수평 환형 공간에서의 혼돈 열대류로의 분기

유 주 식* · 김 용 진**

(2000년 1월 31일 접수)

Bifurcation to Chaotic Thermal Convection in a Horizontal Annulus

Joo-Sik Yoo and Yong-Jin Kim

Key Words: Natural Convection(자연 대류), Oscillatory Convection(진동 대류), Bifurcation(분기), Period-Tripling Bifurcation(주기 3배 분기), Chaos(혼돈)

Abstract

Thermal convection in a horizontal annulus is considered, and the bifurcation phenomena of flows from time-periodic to chaotic convection are numerically investigated. The unsteady two-dimensional streamfunction-vorticity equation is solved with finite difference method. As Rayleigh number is increased, the steady flow bifurcates to a time-periodic flow with a fundamental frequency, and afterwards a period-tripling bifurcation occurs with further increase of the Rayleigh number. Chaotic convection is established after a period-doubling bifurcation. A periodic convection with period 4 appears after the first chaotic convection. At still higher Rayleigh numbers, chaotic flows reappear.

기호설명

$C(\tau)$: correlation function
D_i : 안쪽 실린더의 지름
f : 주파수
f_1 : 가장 큰 피크의 주파수
g : 중력 가속도
L : 환형의 폭, $R_o - R_i$
Nu : Nusselt 수
$P(f)$: autospectral density function
Pr : Prandtl 수, ν/χ
R_i, R_o : 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
Ra : Rayleigh 수, $\alpha g(T_i - T_o)L^3/\chi\nu$
r : 반경 방향의 좌표
r_i ,r_o : 무차원화 된 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
t : 시간
Δt_S : 데이터의 sampling time step
T_i,T_o : 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 온도
u : 반경 방향의 속도 성분
$u(t)$: $(r_c, \pi/2)$에서의 반경 방향의 속도
v : 원주 방향의 속도 성분

그리스문자

α : 열 팽창 계수
η : 확장된 반경 방향의 좌표
θ : 무차원화 된 온도
χ : 열 확산 계수
ν : 동점성 계수
ρ_0 : 밀도
ϕ : 원주 방향의 좌표

* 회원, 안동대학교, 기계공학교육과
E-mail : jsyoo@andong.ac.kr
TEL : (054)850-5671 FAX : (054)853-1766
** 회원, 한국기계연구원, 열유체환경연구부

Ψ : 유선 함수
ω : 와도

1. 서 론

두 개의 수평 동심 실린더 내에서 일어나는 자연 대류 현상은, 흥미로운 유동의 형태와 열에너지 저장 시스템, 전기 케이블의 냉각 등의 넓은 응용 분야로 인해 많은 관심을 받아 왔다. 이 시스템에 있어서의 유동 형태에 대한 일반적인 특성은 Powe 등[1]과 Rao 등[2] 에 의해 실험적으로 규명되었다. 그들은 공기의 유동 형태를 Grashof 수와 두 실린더 사이의 상대적인 간격을 변수로 하여 다음과 같은 4 가지의 기본적인 유동 형태들로 분류하였다 : (1) 정상 상태의 두 셀 유동, (2) 2차원적인 진동하는 대류, (3) 3차원적인 진동하는 유동, (4) 2차원의 복수 셀 유동.

액체 금속과 같은 낮은 Prandtl 수의 유체는 큰 Rayleigh 수에서 조금 더 복잡한 유동의 형태를 보인다.[3-6] Mack and Bishop[3]과 Custer and Shaughnessy[4]는 $D_i/L=2$의 환형 내에 있는 Pr=0.02 의 유체의 정상 상태의 자연 대류를 조사하였다. 그들은 Ra에 대해 해를 전개함으로써 두 개의 소용돌이(eddy)로 구성되는 정상 상태의 복수 셀 유동(multicellular flow)을 보였다. 그리고 Fant 등[5]과 Yoo 등[6]은 Prandtl 수가 0 혹은 0.02인 경우에 대해 좁은 환형에서 진동하는 복수 셀의 유동을 보였다.

