

공간차분도식이 점탄성 유체유동의 수치해에 미치는 영향

민태기* · 유정열** · 최해천***
(2000년 3월 10일 접수)

Effects of Spatial Discretization Schemes on Numerical Solutions of Viscoelastic Fluid Flows

Taegee Min, Jung Yul Yoo and Haecheon Choi

Key Words: Viscoelastic Fluid Flow(점탄성 유체 유동), Extensional Flow(연신유동), Numerical Breakdown(수치해의 파괴), Compact Upwind Difference Scheme(컴팩트 상류 차분도식)

Abstract

This study examines the effects of the discretization schemes on numerical solutions of viscoelastic fluid flows. For this purpose, a temporally evolving mixing layer, a two-dimensional vortex pair interacting with a wall, and a turbulent channel flow are selected as the test cases. We adopt a fourth-order compact scheme (COM4) for polymeric stress derivatives in the momentum equations. For convective derivatives in the constitutive equations, the first-order upwind difference scheme (UD) and artificial diffusion scheme (AD), which are commonly used in the literature, show most stable and smooth solutions even for highly extensional flows. However, the stress fields are smeared too much and the flow fields are quite different from those obtained by higher-order upwind difference schemes for the same flow parameters. Among higher-order upwind difference schemes, a third-order compact upwind difference scheme (CUD3) shows most stable and accurate solutions. Therefore, a combination of CUD3 for the convective derivatives in the constitutive equations and COM4 for the polymeric stress derivatives in the momentum equations is recommended to be used for numerical simulation of highly extensional flows.

기호설명

B_y : 속도 섭동성분의 분포함수 계수
 c_{ij} : 폴리머 배열 텐서
 L_x : 주유동방향의 계산영역 길이
 L_y : 수직방향의 계산영역 길이
 L_z : 폭방향의 계산영역 길이
 l : 폴리머 연신 계수
 p : 압력

Re : 레이놀즈 수
 t : 시간
 u_i : 속도
 u', v' : 속도 섭동성분
 \hat{v}_1, \hat{v}_2 : 속도 섭동성분의 진폭
 We : 마이센버그 수
 x : 주유동방향
 y : 수직방향
 z : 폭 방향
 Γ : 유동 회전량
 δ : 기준길이
 ϵ : 용액 전체의 전단 점도에 대한 폴리머 점도의 비율

* 서울대학교 대학원

** 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : jyyoo@plaza.snu.ac.kr

FAX : (02)883-0179 TEL : (02)880-7112

*** 회원, 서울대학교 기계항공공학부

- λ : 응력완화 시간
 ν : 전체 점도
 τ_{ij} : 폴리머 응력
 ϕ_1, ϕ_2 : 속도 섭동성분의 위상차

1. 서론

최근 3차원, 비정상, 점탄성, 유체유동의 수치 해석적인 연구에 대한 관심이 증대되고 있다.⁽¹⁻³⁾ 이러한 유동들은 대개 강한 연신유동(extensional flow)들로서, 점탄성 유체 유동의 특성을 지배하는 응력 구배의 변화가 급격하여 점탄성 유체의 연신유동은 전단유동에 비해 전체 유동에 많은 변화를 일으키게 된다. 특히 폴리머 첨가제에 의한 난류 항력 감소는 점탄성유체의 연신유동에 의한 가장 대표적인 현상이다.⁽⁴⁾ 학술적인 측면 뿐 아니라 경제적인 측면으로도 이 현상은 비뉴턴 유체의 여러 특이한 현상 중 가장 많은 주목을 끌어 왔지만⁽⁵⁾ 실제 항력 감소의 원인에 대해서는 아직 완전한 설명이 제시되지 않고 있다.^(6,7)

지난 수십년간 수치기법과 컴퓨터의 발달로 점탄성 유체유동의 수치해석 기법에 대해 많은 연구들이 진행되어 왔다. 점탄성 유체유동에 대한 수치해석은 기존의 뉴턴유체에 사용되던 수치기법만으로는 높은 We 수의 연신유동에 대해 안정적인 해를 구하는데 많은 어려움을 겪었다.^(8,9) 이는 대개의 점탄성 유체의 구성방정식에는 확산항이 없기 때문에 공간차분에서 필연적으로 발생하는 미세한 수치교란들이 높은 We 수의 연신유동에서 증폭되어 마침내 수치해를 파괴하기 때문이다.⁽⁹⁻¹³⁾ 따라서 이러한 수치교란들을 인공적으로 감쇄시키기 위하여 구성방정식의 대류항의 차분에 확산오차를 수반하는 공간차분기법들이 채택되어 안정적인 해를 구할 수 있었다.^(2,3,13-17,21-23,25-27)

한편 뉴턴유체의 난류 유동장에 대한 직접수치모사(DNS, Direct Numerical Simulation)⁽¹⁸⁾의 성과들이 폴리머 첨가제에 의한 항력 감소에 대한 연구에서도 많은 역할을 할 것으로 기대되어 많은 연구들이 진행되었다.⁽¹⁹⁻²³⁾ 하지만 연신유동이 강한 점탄성 유체유동의 층류유동에서는 확산오차를 포함하지 않고도 성공적인 결과들을 제시한 스펙트럴 기법⁽²⁴⁾도 난류유동장에서는 다시 수치해의 파괴가 일어났다.⁽¹²⁾ 결국 스펙트럴 기법도

인공점성을 더하여야만 점탄성 유체유동의 완전히 발달된 난류 채널 유동에 대한 직접수치모사(DNS)를 수행할 수 있었다.^(13,21-23)

하지만 확산오차를 수반하는 공간차분도식들은 점탄성 유체유동의 특성을 결정짓는데 중요한 응력구배들을 감쇄시키므로 유동의 변화를 왜곡시킬 수 있다. 특히 현재 구성방정식의 대류항에 일반적으로 쓰이는 공간차분도식은 1차 정확도의 상류차분 도식^(3,17,25) 이나 2차 정확도의 인공점성 기법^(13,21-23) 들로 낮은 차수의 차분기법들이다. 또한 유한요소법을 이용한 점탄성 유체유동의 수치해석에 널리 쓰이는 SU(streamline upwind)⁽¹⁴⁾ 또는 SUPG(streamline upwind Petrov-Galerkin)^(15,16) 역시 1차 정확도의 차분기법이다. 최근 2차 정확도의 차분기법이나⁽²⁶⁾ 3차 정확도의 차분기법⁽²⁷⁾을 이용한 점탄성 유체유동의 수치해석기법들도 제안되었지만 이러한 확산오차를 수반하는 공간차분도식들이 점탄성 유체유동의 수치해에 미치는 영향들은 아직 체계적으로 검토되어 있지 않다.

