더 이상의 그래프 분할을 수행하기 위해서는 추가적인 전제조건이 요구됨을 암시하고 있다. 이어지는 보조정리들을 통해 이러한 조건들을 분석하고자 한다.

[보조정리 3] S_{n,k} 내에서 길이 r(=n(n-1)...(n-k+2)) 인 임의의 (n-k+1, 1)-부스타-링 R = [X₀, X₁, ..., X_{r-1}] 이 다음과 같은 조건을 만족하면 R로부터 헤밀톤 사이클을 항상 만들 수 있다.

- (a) 각 X_j에서 미확장 차원은 모두 1-차원이며,
- (b) 각 인덱스 i에 대해서 difS(X_{i-1}, X_i) ≠ difS(X_{i+1}, X_i)가 성립한다.

[증명] 여기서도 (보조정리 2)에서 언급한 바와 같은 이유로 $n-k \geq 2$ 인 경우만 고려한다.

주어진 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링 R 에서 조건 (b)가 성립한다는 의미는 앞에서 언급된 (성질 2)에 의해 부스타-링을 구성하고 있는 각 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 X_i 내에 존재하는 노드들 중에서 X_{i-1} 내의 해당 노드와 연결될 수 없는 노드((그림 2)에서 노드 A_y)는 X_{i+1} 내의 해당 노드와 연결될 수 없는 노드((그림 2)에서 노드 B_y)와는 항상 서로 다르다는 의미이며, 이는 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 상호간 패스 구성시에 노드 선택의 폭을 넓혀주는 바람직한 성질이다. 한편, (보조정리 1)에 의해 각 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드는 완전 그래프 K_{n-k+1} 와 동형이므로 내부의 각 노드 상호간에는 충분히 많은 예지로 연결되어 있어 내부에서 패스를 구성하는데 전혀 문제가 없다.

따라서 (보조정리 2)에서 제시한 두 규칙을 적용하면서 각 부스타-노드들을 방문하면서 패스로 연결시켜 나가면 (그림 5)와 같이 쉽게 해밀톤 사이클을 찾을 수 있다. □

(보조정리 3)은 주어진 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링으로부터 해밀톤 사이클의 구성을 보장받기 위한 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링의 전제조건을 제시하고 있다. 따라서 조건을 만족하는 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 만드는 방법에 대해 설명하고자 한다.

주어진 $(n-k+2, 2)$ -부스타-링 $R = [X_0, X_i, \dots, X_{r-1}]$ 에서 '*'인 차원 d 에 대해 d -확장을 적용한 후 각 X_i 로부터 얻어진 $n-k+2$ 개의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드들을 방문 순서대로 각각 $X_{i,0}, X_{i,1}, \dots, X_{i,n-k+1}$ 이라고 할 때, 각 X_{ij} 상호간에 다음과 같은 성질을 관찰할 수 있다.

㉑ X_i 내의 임의의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 $X_{i,y}$ 는 인접한 두 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 X_{i-1} 및 X_{i+1} 내의 임의의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 $X_{i-1,x}$ 및 $X_{i+1,z}$ 상호간에 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} difS(X_{i-1,x}, X_{i,y}) &= difS(X_{i-1}, X_i), 0 \leq x, y \leq n-k+1 \\ difS(X_{i+1,z}, X_{i,y}) &= difS(X_{i+1}, X_i), 0 \leq y, z \leq n-k+1 \end{aligned}$$

㉒ X_i 내의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 중에서 X_{i-1} 의 해당 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결되지 않은 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드를 $X_{i,u}$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$difS(X_{i,u}, X_{i,y}) = difS(X_{i-1}, X_i), 0 \leq y \leq n-k+1 \ \& \ y \neq u$$

㉓ X_i 내의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 중에서 X_{i+1} 의 해당 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결되지 않은 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드를 $X_{i,v}$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$difS(X_{i,v}, X_{i,y}) = difS(X_{i+1}, X_i), 0 \leq y \leq n-k+1 \ \& \ y \neq v$$