이와 같이 수평 환형 내에서의 자연 대류에 관해 많은 연구가 수행되었지만 지금까지의 연구들은 대부분 정상 상태의 유동을 연구하였다. 특히 Prandtl 수가 유동 형태에 미치는 영향에 대한 연구는 매우 적다. 최근 Yoo[7,8]는 여러 가지의 Prandtl 수에 따른 대류 현상과 분기 현상을 체계적으로 조사하여 환형에서 일어나는 열적(thermal) 및 수력학적 불안정성(hydrodynamic instability)은 Prandtl 수에 따라 매우 다양한 형태의 유동과 천이 현상을 일으킨다는 것을 보였다. Yoo[7]는 $D_i/L=12$ 의 좁은 환형을 고려하였는데 이때의 전도 영역의 안정성은 Prandtl 수의 함수로서 다음과 같은 두 가지 영역으로 구분된다는 것을 보였다. (1) $Pr\leq 0.2$: 수력학적 불안정이 일어남으로 인해 유동장은 같은 방향으로 회전하는 두 개 이상의 셀들로 구성된다. (2) $Pr\geq 0.3$, 환형의 꼭대기 부근에서 열불안정이 일어나며 초기에는 사각형 모양의 하나의 작은 셀이 형성되는 정상 상태의 유동을 보인다. 그리고 불안정이 일어난 후에는 Prandtl 수에 따라서 다양한 복수 셀 유동(multicellular flow)과 분기 현상, 및 진동 대류(oscillatory convection)가 존재함을 보였다.[7,8]

그런데 기존의 연구들은 모두 유동장의 공간적 특성에 관심을 두고서 진동 대류의 시간적 특성은 더 이상 조사하지 않았다. 그러나 진동하는 대류는 유동의 시간적 거동에 따라 단순 주기적인 운동, subharmonic frequency를 갖는 주기적인 운동, 2개 혹은 3개의 incommensurable frequency 를 갖는 준주기적인 운동 등으로 나눌 수 있으며 최종적으로는 불규칙적인 혼돈 유동으로 발전된다.

이와 같은 시간적인 혼돈(temporal chaos)으로의 천이 경로는 아주 흥미 있는 현상으로서 유체 역학 뿐만 아니라 여러 분야의 비선형 시스템에 걸쳐 광범위하게 연구되어 왔다(Schuster[9]).

Gollub and Benson[10]은 Rayleigh- Bénard 대류에서 4 가지의 서로 다른 경로를 실험적으로 발견하였으며, McLaughlin and Orszag[11]는 수치 실험을 통하여 주기적인 운동, 준주기적인 운동, 혼돈 운동을 보였다. 그리고 Yoo and Kim[12] 은 공간 주기적인 온도 분포를 갖는 수평 유체층 내의 자연 대류에서 주기 배가 분기 현상(period-doubling bifurcation)이나 준주기적인 상태를 거친 후에 혼돈 운동이 일어난다는 것을 보였다. 한편 Guzmán and Amon[13]은 주기적인 형태의 벽면을 갖는 채널 내의 유동에서는, 3 번의 Hopf bifurcation을 거친 후에 chaos에 도달한다는 것을 보였다.

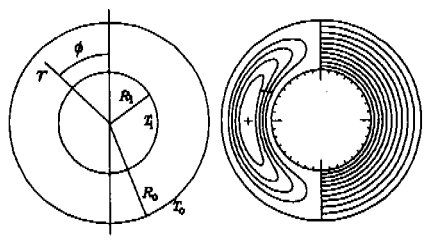

Fig. 1 Problem configuration and a plot of streamlines and isotherms at small Rayleigh number

진동하는 대류에 있어서 Chaos로의 천이 현상을 조사하기 위해서는 매우 긴 시간 동안 아주 정확한 계산을 수행해야 한다. 본 연구에서는 비정상 상태의 방정식을 매 시간마다 빠르고 정확하게 풀 수 있는 수치적인 방법을 사용하여 chaos로의 천이 경로를 조사한다. 고려하는 환형은 $D_i/L=2$의 적당한 폭을 갖는 환형이며 $Pr=0.1$인 중간 Prandtl 수 유체에 대해 진동 대류의 분기 현상을 조사한다.

2. 해 석

고려하는 시스템의 구조와 좌표계는 Fig. 1과 같다. 일정한 표면 온도를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 유체가 있다. 안쪽 실린더의 온도는 T_i이고 바깥쪽 실린더의 온도는 T_o이며 $T_i > T_o$이다. Boussinesq 근사하에서 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화는 무시하며, 그 외의 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다. 문제를 해석하기 위하여 Fig. 1과 같은 실린더 좌표계 (r,ϕ)를 사용한다. 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성 길이, 시간, 속도, 압력과 온도를 각각 L, L^2/ν, ν/L, $\rho_0\nu^2/L^2$, (T_i-T_o)로 택하여 무차원화시킨다. 그리고 $Pr=\nu/\kappa$, $Ra=\alpha g(T_i-T_o)L^3/\kappa\nu$를 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수로 정의한다.