본 연구의 목적은 여러 가지 공간차분 도식들이 점탄성 유체 유동의 수치해에 미치는 영향을 체계적으로 검토하여 되도록 작은 확산오차를 수반하고도 안정적이고 정확한 공간차분도식을 제안하는 것이다. 이를 위하여 시간적으로 발달하는 혼합층(temporally evolving mixing layer), 벽면과 상호 작용하는 2차원 보텍스 쌍(two dimensional vortex pair interacting with a wall)과 완전히 발달된 3차원 평면 채널 유동(fully developed turbulent channel flow)에 대한 점탄성 유체유동의 수치해석을 수행하도록 한다. 본 연구에 사용된 점탄성 유체 모델은 FENE-P 모델⁽²⁸⁾로서 현재 가장 널리 사용되고 있는 구성방정식 중의 하나이다.

본 연구에 사용된 수치기법은 유한체적법을 이용한 준 내재적 분할방법으로 시간에 대해 3차 Runge-Kutta 방법과 Crank-Nicolson 방법을 사용하였고 속도와 압력의 공간차분에는 2차 정확도의 중심차분기법을 사용하였다. 운동량방정식의 폴리머 응력의 미분에는 확산오차가 없는 4차 정확도의 콤팩트차분도식⁽²⁹⁾이 사용되었다. 구성방정식의 대류항에는 다음과 같은 공간차분도식들이 적용, 그 결과들이 비교 검토되었다: 2차 정확도의 중심차분기법(CD), 1차 정확도의 상류차분기법(UD), 2차 정확도의 상류차분기법(LUDS), 3차

정확도의 상류차분기법(QUICK), 2차 정확도의 인공확산기법(AD), 3차 정확도의 콤팩트상류 차분도식(CUD3)⁽³⁰⁾과 4차 정확도의 콤팩트차분도식(COM4).⁽²⁹⁾

2. 지배 방정식

FENE-P모형을 적용한 비정상, 비압축성, 점탄성 유체 유동의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{ij} = \frac{f(R)}{We} (c_{ij} - \delta_{ij}) \quad (3)$$

$$f(R) = \frac{l}{l - \text{trace}(c_{ij})} \quad (4)$$

$$(f(R) \cdot c_{ij} - \delta_{ij}) + We \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} c_{kj} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} c_{ki} \right) = 0 \quad (5)$$

여기서 u_i 는 속도, p 는 압력, τ_{ij} 는 폴리머 응력, c_{ij} 는 폴리머 배열 텐서, Re 는 레이놀즈 수, We 는 바이센버그 수, l 은 연신계수이고 ε 은 폴리머 용액 전체의 전단 점도에 대한 폴리머 점도의 비율로서 ε 이 0이면 지배방정식은 뉴턴유체 유동을 나타내게 된다. 따라서 완전 전단 유동에서 영 전단점도(zero shear viscosity)는 뉴턴 유체의 경우보다 $1 + \varepsilon$ 만큼 증가하게 되므로 폴리머 희석액의 특성인 전단박화 특성을 나타내게 된다. Re 와 We 는 각 유동 상황에 따라 정의되므로 다음 절에서 각 경우에 따라 정의하도록 한다. 본 연구에서는 l 은 100으로 ε 은 0.1로 고정하고 계산을 수행하였다.

구성방정식의 대류항 $u_k \partial c_{ij} / \partial x_k$ 의 차분에 쓰인 7개의 공간차분기법 중 문헌상으로 익숙하지 않은 COM4⁽²⁹⁾와 CUD3⁽³⁰⁾에 대해 설명하기로 한

다. COM4는 Pade도식에서 유래한 것으로 h 의 간격을 가지는 N 개의 격자계에서 COM4에 의한 p 번째 격자점에서 c_{ij} 의 일차 미분은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{ij}}{\partial x} \Big|^{p+1} + 4 \frac{\partial c_{ij}}{\partial x} \Big|^p + \frac{\partial c_{ij}}{\partial x} \Big|^{p-1} \\ = \frac{3}{h} (c_{ij}^{p+1} - c_{ij}^{p-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)은 N 차수의 tridiagonal 행렬을 구성하므로 이를 푸는 것만으로 일차 미분을 쉽게 구할 수가 있다. 따라서 적은 비용으로 고차 정확도의 미분을 구현할 수 있다. 한편 CUD3는 COM4에 상류차분개념을 결합시켜 확산오차를 수반하도록 한 것으로 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} (2 - 3s^{\rho+\frac{1}{2}}) \frac{\partial c_{ij}}{\partial x} \Big|^{p+1} + (8 - 3s^{\rho+\frac{1}{2}} + 3s^{\rho-\frac{1}{2}}) \frac{\partial c_{ij}}{\partial x} \Big|^p + (2 + 3s^{\rho-\frac{1}{2}}) \frac{\partial c_{ij}}{\partial x} \Big|^{p-1} \\ = \frac{6}{h} \left((1 - s^{\rho+\frac{1}{2}}) c_{ij}^{p+1} + (s^{\rho+\frac{1}{2}} + s^{\rho-\frac{1}{2}}) c_{ij}^p - (1 - s^{\rho-\frac{1}{2}}) c_{ij}^{p-1} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $s^{\rho+1/2}$ 과 $s^{\rho-1/2}$ 은 각각 격자점 p 와 $p+1$ 사이, 격자점 p 와 $p-1$ 사이의 중간 속

Table 1 Summary of spatial discretization schemes

Difference scheme	Accuracy	Stencil size	Diffusion error
CD	2	3	×
UD	1	3	○
LUDS	2	5	○
QUICK	3	5	○
AD	2	3	○
COM4	4	3	×
CUD3	3	3	○

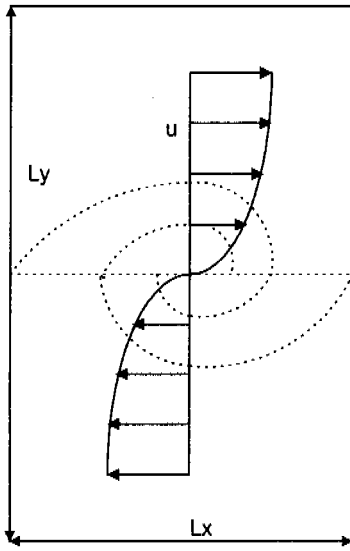


Fig. 1 Temporally evolving mixing layer

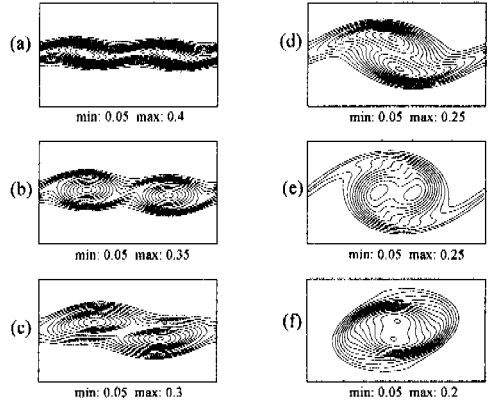


Fig. 3 Vorticity contours for the temporally evolving mixing layer for a viscoelastic fluid ($We=25$): (a) $t=20$, (b) $t=40$, (c) $t=60$, (d) $t=80$, (e) $t=100$, (f) $t=120$