이러한 성질들을 역으로 해석하면 생성될 부스타-링이 원하는 성질인 $difS(X_{i-1, n-k+1}, X_{i,0}) \neq difS(X_{i,1}, X_{i,0})$ 및 $difS(X_{i, n-k}, X_{i, n-k+1}) \neq difS(X_{i+1,0}, X_{i, n-k+1})$ 을 갖도록 유도하기 위해서는 다음과 같은 방문 규칙에 따라 각 부스타-노드들을 방문해야 한다는 사실을 알 수 있게 된다. 즉 위의 성질 ㉑ 과 ㉒ 및 ㉑ 과 ㉓으로부터 각각 다음과 같은 부스타-노드 방문 규칙을 유도해 낼 수 있다.

㉔ X_i 내의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 중에서 X_{i-1} 의 해당 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결되지 않은 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드는 반드시 X_i 내에서 첫 번째 또는 두 번째로 방문되지 않도록 하여야 한다. 즉 $X_{i,0}$ 및 $X_{i,1}$ 으로 정해지는 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드는 반드시 X_{i-1} 의 해당 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결을 가져야 한다.

㉕ X_i 내의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 중에서 X_{i+1} 의 해당 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결되지 않은 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드는 반드시 X_i 내에서 마지막 또는 그 바로 앞 순서에 해당되는 $n-k+2$ 또는 $n-k+1$ 번째 차례로 방문되지 않도록 하여야 한다. 즉 $X_{i, n-k+1}$ 및 $X_{i, n-k}$ 로 정해지는 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드는 반드시 X_{i+1} 의 해당 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결을 가져야 한다.

다음의 연속된 두 보조정리들을 통해 주어진 $(n-k+2, 2)$ -부스타-링으로부터 (보조정리 3)이 요구하는 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 만들 수 있음을 보이고자 한다. 그러나 주어진 그래프의 두 파라메타 차이값을 나타내는 $n-k$ 값에 따라 분할되는 부스타-노드들의 개수가 정해지게 됨에 따라 이 값이 작을수록 보다 엄격한 방문규칙을 적용시켜야 하는데, 이 값이 2 이하인 경우에는 특별한 고려가 필요하게 됨을 이어지는 보조정리들을 통해 살펴보고자 한다.

[보조정리 4] $n-k \geq 3$ 을 만족하는 $S_{n,k}$ 내의 임의의 길이 r 인 $(n-k+2, 2)$ -부스타-링을 $R = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 이라고 하면, 주어진 R 로부터 다음과 같은 조건을 만족하는 길이 $r(n-k+2)$ 인 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링 $R' = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{r(n-k+2)-1}]$ 을 항상 만들 수 있다.

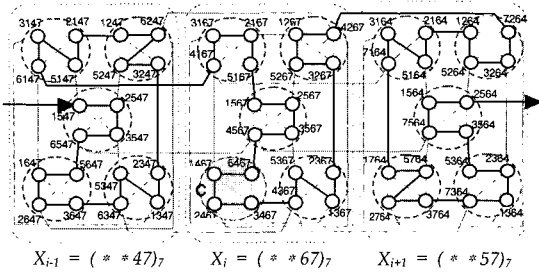


그림 4 $n-k \geq 3$ 인 경우의 부스타-노드 상호간 인접관계

(a) 임의의 j 에 대해서 $difS(Y_{j-1}, Y_j) + difS(Y_{j+1}, Y_j)$ 가 성립한다.

[증명] 주어진 $n-k \geq 3$ 이라는 조건으로부터 R 내의 각 X_i 내에 적어도 5개 이상의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드들이 존재한다는 사실을 알 수 있다. 한편 주어진 $(n-k+2, 2)$ -부스타-링 R 내의 각 X_i 에 정상적인 d -확장을 적용시켜 얻어진 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 Y_j 들에 대해 조건식 $difS(Y_{j-1}, Y_j) + difS(Y_{j+1}, Y_j)$ 가 성립하도록 하기 위해서는 앞에서 언급된 방문 규칙 ㉗ 및 ㉘와 더불어 다음의 규칙이 만족되도록 방문하여야 한다.

㉙ X_i 내의 각 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 Y_j 들을 모두 방문하기 전에 X_i 를 떠나 다음 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드로 진행하지 않는다.