유선함수(streamfunction) Ψ와 와도(vorticity) ω에 대한 무차원 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = J(\Psi,\omega) + Pr\nabla^2\omega - PrRa\left[\sin(\phi)\frac{\partial\theta}{\partial r} + \cos(\phi)\frac{\partial\theta}{r\partial\phi}\right] \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2\Psi \quad (2)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = J(\Psi,\theta) + \nabla^2\theta \quad (3)$$

여기에서 와도(ω)와 유선함수(Ψ) 및 Jacobian은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega=\frac{\partial}{r\partial r}(rv)-\frac{\partial}{r\partial\phi}(u),\quad u=\frac{\partial\Psi}{r\partial\phi},\quad v=-\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

$$J(f,g) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial\phi} - \frac{\partial f}{\partial\phi}\frac{\partial g}{\partial r}\right) \quad (4)$$

그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0,\ \omega = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2},\ \theta = 1 \quad \text{at} \quad r=r_i \quad (5)$$

$$\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0,\ \omega = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2},\ \theta = 0 \quad \text{at} \quad r=r_o \quad (6)$$

각도 방향으로는 다음과 같은 대칭 조건을 적용한다.

$$\Psi=\omega=\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}=\frac{\partial\theta}{\partial\phi}=0 \quad \text{at} \quad \phi=0,\pi \quad (7)$$

식 (1)-(7)의 방정식은 Yoo[14]에서 사용한 것과 같은 유한차분법을 사용하여 푼다. 식 (1)과 (3)을 차분화시키는 데 있어서는 시간 미분 항과 확산 항에 대해 Dufort-Frankel의 leap-frog 방법[15]을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분을 사용한다. 유선 함수에 대한 Poisson 방정식은 다섯 점 공식을 이용하여 유한한 방정식 계로 바꾼다. 그리고 이 차분화된 Poisson 방정식은 Buzbee 등[16]의 순환적인 짝홀 제거 방법을 사용하여 반복 계산을 하지 않고 바로 푼다. 이 방법은 매우 빠르고 정확하다. 공간주기적인 자연 대류에서도 Yoo and Kim[12]은 이와 같은 방법을 사용하여 chaos로

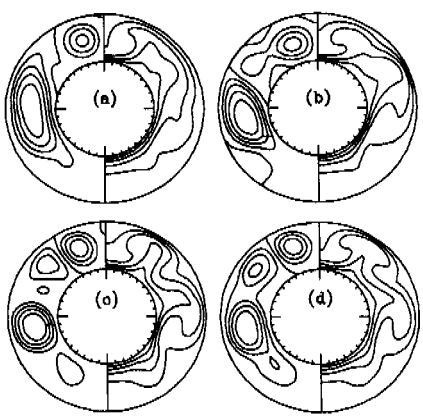

Fig. 2 Instantaneous streamlines and isotherms at $Ra=3\times10^4$ during one period(P) of oscillation: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value ; (b) at $t=t_1+P/4$; (c) at $t=t_1+2P/4$; (d) at $t=t_1+3P/4$

의 천이 경로를 잘 규명한 바가 있다. 각 방향으로는 균일 격자를 이용하고 반경 방향으로는 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$r = r_i + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)}\right] \quad \text{with } C=1.5,\ 0\le\eta\le1 \tag{8}$$

본 연구에서 사용한 $(r\times\phi)$ 격자계는 (35×65)이며 time step은 $\Delta t=2\times10^{-4}$이다.

진동하는 대류를 관찰하기 위하여 계산 기간 동안에 다음과 같이 환형의 중심에서의 반경 방향의 속도를 기록한다.