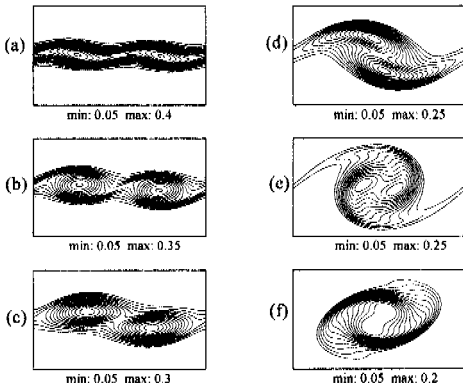


Fig. 2 Vorticity contours for the temporally evolving mixing layer for a Newtonian fluid: (a) $t=20$, (b) $t=40$, (c) $t=60$, (d) $t=80$, (e) $t=100$, (f) $t=120$

도에 관계된 함수로 속도의 부호가 양수이면 1, 음수이면 -1이다. 이 함수들이 0이면 CUD3는 COM4와 일치하는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

Table 1은 사용된 공간차분기법들에 대한 요약이다. CD와 COM4를 제외하고는 모두 확산오차를 수반한다. LUDS와 QUICK은 비교적 고차 정확도를 가지지만 다른 도식들이 일차 미분항의 차분에 3개의 격자들을 사용하는데 비해 5개의 격자수를 사용한다. 이는 공간차분에 바로 이웃

의 격자점 이외의 정보가 필요함을 의미하므로 구속조건(boundedness)에 위배된다.⁽³¹⁾ 한편 COM4와 CUD3는 저차 정확도의 공간차분기법들과 마찬가지로 3개의 격자수를 사용하고도 고차 정확도를 유지함을 알 수 있다.

3. 결과 및 토의

3.1 시간적으로 발달하는 혼합층

Fig. 1은 시간적으로 발달하는 혼합층 유동에 대한 개략적인 그림이다. 초기 조건에서 주 유동 방향 속도 u 는 $0.5 \tanh(y)$ 로, 수직방향 속도 v 는 0으로 주어진다. 혼합층에서 불안정성을 일으키기 위하여 속도 v 에 아래와 같은 섭동량 v' 이 주어진다.⁽³²⁾

$$v' = \sum_{k=1}^2 \hat{v}_k \exp\left(-\frac{v^2}{B_y}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{L_x} x + \phi_k\right) \quad (6)$$

여기서 $Re = (\Delta u \delta) / \nu$, $We = \lambda \Delta u / \delta$ 로 각각 정의되고, λ 는 용력완화시간, $\delta = \Delta u / (du/dy)_{\max}$, $\Delta u = u_{\max} - u_{\min}$, B_y 는 섭동량 분포함수의 계수로서 본 연구에서는 10으로 하였다. \hat{v}_1 과 \hat{v}_2 은 진폭으로 각각 0.01과 0.05이다. ϕ_1 과 ϕ_2 는

위상차로서 둘 다 $-\pi/2$ 로 주었다. 그리고 속도 u 에 주어지는 섭동량 u' 은 연속방정식에 의해 구해진다. 각 공간차분기법에 대해 $Re=50$ 에서 계산을 수행하여 결과를 비교하였다. 계산영역은 주 유동방향으로 $L_x=30\delta$ 이고 수직 방향으로는 $L_y=100\delta$ 이며 각 방향으로 129×129 비균일 격자계를 사용하였다.

점탄성 유체에 대한 시간적으로 발달하는 혼합 층 유동은 Azaiez와 Homsy⁽¹¹⁾에 의해 최초로 이

루어졌다. 그들은 Oldroyd모델과 FENE-P모델에 대하여 스펙트럴기법을 사용하여 다양한 Re , We , λ 와 ε 에 대해 계산을 수행하였다. 그들은 We 를 400까지 증가시킬 수 있었지만 실제 중요한 유동장의 변화는 관찰할 수 없었다. 그 이유는 첫째, 사용한 λ 이 5 정도로 상당히 작아 급격한 폴리머 응력구배가 형성되기 힘들고 둘째, 본질적으로 이 유동은 전단유동으로 점탄성 유체 유동의 층류 전단 유동은 뉴턴유체와 큰 차이를

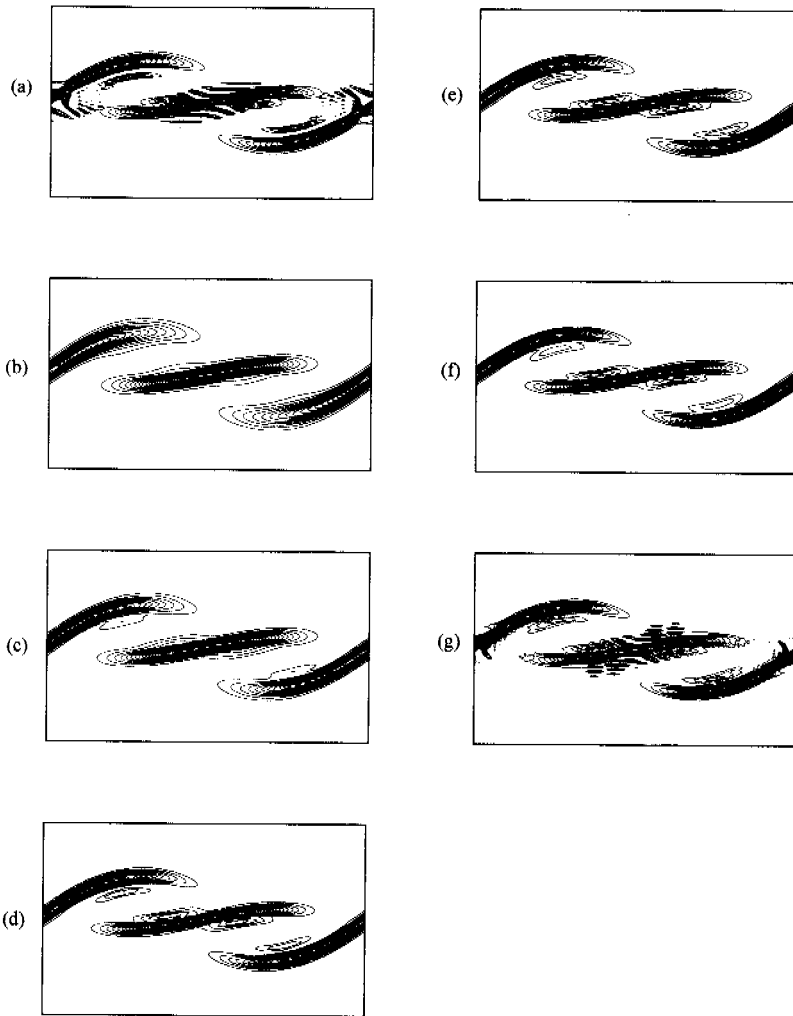


Fig. 4 Contours of τ_{xx} for the temporally evolving mixing layer for a viscoelastic fluid flows at $We=25$ (min:0.5, max:11): (a) CD, (b) UD, (c) AD, (d) LUDS, (e) QUICK, (f) CUD3, (g) COM4