따라서, (보조정리 3)에서와 유사한 방법으로 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 구성하는 과정에서 새로운 방문 규칙 ㉗, ㉘, 및 ㉙를 적용하면 쉽게 원하는 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 구성할 수 있게 된다.

만일 최악의 경우로써 X_i 내의 특정 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 Y_k ((그림 4)에서 부스타-노드 C 참조)가 X_{i-1} 및 X_{i+1} 의 해당 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 동시에 연결되지 않는 경우를 고려해 보면, 이 경우에 규칙 ㉗와 ㉘를 동시에 만족시키기 위해서는 Y_k 를 반드시 X_i 내에서 세 번째로 방문하도록 해주면 되므로, 전체적인 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링 구성에는 전혀 문제가 없다.□

[보조정리 5] $n-k \leq 2$ 를 만족하는 $S_{n,k}$ 내의 임의의 길이 r 인 $(n-k+2, 2)$ -부스타-링을 $R = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 이라고 하고 R 내의 각 $(n-k+2, 2)$ -부스타 그래프 상호간에 조건 $difS(X_{i-1}, X_i) + difS(X_{i+1}, X_i)$ 이 만족되면, 주어진 R 로부터 다음과 같은 조건을 만족하는 길이 $r(n-k+2)$ 인 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링 $R' = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{r(n-k+2)-1}]$ 을 항상 만들 수 있다.

(a) 임의의 j 에 대해서 $difS(X_{j-1}, X_j) + difS(X_{j+1}, X_j)$ 가

성립한다.

[증명] (보조정리 4)와 유사하나, " $n-k \leq 2$ "라는 조건으로 인해 추가적인 고려가 필요하다. $n-k=1$ 인 경우는 단순히 n -스타 그래프이므로 여기서는 고려하지 않고, $n-k=2$ 인 경우만 고려한다. 이 경우에 각 X_i 내에 4개의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드만이 존재하는 최악의 상황을 예상할 수 있고 이 경우에는 앞에서 언급된 부스타-노드 방문 규칙 ㉗와 ㉘를 모두 만족시킬 수 없는 경우가 발생하게 된다.

그러나, 주어진 조건에서 R 내의 인접된 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 상호간에 조건 $difS(X_{i-1}, X_i) + difS(X_{i+1}, X_i)$ 이 만족되므로 이 의미는 X_i 내의 특정 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 Y_k 가 (보조정리 4)에서 고려했던 최악의 상황과 같이 X_{i-1} 및 X_{i+1} 의 해당 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 동시에 연결되지 않는 경우는 발생하지 않는다는 뜻이 되므로 이러한 조건하에서는 부스타-노드 방문 규칙 ㉗와 ㉘를 모두 만족시키는데 아무런 문제가 없다. 따라서 앞의 (보조정리 4)와 같은 방법을 적용하여 원하는 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 만들 수 있게 된다.□

[보조정리 6] $n-k \leq 2$ 를 만족하는 $S_{n,k}$ 내의 임의의 길이 r 인 $(n-k+3, 3)$ -부스타-링을 $R = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 이라고 하면 주어진 R 로부터 다음과 같은 조건을 만족하는 길이 $r(n-k+3)$ 인 $(n-k+2, 2)$ -부스타-링 $R' = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{r(n-k+3)-1}]$ 을 항상 만들 수 있다.

(a) 임의의 j 에 대해서 $difS(X_{(j-1) \bmod r(n-k+3)}, X_j) + difS(X_{(j+1) \bmod r(n-k+3)}, X_j)$ 가 성립한다.

[증명] $n-k=1$ 인 경우는 단순히 n -스타 그래프이므로 여기서는 $n-k=2$ 인 경우만 고려한다. 이 경우에 각 X_i 내에 존재할 수 있는 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드는 5개가 되므로 앞에서 언급된 부스타-노드 방문 규칙 ㉗와 ㉘를 모두 만족시키는데 아무런 문제가 없다. 따라서 (보조정리 4)에서와 같은 방법으로 각 부스타-노드들을 방문하되 각 $(n-k+3, 3)$ -부스타-노드에 대해 아래와 같은 방문규칙 ㉗', ㉘', 및 ㉙'을 적용시키면 원하는 새로운 $(n-k+2, 2)$ -부스타-링을 쉽게 구성할 수 있다.