$$u(t) = u(r_c, \pi/2, t) \quad \text{여기에서 } r_c=(r_i+r_o)/2 \tag{9}$$

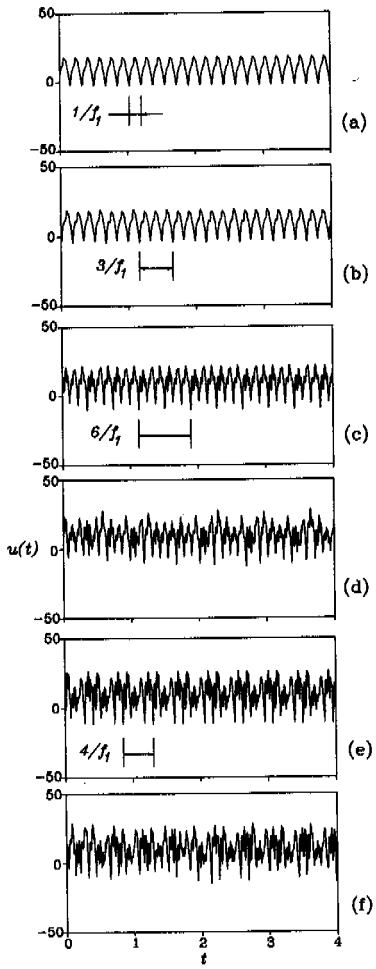

Fig. 3 Time evolution of $u(t)$ for several Rayleigh numbers: (a) $Ra=3\times10^4$; (b) $Ra=3.4\times10^4$; (c) $Ra=5.8\times10^4$; (d) $Ra=7\times10^4$; (e) $Ra=7.6\times10^4$; (f) $Ra=8\times10^4$

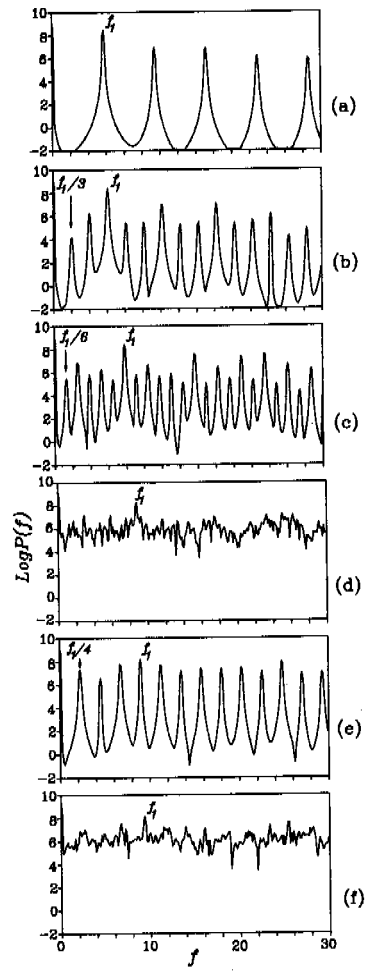

Fig. 4 Power spectra of $u(t)$ in Fig.3: (a) $Ra=3\times10^4$ (P1) ; (b) $Ra=3.4\times10^4$ (P3) ; (c) $Ra=5.8\times10^4$ (P6) ; (d) $Ra=7\times10^4$ (C) ; (e) $Ra=7.6\times10^4$ (P4) ; (f) $Ra=8\times10^4$ (C)

그리고 $u(t)$의 Power spectrum을 분석하여 대류의 시간적인 거동 특성과 분기 현상(bifurcation phenomena)을 조사한다. Powpectrum은 다음과 같이 정의된다.[9]

$$x(f)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T \exp(i2\pi ft)x(t)dt \tag{10}$$

$$P(f)=|x(f)|^2 \tag{11}$$

Power spectrum 을 구하는데 있어서는 Cooly-Tukey의 FFT algorithm[17]을 이용하며, 데이터의 유한한 시간 간격 $T=$ (Number of data) $\times\Delta t_S$에서 일어나는 side lobe를 제거하기 위해 Hanning window를 씌운다. 이때의 주파수 해상도(frequency resolution)는 $1/T$이 되는데 aliasing error를 없애기 위해 FFT를 하기 전에 저주파 대역 필터(low pass filter)를 거침으로써 주파수(frequency)의 범위를 제한한다. anti-aliasing filter cut off frequency는 Nyquist frequency $f_N=1/2\Delta t_S$의 70%로 택하였다. 하나의 Rayleigh 수에 대해 8×10^4 time step을 계산하였다. 데이터의 sampling time step을 $\Delta t_S=10^{-3}$으로 하여 데이터를 축적한 다음 축적된 데이터의 후반부에 있는 2^{13} 개 혹은 2^{12} 개의 연속된 데이터로써 Power spectrum을 구하였다.