보이지 않기 때문이다.⁽⁷⁾

Fig. 2는 뉴턴유체 ($We=0$)에 대한 결과이다. 초기유동에서 섭동량이 주어져 두 개의 보텍스가 발생하고(Figs. 2(a)~(b)) roll-up이 일어나 발달하다가(Figs. 2(c)~(e)) 마침내 하나의 큰 보텍스로 되어(Figs. 2(f)) 다시 roll-up이 일어나는 과정을 볼 수 있다. Fig. 3은 점탄성 유체 ($We=25$)일 때 CUD3를 사용한 결과이다. Fig. 2와 비교하여 보면 부분적으로 차이를 보이지만 전체적으로 큰

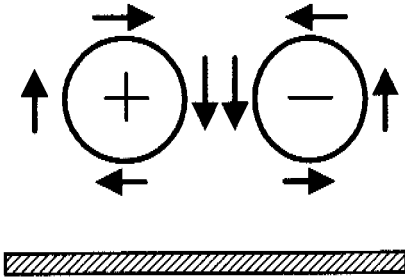


Fig. 5 Two-dimensional vortex pair interacting with a wall

변화가 없음을 볼 수 있다.

Fig. 4는 $Re=50$, $We=25$, $t=60$ 일 때 각 공간차분도식에 따른 폴리머 응력 τ_{xx} 를 그린 것이다. CD와 COM4의 결과(Figs. 4(a), (g))에서는 수치적 교란으로 인한 해의 일그러짐(wiggle)을 볼 수 있다. 이러한 교란들은 결국 수치해를 파괴시켜 더 이상의 시간에서 결과를 얻을 수 없었다. 그러나 고정확도의 COM4의 결과(Fig. 4(g))가 CD의 결과(Fig. 4(a))보다는 다소 좋은 것을 볼 수 있다. 반면 확산오차를 수반하는 다른 도식들에 의한 결과들에서는 해의 일그러짐을 볼 수 없다. 한편 LUDS(Fig. 4(d)), QUICK(Fig. 4(e))과 CUD3(Fig. 4(f))의 결과는 대체로 일치하지만 UD(Fig. 4(b))와 AD(Fig. 4(c))의 결과에서는 과도한 수치확산으로 인해 폴리머 응력 구배들이 상당히 감쇄된 것을 볼 수 있다.

3.2 벽면과 상호작용하는 2차원 보텍스 쌍

Fig. 5는 벽면과 상호작용하는 2차원 보텍스 쌍에 대한 개략적인 그림이다. 이 유동은 난류 경

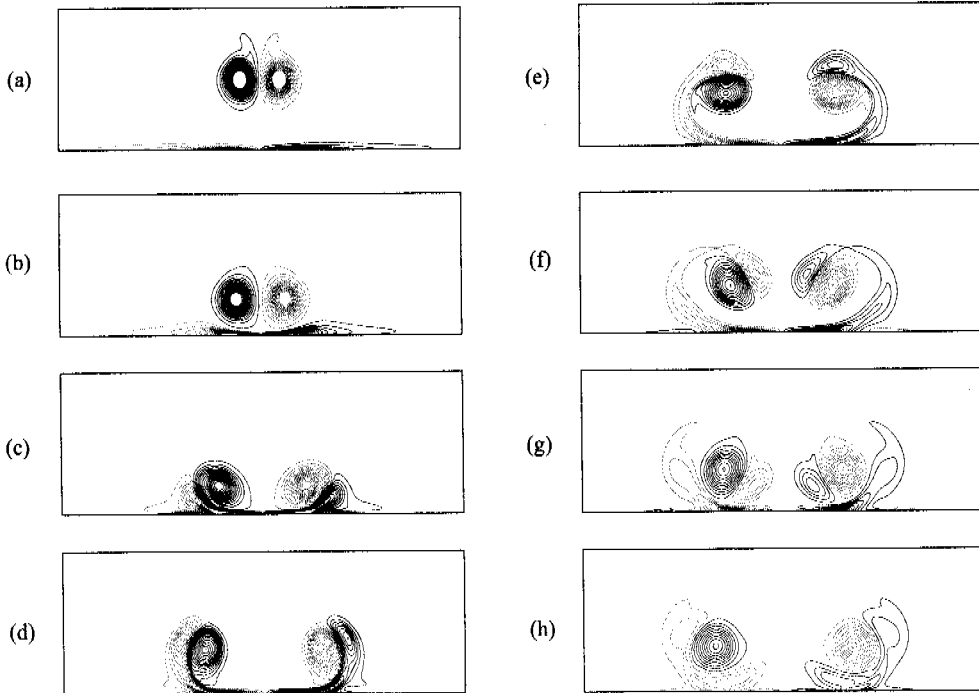


Fig. 6 Vorticity contours for the two dimensional vortex pair interacting with a wall in the case of a Newtonian fluid (min: -15, max: 15): (a) $t=1$, (b) $t=2$, (c) $t=3$, (d) $t=4$, (e) $t=5$, (f) $t=6$, (g) $t=7$, (h) $t=8$