㉗' X_i 내의 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 중에서 X_{i-1} 의 해당 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드와 연결되지 않은 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 $X_{i,u}$ 는 반드시 X_i 내에서 첫 번째 또는 두 번째로 방문하지 않도록 하여야 한다.

㉘' X_i 내의 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 중에서 X_{i+1} 의 해당 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드와 연결되지 않은 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 $X_{i,v}$ 는 반드시 X_i 내에서 마지막 또는 그 바로 앞 순서에 해당되는 $n-k+3$ 또는 $n-k+2$ 번째

차례로 방문되지 않도록 하여야 한다.

⊕' X_i 내의 각 $(n-k+2,2)$ -부스타-노드 Y_j 들을 모두 방문하기 전에 X_i 를 떠나 다음 $(n-k+3,3)$ -부스타-노드인 X_{i+1} 로 진행하지 않는다.□

2.2 임베딩 알고리즘

앞 절에서 언급한 여러 보조정리들의 증명과정에서 설명된 기법들을 체계적으로 정리하면 (그림 5)에 주어진 알고리즘으로 요약할 수 있게 된다.

알고리즘 NK-Hamiltonian-Cycle:

Step 1. $S_{n,k}$ 에 k -확장을 적용한 후 생성된 n 개의 $(n-1,k-1)$ -부스타-노드들을 연결시켜 길이 n 의 $(n-1,k-1)$ -부스타-링으로 만든다.

Step 2. for $j := k-1$ **downto** 4 **do**
 step 2.1: 주어진 길이 $n(n-1)\dots(n-k+j+1)$ 의 $(n-k+j, j)$ -부스타-링에 j -확장을 적용한다.
 step 2.2: 적용 후 생성된 $n(n-1)\dots(n-k+j+1)(n-k+j)$ 개의 $(n-k+j, j-1)$ -부스타-노드들을 연결시켜 $(n-k+j, j-1)$ -부스타-링을 만든다(보조정리 2) 참조).

Step 3. 주어진 길이 $n(n-1)\dots(n-k+4)$ 의 $(n-k+3, 3)$ -부스타-링에 3-확장을 적용시켜 생성된 $n(n-1)\dots(n-k+3)$ 개의 $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드들을 연결시켜 $(n-k+2, 2)$ -부스타-링을 만든다($n-k \leq 2$ 인 경우는 (보조정리 3)을, 그리고 $n-k \geq 3$ 인 경우는 (보조정리 2)를 참조).

Step 4. 주어진 길이 $n(n-1)\dots(n-k+3)$ 의 $(n-k+2, 2)$ -부스타-링에 2-확장을 적용시켜 생성된 $n(n-1)\dots(n-k+2)$ 개의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드들을 연결시켜 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 만든다($n-k \leq 2$ 인 경우는 (보조정리 5)를, 그리고 $n-k \geq 3$ 인 경우는 (보조정리 4)를 참조).

Step 5. 주어진 길이 $n(n-1)\dots(n-k+2)$ 의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링의 각 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 내부에 존재하는 $n(n-1)\dots(n-k+1)$ 개의 노드들을 연결시켜 헤밀턴 사이클을 구성한다(보조정리 3) 참조.