그리고 다음과 같은 Autocorrelation function $C(\tau)$를 조사하기도 한다.[9]

$$C(\tau)=\frac{1}{(T_2-T_1)}\int_{T_1}^{T_2}x(t)x(t+\tau)dt \tag{12}$$

$C(\tau)$는 비정상 상태의 유체 유동을 조사하는 하나의 유용한 측도로써 이용된다.[18] 주기적인 신호에 대해서는, $C(\tau)$는 주기 함수가 되고, 그에 반해 chaotic 신호에 대해서는 $C(\tau)$가 zero로 접근해 간다.

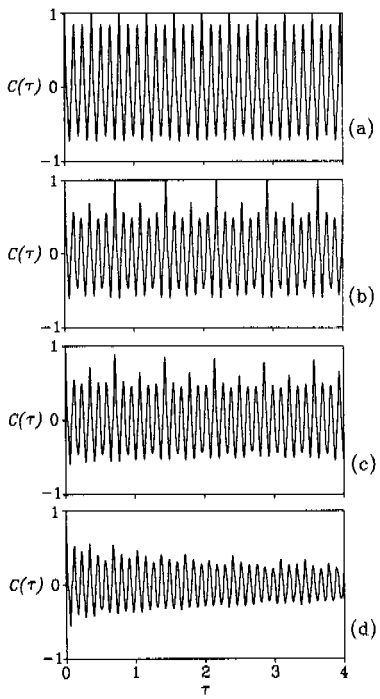

Fig. 5 Correlation function of $u(t)$ in the period-3, period-6, and chaotic regime: (a) $Ra=5.4\times10^4$ (P3); (b) $Ra=6.2\times10^4$ (P6) ; (c) $Ra=6.4\times10^4$ (C) ; (d) $Ra=7\times10^4$ (C)

3. 결과 및 논의

작은 Rayleigh 수인 $Ra\leq1500$에서는 하나의 셀(cell)을 갖는 정상 상태의 대류가 유지된다 (Fig. 1). 그러나 $Ra\geq2000$에서는 진동하는 대류가 일어난다. 진동 대류의 초기인 $2000\leq Ra\leq3\times10^4$ 에서는 주기적인 운동을 보이는데 Fig.2에 $Ra=3\times10^4$에서의 한 주기 동안의 진동하는 대류의 유동장을 도시하였다. 진동하는 기간동안에 환형의 수직 부분에 하나의 큰 셀이 형성되며, 환형의 윗 부분에는 이와 반대 방향으로 회전하는 하나의 작은 셀이 형성된다. Fig. 2에서 주목할 것은 환형의 윗 부분에 형성되는 셀이 진동하는 기간동안 내내 사라지지 않고 계속 존재한다는 것이다. 그리고 진동하는 대류는 두 셀의 경계면에서 일어나는 새로운 소용돌이(eddy)의 주기적인 생성과 소멸을 보여주고 있다. 이와 같은 두 셀 간의 강한 상호 작용으로 인하여 환형의 윗 부분은 아래 부분에 비해 더 복잡한 거동을 보여준다. Rayleigh 수가 증가할수록 셀 간의 상호 작용은 더욱 더 강해지며 결국에는 비주기적인 혼돈 대류(chaotic convection)가 일어난다. $Pr=0.3$인 경우[14]에는 정상 상태의 이중해가 발견되었지만 $Pr=0.1$인 경우에는 비정상 상태의 진동하는 대류가 일어나며 이력(hysteresis) 현상은 일어나지 않았다.

Fig. 3과 Fig. 4에 혼돈 대류로의 천이 경로를 보여주는 $u(t)$의 시간 기록과 Power spectrum을 도시하였다. 관측된 현상은 다음과 같다.

(1) $2000 \leq Ra \leq 3\times10^4$: 하나의 기본 주파수 (fundamental frequency) f_1을 갖는 단순 주기적인 운동이다. Power spectrum (Fig. 4(a)) 에서 가장 큰 peak는 f_1에 있으며 다른 주파수들은 모두 f_1의 정수배 ($f = mf_1$) 로 표시된다.

(2) $3.2\times10^4 \leq Ra \leq 5.4\times10^4$: 주기 3배 분기 현상(period-tripling bifurcation)이 $Ra \approx 3.1\times10^4$ 부근에서 일어나며 이 영역에서는 $3/f_1$의 주기를 갖는 주기 3의 진동 대류가 일어난다. Power spectrum에서 나타나는 peak들의 주파수는 모두 $f_1/3$의 super harmonics에 있다(Fig. 4(b)). Fig. 5에는 몇 가지의 Rayleigh 수에 대한 correlation function을 도시하였는데 이 영역 내의 $Ra=5.4\times10^4$에 대한 Fig. 5(a)는 주기 3의 해를 잘 보여주고 있다.