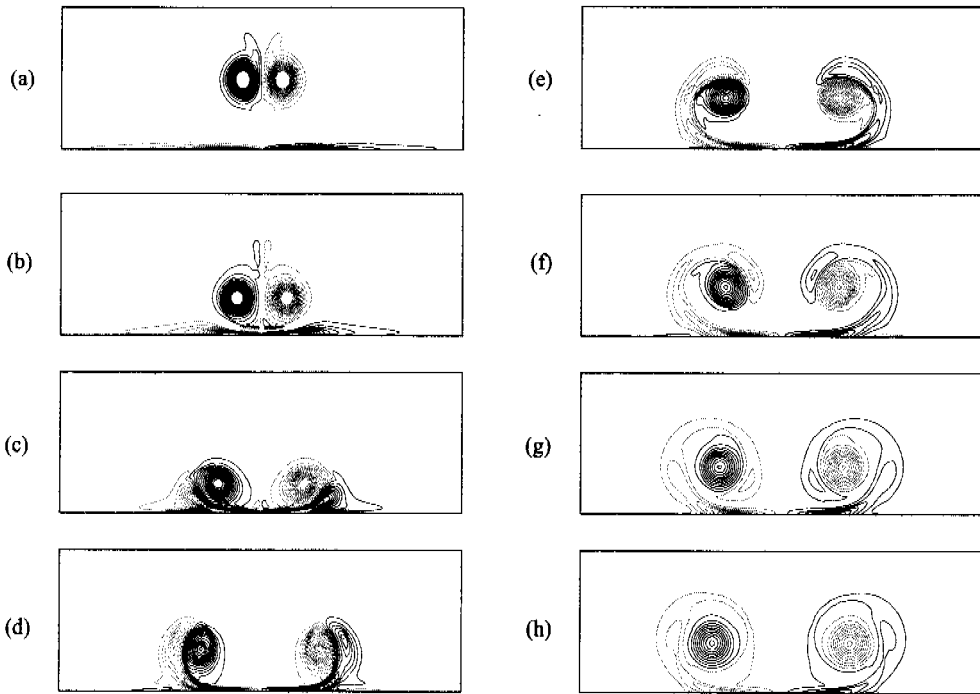


Fig. 7 Vorticity contours for the two dimensional vortex pair interacting with a wall in the case of a viscoelastic fluid at $We=5$ (min: -15, max: 15): (a) $t=1$, (b) $t=2$, (c) $t=3$, (d) $t=4$, (e) $t=5$, (f) $t=6$, (g) $t=7$, (h) $t=8$

계층 유동에 존재하는 주 유동방향 보텍스 쌍을 2차원적으로 모사하기 위해 제안된 것으로 유동 제어나 난류 항력 감소 연구 등에 이용되어 왔다.⁽³³⁾ Re 와 We 는 각각 Γ/ν 와 $\lambda\Gamma/\delta^2$ 로 정의된다. 여기서 Γ 는 보텍스 쌍의 초기 회전량이다. 각 공간 차분기법에 대해 $Re=1800$ 에서 계산을 수행하여 결과를 비교하였다. 계산영역은 폭 방향으로 $L_x=2\pi\delta$, 수직방향으로 $L_y=2\delta$ 가 사용되었으며 각 방향으로 257×129 격자계가 사용되었다.

Fig. 6은 뉴턴유체($We=0$)에 대한 결과이다. 초기에 주어진 서로 반대방향으로 회전하는 보텍스 쌍이 아래 벽면으로 움직이기 시작하면(Fig. 6(a)) 벽면에서는 점성으로 인해 다시 반대 방향의 보텍스가 생성되어(Figs. 6(b), (c)) 또 다른 보텍스 쌍을 형성하게 된다(Fig. 6(d)). 새로이 형성된 이 보텍스 쌍들은 이번엔 위쪽 벽면으로 이동하였다가(Figs. 6(d), (e)) 다시 아래벽면으로 이동한다(Figs. 6(f)~(h)).

Fig. 7은 점탄성 유체($We=5$)일 때 CUD3를

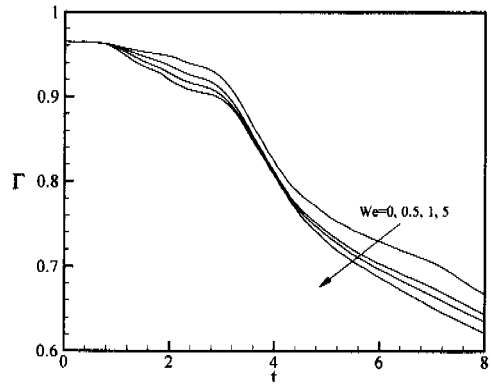


Fig. 8 Time history of circulation with respect to We

사용한 결과이다. 무차원시간이 4일 때까지 (Figs. 7(a)~(d))는 뉴턴유체의 결과들(Figs. 6(a)~(d))과 큰 차이를 보이지 않지만 5이상의 시간에서는 회전량이 많이 감소하여 아래 벽면으로부터 새로이 형성된 보텍스 쌍이 뉴턴유체의 경우와 비교하여 상당히 약화된 것을 볼 수 있다(Figs. 7(e)~(h)).

Fig. 8은 시간에 따른 회전량의 변화를 We 값의 증가에 따라 나타낸 것이다. We 값의 증가에 따라 $t=1\sim 4$ 에서도 이미 회전량은 상당히 감소하는 것을 볼 수 있다. 이와 같은 결과들은 폴리머 응력이 유동의 회전을 억제하는 역할을 하고 있음을 의미한다. 뉴턴유체의 회전에 극소량의 폴리머를 첨가할때 실험적으로 관찰된 보텍스 억제 현상(vortex inhibition) 역시 연신유동에서 첨가된 폴리머에 의해 발생하는 강한 폴리머 응력이 유동의 회전을 억제하여 발생하는 것으로 이해되고 있다.⁽²⁸⁾

Fig. 9는 $We=5$, $t=1$ 일 때 τ_{yy} 를 그린 것이다. 확산오차가 없는 CD와 COM4는 이 경우 매우 낮은 We (대략 0.1)를 제외하고는 해가 구해지지 않는데, 이는 시간적으로 발달하는 혼합층의 경우 비교적 높은 수의 We (대략 10)에 대해서도

해를 구할수 있었던 것과는 대조적이다. 그 이유는 보텍스 쌍의 경우 연신유동성이 훨씬 강하여 보다 급격한 응력구배가 형성되기 때문으로 생각된다. 한편 확산오차를 수반하는 LUDS와 CUD3의 경우에도 한계 We 수는 대략 10이다. 반면 UD와 AD는 거의 We 수의 제한없이 해를 구할 수 있었다.

하지만 UD (Fig. 9(a))와 AD (Fig. 9(b))는 수치 확산이 과도하여 급격한 폴리머 응력구배를 상당히 감쇄시킨다. 또한 LUDS (Fig. 9(c))는 폴리머 응력구배를 상당히 감쇄시킬 뿐 아니라 급격한 폴리머 응력구배 주위에서 τ_{yy} 가 음수가 되는 등 비물리적인 거동을 보이고 있다. QUICK (Fig. 9(d))의 경우 LUDS에 비해 확산오차는 상대적으로 작지만 이러한 비물리적인 거동은 더욱 심해진 것을 볼 수 있는데 결국 $t>2$ 에서 수치해의