그림 5 새로운 링 임베딩 알고리즘

(그림 6)를 통해 알고리즘의 수행과정을 간략히 설명하면, 먼저 주어진 $(6,3)$ -스타 그래프로부터 3-차원 확장을 통해 $(5,2)$ -부스타-링 $[(**1)_6, (**2)_6, (**3)_6, (**5)_6, (**6)_6, (**4)_6]$ 을 구성하고(step 1), 이 링에 다시 2-차원 확장을 통해 구성된 $(4,1)$ -부스타-링 $[(**21)_6, (**61)_6, (**51)_6, (**31)_6, (**41)_6, (**42)_6, (**32)_6, (**52)_6, (**12)_6, (**62)_6, (**63)_6, (**13)_6, (**53)_6, (**43)_6, (**23)_6, (**25)_6, (**65)_6, (**15)_6, (**45)_6, (**35)_6, (**36)_6, (**26)_6, (**46)_6, (**56)_6, (**16)_6, (**14)_6, (**54)_6, (**64)_6, (**34)_6, (**24)_6]$ 를 구성하며(step 4), 이어서 마지막 단계의 노드 방문을 통한 사이클 구성과정(step 5)을 거쳐 (그림 6)에서 굵은 선으로 표시된 헤밀턴 사이클을 최종적으로 얻을 수 있다.

알고리즘의 시간 복잡도(time complexity)는 각 스텝에서 다루게 될 부스타-링들의 길이에 의존적임을 알 수 있는데 이러한 링들의 길이의 합은 결국 $n+n(n-1)+n(n-1)(n-2)+\dots+n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1) = O(n!/(n-k)!)$ 이므로 주어진 (n,k) -스타 그래프의 노드 수에 대한 1차 함수(linear function) 형태의 복잡도로 표현할 수 있

며(전체 노드 수 = $n!/(n-k)!$), 알고리즘의 정확성(correctness)은 앞 절에서 언급했던 보조정리들의 증명 과정을 통해 언급된 내용을 통해 밝혀진 사실이므로, 결과적으로 다음과 같은 사실이 성립함을 알 수 있다.

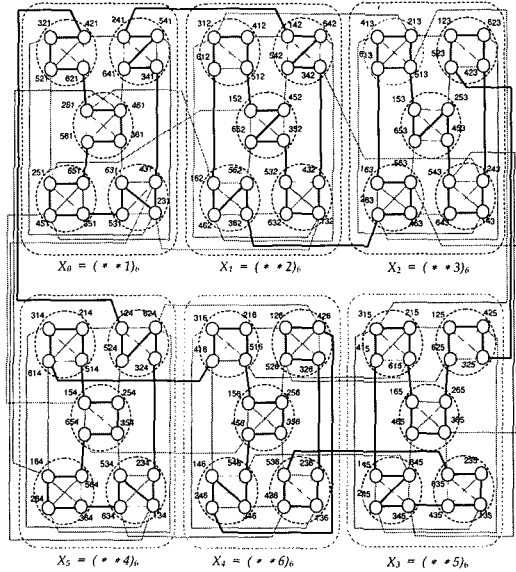


그림 6 $S_{6,3}$ 에서의 임베딩 알고리즘 적용 예

[정리 1] (n,k) -스타 그래프 $S_{n,k}$ 는 헤밀턴 사이클을 갖는다.□

3. 고장허용 링 임베딩 응용

본 절에서는 (n,k) -스타 그래프 내에 고장인 에지를 포함하고 있는 경우에 고장인 에지를 사용하지 않으면서 헤밀턴 사이클을 찾을 수 있는 기법에 대해 소개하는데, 이 방법은 제3절에서 제안한 헤밀턴 사이클과 관련된 특성들을 고장허용 링 임베딩 분야로 확장 가능성을 보여 주는 의미를 갖는다.

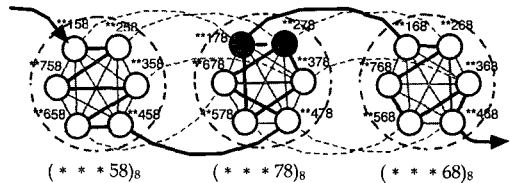


그림 7 고장 감내를 위한 패스 구성 전략(고장 부스타-에지 (**178, **278))

에지에 고장이 허용된 (n,k)-스타 그래프에서의 링 임베딩 문제를 해결하는데 있어서 중요한 전략은 고장난 에지들이 속한 차원의 분포를 고려하여 해당 차원에서의 고장 에지들이 선택되지 않도록 에지 연결을 고려해 줌으로써 해당 차원에서의 에지 고장을 감내할 수 있도록 부스타-링을 구성해 주는 것이다. 이러한 전략을 통해 감내할 수 있는 고장 에지의 수의 허용 범위와 관련하여 다음과 같은 그래프 특성을 발견할 수 있다.