(3) $5.6\times10^4 \leq Ra \leq 6.2\times10^4$: 주기 배가 분기 현상(period-doubling bifurcation)이 $Ra \approx 5.5\times10^4$ 부근에서 일어남으로 인해 이 영역에서는 $6/f_1$의 주기를 갖는 주기 6의 진동 대류가 일어난다. Power spectrum에서 나타나는 peak들의 주파수는 모두 $f_1/6$의 super harmonics에 있다.(Fig. 4(c)) 그리고 $Ra=6.2\times10^4$에 대한 Fig. 5(b)의 correlation function은 peak들이 6 번마다 똑같이 반복됨을 보여주고 있다.

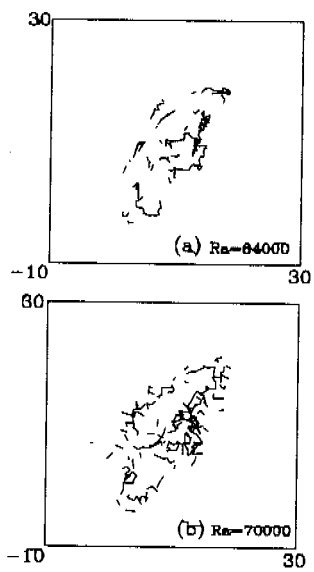

Fig. 6 Poincare section of $u(t)$ in the chaotic regime with a delay time of τ_d=0.01: (a) $Ra=6.4\times10^4$; (b) $Ra=7\times10^4$

(4) $6.4\times10^4 \leq Ra \leq 7.2\times10^4$: $u(t)$의 요동은 매우 복잡하며(Fig. 3(d)) Power spectrum이 광대역 잡음(broadband noise)을 보이는(Fig. 4(d)) 비주기적인 chaotic convection이 일어난다. chaotic convection의 초기 단계인 $Ra=6.4\times10^4$에 대한 Fig. 5(c)의 correlation function은 불규칙적인 모양을 명확하게 보여주고 있지는 않다. 그러나 Fig. 6(a) 의 Poincare map은 여러 개의 점들이 흩어져서 나타남으로 인해 비록 약하긴 하지만 chaotic 상태를 보여주고 있다. 그리고 더 큰 Rayleigh 수인 $Ra=7\times10^4$에 대한 Fig. 6(b)의 Poincare map은 충분히 발달된 chaotic 상태를 잘 보여주고 있다.

(5) $7.4\times10^4 \leq Ra \leq 7.8\times10^4$: $4/f_1$의 주기를 갖는 주기 4의 주기적인 운동이 다시 일어난다. 이 영역 내에 있는 $Ra=7.6\times10^4$에 대한 $u(t)$를 Fig. 3(e)에 도시하였다. 불규칙적인 chaotic convection이 일어난 후에 나타나는 Fig. 3(e)의 $u(t)$의 요동(fluctuation)은 매우 복잡하다. 그러나 Fig. 4(e)의 Power spectrum은 주기 4의 주기적인 운동을 분명하게 보여주고 있다. Fig.4(e)에서 가장 큰 피크의 주파수는 f_1이고 모든 피크들은 $f_1/4$와 그의 harmonic으로 구성된다.

(6) $Ra=8\times10^4$에서는 비주기적인 chotic convection이 다시 일어난다. $u(t)$의 요동은 매우 복잡하며(Fig. 3(f)) Power spectrum은 broad하다 (Fig. 4(f)).

(7) 더 큰 Rayleigh 수인 $Ra=9\times10^4$, 10^5, 2×10^5, 3×10^5 에서의 운동도 역시 비주기적이며 Power spectrum 은 광대역 잡음을 보인다.

이상에서 관찰한 분기현상 (bifurcation phenomena)을 요약하면 다음과 같다: steady → period one ($1/f_1$) → period 3 ($3/f_1$) → period 6 ($6/f_1$) → chaos → period 4 ($4/f_1$) → chaos.