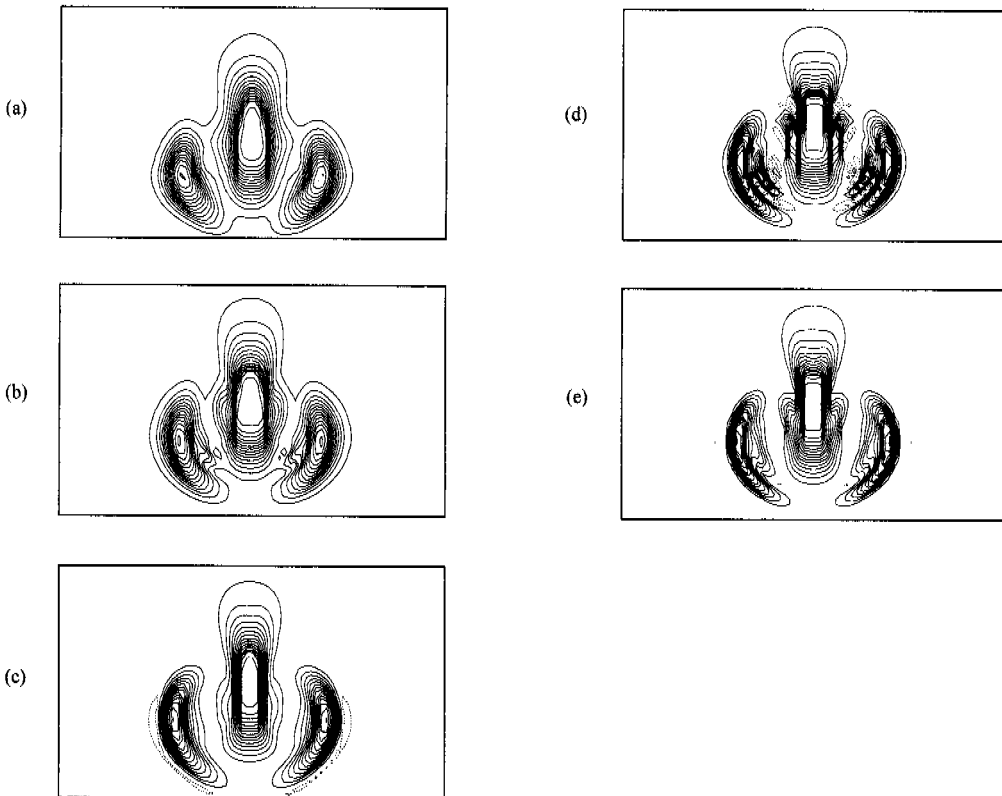


Fig. 9 Contours of τ_{yy} for the two dimensional vortex pair interacting with a wall at $We=5$ (min: -20, max: 100): (a) UD, (b) AD, (c) LUDS, (d) QUICK, (e) CUD3

과괴가 일어났다. LUDS와 QUICK에서 보이는 이러한 비물리적인 거동은 LUDS와 QUICK 도식이 일차 미분의 차분화에 5개의 격자를 이용하여 구속조건(boundedness)을 만족하지 않기 때문으로 생각된다. 따라서 똑같은 3차 정확도이지만 3개의 격자를 사용하는 CUD3(Fig. 9(e))의 경우에는 비물리적인 거동을 보이지 않는다.

3.3 완전히 발달된 난류 채널 유동

Fig. 10은 완전히 발달된 난류 채널유동의 개략도이다. Re 와 We 는 각각 $U\delta/\nu$ 와 $\lambda U/\delta$ 로 정의되고 U 는 완전히 발달된 층류유동의 중심속도이다. 계산 영역은 주유동방향, 수직방향, 폭방향으로 각각 7δ , 2δ , 3.5δ 이고 각 방향으로 $64 \times 97 \times 96$ 격자계가 사용되었다. Re 는 3000 ($Re_\tau \approx 135$)이고 점탄성 유체의 난류 채널유동의 초기 조건으로는 뉴턴유체 ($\epsilon=0$)의 완전히 발달된 난류 채널 유동장이 사용되었다. Fig. 11은 뉴턴유체의 완전히 발달된 난류 채널 유동의 결과이다. 평균유동장(Fig. 11(a))과 rms값들(Fig. 11(b))이 기존의 연구결과들과 잘 일치 하는 것을 볼 수 있다. Kim 등⁽¹⁸⁾은 $Re_\tau \approx 180$, Sureshkumar 등⁽²¹⁾은 $Re_\tau \approx 125$ 에 대한 계산을 수행하였다.

완전히 발달된 난류 채널 유동의 경우에는 CD, COM4 뿐만 아니라 LUDS, QUICK 역시도 We 가 매우 작은 영역(대략 1)이외에는 해가 구해지지 않는다. 이는 앞 절에서 언급하였듯이 이들 도식들이 구속조건(boundedness)을 만족하지 않기 때문으로 생각된다. 반면 UD와 AD는 거의 모든 We 에 대해서도 해가 구해진다. 한편, CUD3의 경우 $We > 2$ 이고 $t > 100$ 이면 수치해의 과괴가 일어난다. 이를 보완하기 위하여 배열텐서 c_{ij} 의 행

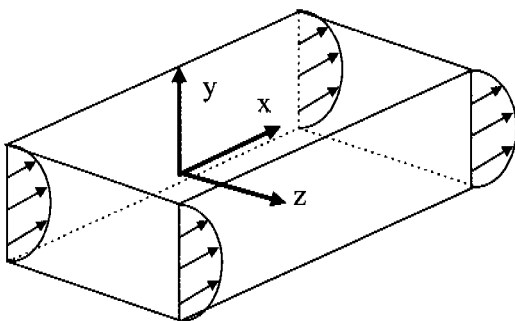


Fig. 10 Fully developed turbulent channel flow

렬식이 음수가 되는 국부적인 영역에 수치확산을 첨가하는 기법을 사용하였는데 이는 수치해의 과괴가 이러한 영역으로부터 발생하기 때문이다. 이렇게 개선된 CUD3기법으로 $We=4$ 에 대한 계산도 가능하게 되었다. 국부적으로 첨가된 인공확산은 2차 정확도이나 배열텐서 c_{ij} 의 행렬식이 음수가 되는 영역은 전체의 0.5%도 되지 않으므로 전체 정확도에는 큰 영향이 없다.

Fig. 12는 $We=4$ 일 때 AD와 개선된 CUD3를 사용한 결과에서 $y-z$ 평면에서의 r_{xx} 를 나타낸 것이다. UD와 AD는 비교적 높은 수의 We 에 대해서도 계산을 수행할 수 있었지만 이들 도식들은 확산오차가 과도하여 AD를 사용하는 경우 Fig. 12에서 보듯이 개선된 CUD3와 비교해 보았을 때 작은 스케일의 난류구조들이 없어져 버린 것을 볼 수 있다. 이러한 작은 스케일들의 난류구조들은 난류유동에서 매우 중요한 요소들로