[보조정리 8] 임의의 정수값 $i(2 \leq i \leq k)$ 에 대해 F_i 는 $S_{n,k}$ 내에서 i -차원에 속하는 고장에지들의 집합이라고 할 때, 주어진 $S_{n,k}$ 에서 고장난 에지들이 조건 $\sum_{2 \leq i \leq k} |F_i| \leq k-2$ 를 만족하면, $S_{n,k}$ 로부터 얻어진 $(n-k+1,1)$ -부스타-링을 구성하고 있는 각 $(n-k+1,1)$ -부스타-그래프 내에는 1차원을 제외한 어떤 에지에서든 고장난 에지가 포함되지 않도록 구성할 수 있다.

[증명] 앞 절의 (보조정리 2), (보조정리 3) 및 (보조정리 4)의 증명과정에서 설명한 바와 동일한 방법으로 진행되되, 임의의 $j(1 \leq j \leq k-2)$ 스텝에서 주어진 $(n-j, k-j)$ -부스타-링을 구성하고 있는 각 $(n-j, k-j)$ -부스타-노드들에 대해 차원확장을 적용할 차원 m 을 선정하는데 있어 특별히 적어도 하나 이상의 고장 에지가 해당 차원에 걸쳐 있는 그런 차원 m 을 선정하여 m -확장을 적용함으로써 각 $(n-j, k-j)$ -부스타-노드로부터 각각 $n-j$ 개의 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드들을 얻을 수 있게 된다.

따라서 생성된 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-노드들을 연결시켜 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-링을 구성할 때는 차원 m 선정시 고려되었던 해당 고장 에지가 포함되지 않도록 (그림 7)과 같이 패스를 구성해 줌으로써 $(n-j, k-j)$ -부스타-링으로부터 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-링을 구성하는 하나의 스텝에서 적어도 하나 이상의 고장 에지를 감내할 수 있음을 알 수 있다.

(그림 7)에서 보는 바와 같이 인접한 $(n-j, k-j)$ -부스타-노드 상호간에는 $n-j-1$ 개의 $(n-j-1, k-j-1)$ -부스타-에지들이 연결되어 있으므로 최악의 경우인 $j=k-2$ 인 경우에도 2개 이상이 존재하므로 우회를 위한 에지의 선택이 가능하다((n,k)-스타 그래프의 정의에 의해 $n \geq k+2$ 임).

다시 말하면, $S_{n,k}$ 에 한번의 차원확장을 통해 얻은 $(n-1, k-1)$ -부스타-링으로부터 출발하여 최종적으로 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 얻을 때까지 $k-2$ 회에 걸친 일련의 차원확장과정에서 적어도 $k-2$ 개 이상의 고장 에지(1차원 에지에서 고장은 제외)를 감내할 수 있음을 알

수 있으므로, 따라서 보조정리가 성립함을 알 수 있다. □

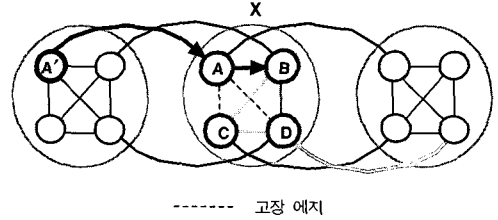


그림 8 (n-k+1,1)-부스타-링에서의 고장 에지 감내를 위한 패스 구성 전략

[정리 2] $S_{n,k}$ 내에 존재하는 고장 에지의 수가 많아 $n-3$ 개 이내이고, 다음의 두 조건을 만족하면 여전히 $S_{n,k}$ 내에서 해밀톤 사이클을 구할 수 있다.

- (1) $|F_1| \leq n-k-1,$
- (2) $\sum_{2 \leq i \leq k} |F_i| \leq k-2.$

[증명] 앞의 (보조정리 8)에 의하면 조건 (2)를 만족하는 주어진 $S_{n,k}$ 내에서 일련의 차원 확장과정을 통해서 결과적으로 각 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드들이 1-에지 상의 고장만 갖도록 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 구성할 수 있음을 알 수 있다.