본 연구에서 주목할 것은 정상 상태에서 단순

주기적인 운동으로의 첫 번째 Hopf bifurcation이 일어난 후 주기 3배의 분기 현상이 가장 먼저 일어난다는 것이다. 단순 주기적인 운동 후에 일반적으로 많이 발견되어 온 것은 주기 배가(period-doubling) 분기 현상이나 준주기적인 (quasi-periodic) 운동으로의 분기이다. 지금까지 실험이나 이론적인 계산을 통하여 많은 분기 현상이 발견되었지만 공간과 시간을 통하여 모두 연속적인 편미분 방정식계의 다른 시스템에서는 주기 3배 분기 현상이 발표되지 않았다. 한편 유한한 자유도를 가지고 있는 상미분 방정식계에서는 주기 3배 분기 현상이 발견되기도 하였다. 예를 들어 Goswami[19]는 주기적으로 힘을 받는 Toda oscillator에서 주기 3배 분기 현상을 관찰하였다. 주기 3배 분기 현상은 수력학적 불안정과 열불안정이 동시에 존재하는 환형 공간에서 일어나는 독특한 현상이다.

본 연구에는 국부적인 속도인 $u(t)$로써 비정상 상태의 해의 특성을 규명하였다. 한편 Kimura 등[20]과 Yoo and Kim[12]은 시스템의 하나의 총체적인 양인 평균 Nusselt 수, $\overline{Nu}(t)$, 를 측정하여 분기 현상을 조사하였다. 본 연구에서도 $\overline{Nu}(t)$의 특성을 조사하였는데 모두 $u(t)$와 동일한 진동 대류의 특성을 보여주었다. Fig. 7에는 주기 6과 주기 4의 영역에 있는 $\overline{Nu}(t)$의 phase space를 도시하였다. Fig. 7(a)와 Fig. 7(b)는 각각 6개와 4개의 닫힌 궤도(closed orbit)를 보여 줌으로써 주기 6과 주기 4의 해를 분명하게 보여주고 있다.

본 연구에서 나타나는 또 하나의 흥미 있는 현상은, Rayleigh 수가 증가함에 따라 진동하는 대류의 복잡성이 점차적으로 계속하여 증대되지 않고 복잡한 비주기적인 운동 후에 주기적인 운동이 다시 나타난다는 것이다. 여기에서 관찰한 혼돈 대류 사이에 존재하는 주기 4의 창 (period-4 window)은 Mukutmoni and Yang[21]이 직육면체 공간 내의 Rayleigh Benard 대류에서 발견한 것과 유사하다.

끝으로 Fig. 8에는 혼돈 영역에 있는 $Ra=8\times10^4$에서의 몇몇 순간적인 유동장을 도시하였다. 진동기간 동안 환형의 윗 부분($\phi=0$)에 $\phi=\pi/2$ 형성되는 소용돌이와 환형의 수직 부분()에 형성되는 소용돌이는 그 형상과 크기가 변화하지만 사라지지 않고 계속 존재한다. 그리고 혼돈 영역에서는 특히 이들 두 소용돌이 사이에서 유동장이 시간에 따라 매우 복잡하게 변화하고 있음을 보여준다.

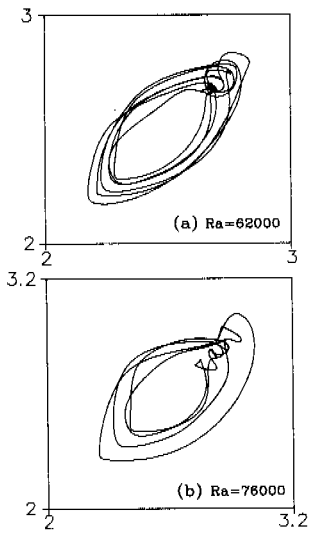

Fig. 7 Phase-space trajectories of $Nu(t)$ versus $Nu(t+\tau_d)$ with τ_d=0.01 showing the period-6 and period-4 solutions: (a) $Ra=6.2\times10^4$ (b) $Ra=7.6\times10^4$

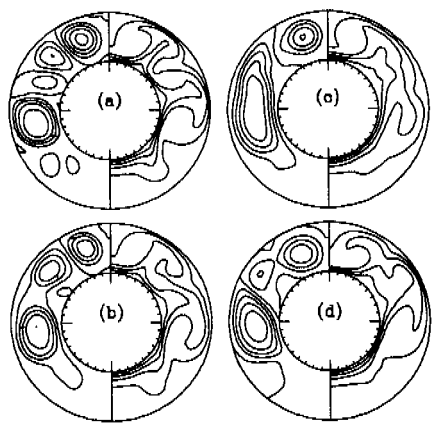

Fig. 8 Instantaneous streamlines and isotherms of $Ra=8\times10^4$ in the chaotic regime: (a) at a arbitrary time of $t=t_1$; (b) at $t=t_1+0.02$; (c) $t=t_1+0.04$; (d) at $t=t_1+0.06$