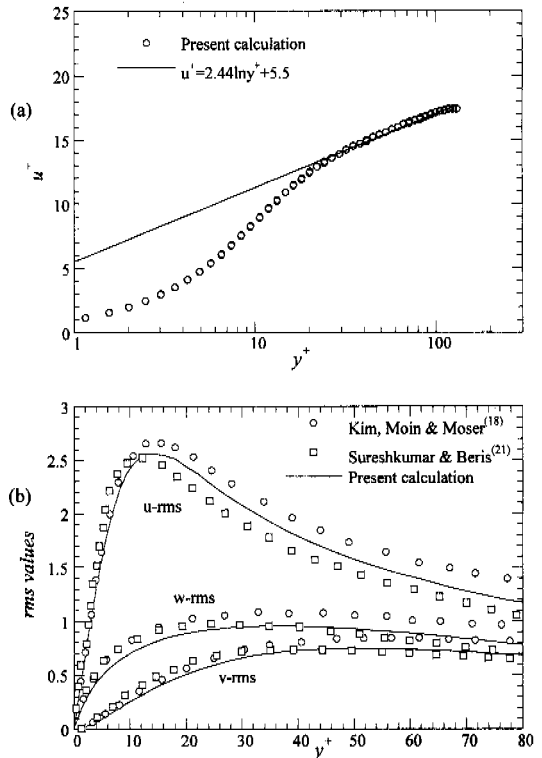


Fig. 11 Fully developed turbulent channel flow for a Newtonian fluid: (a) mean velocity, (b) rms values

Fig. 13에서와 같이 시간에 따른 항력(dp/dx) 변화를 보면 AD와 개선된 CUD3는 근본적인 차이를 보인다. 흥미로운 사실은 일반적으로 속도장의 공간차분에 확산오차가 존재하는 경우 난류의 벽면 마찰이 인공적으로 감쇄되어 항력이 감소하는 것처럼 나타나는 반면 점탄성 유체유동에서는 폴리머 응력의 공간차분에 확산오차가 심해지면 확산오차가 작은 기법의 결과보다 오히려 항력은 크게 나타난다(Fig. 13). 따라서 폴리머 첨가제에 의한 난류 항력 감소에 대한 연구를 수치해석적으로 수행하는 경우 공간차분기법으로 AD를 사용하는 것⁽²¹⁻²³⁾은 매우 부적절한 것으로 생각된다.

Fig. 14는 뉴턴유체($We=0$)와 점탄성 유체($We=4$)의 완전발달 난류 채널 유동의 시간평균된 결과들을 비교한 것이다. 점탄성 유체의 결과는 개선된 CUD3를 사용한 것이다. 점탄성 유체의 주유동 방향의 시간 평균된 속도가 뉴턴유체에 비해 위쪽으로 올라간 것을 볼 수 있는데 이는 동일한 압력구배에서는 유량이 증가함을, 즉 항력 감소가 일어났음을 의미한다. 한편 속도

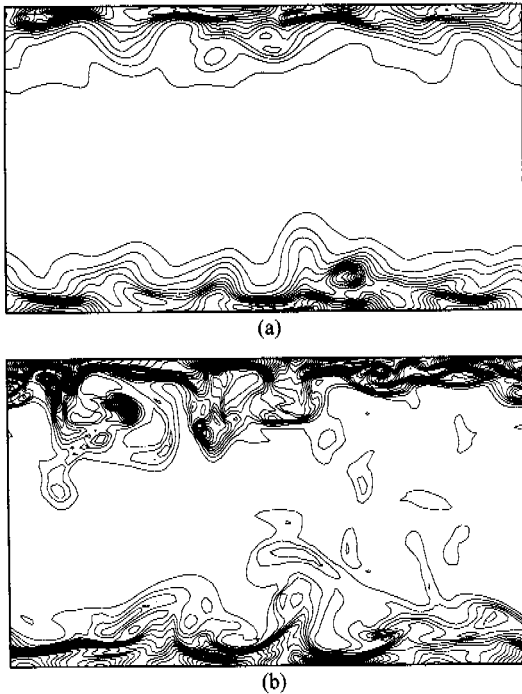


Fig. 12 Contours of τ_{xx} for the fully developed turbulent channel flow at $We=4$ (min: 3, max: 100): (a) AD, (b) CUD3 with local AD

의 rms 값들을 보면 주유동 방향(u)은 증가하고 수직방향(v)과 폭방향(w)은 감소함을 볼 수 있

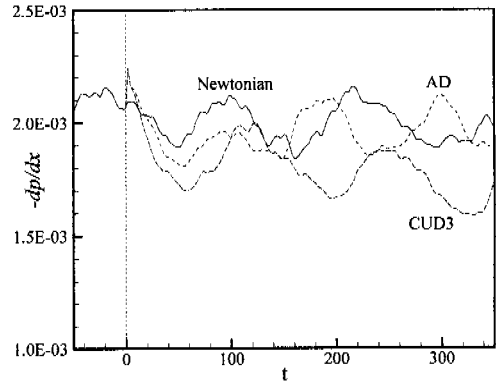


Fig. 13 Time history of dp/dx for the fully developed turbulent channel flow

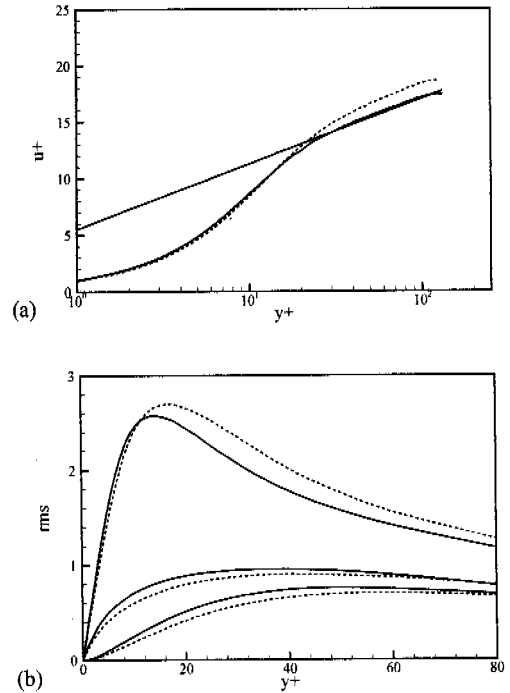


Fig. 14 Fully developed turbulent channel flow for a Newtonian and viscoelastic fluid: (a) mean velocity, (b) rms value. —, $We=0$; ·····, $We=4$.

는데 이는 실험적인 경향⁽³⁴⁾과도 일치한다.

4. 결 론

본 연구에서는 공간차분기법이 점탄성 유체 유동의 수치해에 미치는 영향을 검토하기 위하여 시간적으로 발달하는 혼합층, 벽면과 상호작용하는 2차원 보텍스 쌍, 완전히 발달된 난류 채널유동에 대한 수치해석을 수행하였다. 모든 경우에 있어서 CD와 COM4는 낮은 수의 We 에서 수치해의 파괴가 발생하였다. 점탄성유체 유동의 수치해석에서 가장 널리 쓰이는 UD와 AD는 높은 수의 We 에서도 안정적인 해를 구할 수 있었으나 폴리머 응력구배를 심하게 감쇄시켜 같은 유동 조건에서 보다 고차 정확도인 LUDS나 QUICK, CUD3 등의 결과와는 많은 차이를 보였다. 2차 이상의 고차 정확도의 확산오차를 수반하는 공간차분 도식 중에서는 CUD3가 가장 안정되고 정확한 결과를 보였다. 그러므로 연신성이 강한 유동에서는 구성방정식의 대류항에 CUD3를 사용하는 것이 바람직하다.