따라서 이러한 $(n-k+1, 1)$ -부스타-링으로부터 출발하여 1-차원 에지상에 존재하는 고장들을 감내할 수 있는 해밀톤 사이클 구성방법을 제시하고자 한다.

첫 번째 경우는 1-차원 상에 존재하는 모든 고장 에지들이 모두 특정한 하나의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드에 속할 뿐 아니라 특정한 한 노드에 모두 인접한 경우를 살펴본다. 이 경우에는 고장이 집중되어 있는 해당 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드(그림 8)에서 X)에 속하는 노드들의 연결에만 특별한 신경을 쓰면 되는데 (그림 8)에서 보는 바와 같이 해당 특정 노드가 속한 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 내에서 해당 특정 노드(X 내의 노드 C)를 첫 번째(또는 마지막 번째)로 방문되도록 함으로써 1-차원 에지중 고장이 아닌 하나의 에지(에지 (A, B))와 인접된 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드로의 연결 에지(에지 (에지 (A', A))를 반드시 활용하도록 하기 위해 노드 A', A, 그리고 B를 순서대로 방문하도록 하면 되고, 나머지 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 부분에는 고장나 에지가 전혀 없으므로 앞 절에서와 같은 방법으로 쉽게 해밀톤 사이클을 구성해 줄 수 있다.

두 번째 경우는 1-차원상의 고장난 에지들이 두 개 이상의 $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드들로 분산되어 있는 경우

로써 이 경우에도 각 $(n-k+1,1)$ -부스타-노드 내의 각 노드들은 고장난 에지들을 제외하더라도 적어도 2개 이상의 1-차원 에지와 인접된 $(n-k+1,1)$ -부스타-노드로의 하나의 에지가 존재한다는 사실로부터 고장난 에지들을 이용하지 않고도 쉽게 모든 노드들을 포함하도록 패스를 구성할 수 있음을 알 수 있다.

따라서 두 가지 경우 모두 고장난 에지들을 감내하면서 원하는 해밀톤 사이클을 구성할 수 있음을 알 수 있다.□

(n,k) -스타 그래프의 에지 비대칭(non-symmetric) 특성으로 인해 (정리 2)에서 볼 수 있는 바와 같이 두 개의 에지 그룹으로 각각의 조건이 제시된 다소 복잡한 형태의 고장간 성질이긴 하지만, 일반적으로 (n,k) -스타 그래프의 산지수가 $n-1$ 이기 때문에 고장 에지의 합이 최악의 경우에 $n-3$ 개를 초과할 수는 없는 점을 고려할 때 본 성질의 의의를 찾을 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 병렬처리 분야의 응용과 관련하여 최근 많은 관심을 받고 있는 상호연결망 그래프 중의 하나인 (n,k) -스타 그래프에서 해밀톤 사이클을 찾는 문제를 다루었다.

(n,k) -스타 그래프의 재귀적 성질을 이용하여 그래프를 체계적으로 차원 분할해 가는 일련의 과정을 통해 해밀톤 사이클을 찾을 수 있는 새로운 기법을 제시하였으며, 아울러 제시된 기법을 활용하여 고장허용 링 임베딩 문제로 응용하여 고장 에지의 개수가 $n-3$ 이내이고, 그 중에서 1-차원에 속하는 고장 에지의 수가 $n-k-1$ 개 보다 많지 않은 경우에도 역시 해밀톤 사이클을 구성할 수 있음을 밝히는데 응용할 수 있음을 보여줌으로써 본 기법의 확장성 및 유연성 면에서의 우수성을 간접적으로 증명하였다.

이러한 연구결과는 (n,k) -스타 그래프에 대한 사이클 특성을 체계적으로 이용함으로써 해밀톤 사이클을 찾는 다양한 응용분야로 적용가능함을 보여 주는 새로운 전략의 제시로써 의의를 갖게 되며, 병렬처리 분야에서 사이클을 기반으로 하는 멀티캐스팅 등의 분야에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

앞으로도 (n,k) -스타 그래프에 대한 다양한 그래프들의 임베딩 문제를 포함하여 상호연결망으로서의 특성에 대한 보다 많은 연구가 필요할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel

- algorithms into parallel architectures," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.4, pp.439-458, 1987.
- [2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," *Computing Supplement*, Vol.7, pp.257-282, 1990.
- [3] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," *IEEE Trans. on Comput.*, Vol.37, pp.867-872, 1988.
- [4] J. H. Park and K. Y. Chwa, "Recursive circulant: A new topology for multi-computer networks," *Proc. of the Int'l Symp. on Parallel Architectures, Algorithms and Networks*, pp.73-80, 1994.
- [5] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The star graph: An attractive alternative to the n -cube," *Proc. of the Int'l Conf. on Parallel Processing*, pp.393-400, 1987.
- [6] K. Day and A. Tripathi, "A comparative study of topological properties of hypercubes and star graphs," *IEEE Trans. on Paral. and Distrib. Sys.*, Vol.5, No.1, pp.31-38, 1994.
- [7] J. Misic and Z. Jovanovic, "Communication aspects of the star graph interconnection network," *IEEE Trans. on Paral. and Distrib. Sys.*, Vol.5, No.7, pp.678-687, 1994.
- [8] W. K. Chiang and R. J. Chen, "The (n,k) -star graph: A generalized star graph," *Inf. Process. Lett.*, Vol.56, pp.259-264, 1995.
- [9] J. S. Jwo, S. Lakshminarayanan, and S. K. Dhall, "Embedding of cycles and grids in star graphs," *Proc. of the Symp. on Parallel and Distrib. Processing*, pp.540-547, 1990.
- [10] M. Nigam, S. Sahni, and B. Krishnamurthy, "Embedding hamiltonians and hypercubes in star interconnection graphs," *Proc. of the Int'l Conf. on Parallel Processing*, pp.340-343, 1990.
- [11] A. Bouabdallah, M. C. Heydemann, and J. Opatrny, "Embedding complete binary trees into star networks," *Proc. of the Int'l Conf. on Mathematical Foundation of Computer Sci.*, pp. 266-275, 1994.
- [12] S. Ranka, J. C. Wang, and N. Yeh, "Embedding meshes on the star graph," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.19, pp.131-135, 1993.
- [13] W. K. Chiang and R. J. Chen, "Topological properties of the (n,k) -star graph," *accepted and to appear in Int'l J. of Foundations of Computer Sci.*
- [14] 최혜정, 장직현, " (n,k) -스타 그래프상에서의 인덱싱 기법과 응용", 추계 한국정보과학회 학술지, pp.1731-, 1996.
- [15] 박천웅, 장직현, " (n,k) -스타 그래프상의 해밀토니안 임베딩", 한국정보과학회 논문지(A), Vol. 25, No. 12, pp.1384-1391, 1998.
- [16] Y. C. Tseng, D. K. Panda, and T. H. Lai, "A trip-based multicasting model in wormhole-routed networks with virtual channels," *IEEE Trans. on*

Paral. and Distrib. Sys., Vol.7, No.2, pp.138-150, 1996.



장 정 환

1983년 경북대학교 전자공학과 학사.
1985년 한국과학기술원 전산학과 석사.
1998년 한국과학기술원 전산학과 박사.
1985년 ~ 현재 한국전기통신공사 통신
망관리센터 선임연구원. 관심분야는 병렬
처리, 멀티미디어 통신시스템 및 그래프

이론 응용 등임.



좌 경 룡

1971년 서울대학교 공과대학 전기공학과
졸업(공학사). 1977년 미국 노스웨스턴대
학 전산학과 졸업(공학석사). 1980년 미
국 노스웨스턴 대학 전산학과 졸업(공학
박사). 1980년 ~ 1986년 한국과학기술
원 전산학과 조교수. 1986년 ~ 1990년

한국과학기술원 전산학과 부교수. 1985년 ~ 1986년 미국
IBM 왓슨 연구소 초빙 연구원. 1997년 ~ 1998년 한국정
보과학회 회장 1990년 ~ 현재 한국과학기술원 전산학과
교수.