후 기

본 연구는 한국과학기술연구원(국제공동연구, 창의적연구진흥사업)과 1999년도 두뇌한국21사업의 후원으로 이루어졌으며 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Caswell, B., 1996, "Report on the IXth International Workshop on Numerical Methods in Non-Newtonian Flows," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 62, pp. 99~110.
- (2) Mompean, G. and Deville, M., 1997, "Unsteady Finite Volume Simulation of Oldroyd-B Fluid Through a Three - Dimensional Planar Contraction," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 72, pp. 253~279.
- (3) Xue, S. -C., Phan-Thien, N. and Tanner, R. I., 1998, "Three Dimensional Numerical Simulations of Viscoelastic Flows Through Planar Contraction," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 74, pp. 195~245.
- (4) Barnes, H. A., Hutton, J. F. and Walters, K., 1989, An Introduction to Rheology, *Rheology Series Vol. 3*, Elsevier Science Publishers, New York.
- (5) Schowalter, W. R., 1978, Mechanics of Non-Newtonian Fluids, Pergamon, Oxford.
- (6) Renardy, M., 1995, "On the Mechanism of Drag Reduction," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 59, pp. 93~101.
- (7) Gyr, A. and Tsinober, A., 1997 "On the Rheological Nature of Drag Reduction Phenomena," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 73, pp. 153~162.
- (8) Crochet, M. J., Davies, A. R. and Walters, K., 1984, Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow, *Rheology Series Vol. 1*, Elsevier Science Publishers, New York.
- (9) Joseph, D. D., 1990, Dynamics of Viscoelastic Liquids, Springer-Verlag, New York.
- (10) Dupret F. and Marchal, J. M., 1986, "Loss of Evolution in the Flow of Viscoelastic Fluids," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 20, pp. 143~171.
- (11) Azaiez J. and Homsy, G. M., 1994, "Numerical Simulation of Non-Newtonian Free Shear Flows at High Reynolds Numbers," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 52, pp. 333~374.
- (12) Beris, A. N. and Sureshkumar, R., 1995, "Simulation of Time-Dependent Viscoelastic Channel Flow at High Reynolds Numbers," *Chemical Eng. Sci.*, Vol. 51, pp. 1451~1471.
- (13) Sureshkumar, R. and Beris, A. N., 1995, "Effect of Artificial Stress Diffusivity on the Stability of Numerical Calculations and the Flow Dynamics of Time-Dependent Viscoelastic Flows," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 60, pp. 53~80.
- (14) Marchal, J. M. and Crochet, M. J., 1987, "A New Mixed Finite Element Method for Calculating Viscoelastic Flow," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 26, pp. 77~114.

- (15) King, R. K., Apelian, M. R., Armstrong, R. C. and Brown, R. A., 1988, "Numerically Stable Finite Element Methods for Solution of Steady Viscoelastic Flows," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 29, pp. 147~216.
- (16) Rajagopalan, D., Armstrong, R. C. and Brown, R. A., 1990, "Finite Element Methods for Calculation of Steady Viscoelastic Flow Using Constitutive Equations with a Newtonian Viscosity," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 36, pp. 159~192.
- (17) Yoo, J. Y. and Na, Y., 1991, "A Numerical Study of Planar Contraction Flow of Viscoelastic Fluid Using the SIMPLER Algorithm," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 39, pp. 89~106.
- (18) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., 1987, "Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number," *J. Fluid Mech.*, Vol. 177, pp. 133~166.
- (19) Orlandi, P., 1995, "A Tentative Approach to the Direct Simulation of Drag Reduction by Polymers," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 60, pp. 277~301.
- (20) Den Toonder, J. M., Hulsen, M. A., Kuiken, G. D. C. and Nieuwstadt, F. T. M., 1997, "Drag Reduction by Polymer Additives in a Turbulent Pipe Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 337, pp. 193~231.
- (21) Sureshkumar, R., Beris, A. N. and Handler, R. A., 1997, "Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow of a Polymer Solution," *Phys. Fluids*, Vol. 9, pp. 743~755.
- (22) Dimitropoulos, C. D. Sureshkumar, R. and Beris, A. N., 1998, "Direct Numerical Simulation of Viscoelastic Turbulent Channel Flow Exhibiting Drag Reduction: Effect of the Variation of Rheological Parameters," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 79, pp. 433~468.
- (23) De Angelis, E., Casciola, C. M. and Piva, R., 1999, "Wall Turbulence in Dilute Polymer Solutions," *Proceedings of 8th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, p. 75.
- (24) Pilitis, S. and Beris, A. N., 1989, "Calculations of Steady State Viscoelastic Flow in an Undulating Tube," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 31, pp. 231~287.
- (25) Missirlis, K. A., Assimacopoulos, D. and Mitsoulis, E., 1998, "A Finite Volume Approach in the Simulation of Viscoelastic Expansion Flows," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 78, pp. 91~118.
- (26) Oliveira, P. J., Pinho, F. T. and Pinto, G. A., 1998, "Numerical Simulation of Nonlinear Elastic Flows with a General Collocated Finite Volume Method," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 79, pp. 1~43.
- (27) Singh, P. and Leal, L. G., 1993, "Finite Element Simulation of the Start-up Problem for a Viscoelastic Fluid in an Eccentric Rotating Cylinder Geometry Using a Third-order Upwind Scheme," *Theor. Comput. Fluid. Dyn.*, Vol. 5, pp. 107~137.
- (28) Bird, R. B., Curtiss, C. F., Armstrong, R. C. and Hassager, O., 1987, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1, Fluid Mechanics, John Wiley & Sons, New York.
- (29) Lele, S. K., 1992, "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution," *J. Comput. Phys.*, Vol. 103, 16~42.
- (30) Tolstykh, A. I. and Lipavskii, M. V., 1998, "On Performance of Methods with Third- and Fifth-order Compact Upwind Differencing," *J. Comput. Phys.*, Vol. 140, 205~232.
- (31) Ferziger, J. H. and Peric, M., 1996, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York.
- (32) Yee, H. C., Sandham, N. D. and Djomehri, M. J., 1999, "Low-Dissipative High-Order Shock-Capturing Methods Using Characteristic - Based Filters," *J. Comput. Phys.*, Vol. 150, pp. 199~238.
- (33) Choi, H., Moin, P. and Kim, J., 1994, "Active Turbulent Control for Drag Reduction in Wall-Bounded Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 262, pp. 75~110.
- (34) Luchik, T. S. and Tiedermann, W. G., 1988, "Turbulent Structure in Low-Concentration Drag-Reducing Channel Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 190, pp. 241~263.