4. 결 론

일정 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 사이의 환형($D_i/L=2$)에서 일어나는 $Pr=0.1$인 유체의 진동하는 자연 대류 현상을 수치적으로 조사하였다. 유한 차분법을 이용하여 비정상 유선함수-와도 방정식을 풀었다. Rayleigh 수가 증가함에 따라 전도가 지배적인 정상상태의 대류로부터 주기적으로 진동하는 대류로의 Hopf bifurcation이 일어난다. 진동하는 대류의 초기에는 하나의 기본 주파수를 갖는 단순 주기적인 운동이 일어나는데 Rayleigh 수가 더욱 더 증대되면 가장 먼저 주기 3배 분기 (period-tripling bifurcation) 현상이 일어난다. 그리고 다음에는 주기 배가 분기 (period-doubling bifurcation) 현상이 일어나며 결국에는 비주기적인 혼돈 대류 (chaotic convection)에 도달한다. 첫 번째 혼돈 대류 후에는 주기 4의 주기적인 운동이 다시 일어난다. 그러나 그 이후의 더 큰 Rayleigh 수에서는 불규칙적인 혼돈 대류가 다시 확립된다.

참고문헌

(1) Powe, R.E., Carley, C.T. and Bishop, E.H., 1969, "Free Convective Flow Patterns in Cylindrical Annuli," *J. Heat Transfer*, Vol. 91, pp. 310~314.

(2) Rao, Y.F., Miki, Y., Fukuda, K., Takata, Y. and Hasegawa, S., 1985, "Flow Patterns of Natural Convection in Horizontal Cylindrical Annuli," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 705~714.

(3) Mack, L.R. and Bishop, E.H., 1968, "Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders for Low Rayleigh Numbers," *Quarterly J. Mech. and Appl. Math.*, Vol. 21, pp. 223~241.

(4) Custer, J.R. and Shaughnessy, E.J., 1977, "Thermoconvective Motion of Low Prandtl Number Fluids Within a Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 99, pp. 596~602.

(5) Fant, D.B., Prusa, J. and Rothmayer, A.P., 1990, "Unsteady Multicellular Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 379~387.

(6) Yoo, J.-S., Choi, J.Y. and Kim, M.-U., 1994, "Multicellular Natural Convection of a Low Prandtl Number Fluid Between Horizontal Concentric Cylinders," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 25, pp. 103~115.

(7) Yoo, J.-S., 1998, "Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 3055~3073.

(8) Yoo, J.-S.,1999, "Transition and Multiplicity of Flows in Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus : $Pr=0.4$," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 709~722.

(9) Schuster, H.G., 1984, "Deterministic Chaos," Physik-Verlag, pp. 1~136.

(10) Gollub, J.P., Benson, S.V., 1980. "Many Routes to Turbulent Convection," *J. Fluid Mech.* Vol. 100, pp. 449~470.

(11) McLaughlin, J.B., Orszag, S.A., 1982, "Transition from Periodic to Chaotic Thermal Convection," *J. Fluid Mech.* Vol. 122, pp. 123~142.

(12) Yoo, J.-S., Kim, M.-U., 1991. "Two-Dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," *Fluid Dynamics Research*, Vol. 7, pp. 181~200.

(13) Guzmán, A.M., Amon, C.H., 1994, "Transition to Chaos in Converging -Diverging Channel Flows: Ruelle -Takens -Newhouse Scenario," *Phys. Fluids A*, Vol. 6, pp. 1994~2002.

(14) Yoo, J.-S., 1999, "Prandtl Number Effect on Bifurcation and Dual Solutions in Natural Convection in a Horizontal Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3275~3286.

(15) Roache, P.J., 1972, "Computational Fluid Dynamics", Hermosa, pp. 53~64.

(16) Buzbee, B.L., Golub, G.H. and Nielson, C.W., 1970, "On Direct Methods for Solving Poisson's Equations," *SIAM J. Numerical Analysis*, Vol. 7, pp. 627~656.

(17) Bendat, J.S. and Piersol, A.G., 1986,

"Random data : Analysis and Measurement Procedures," John Wiley and Sons, New York, pp. 325~424.

(18) Guzmán, A.M., Amon, C.H., 1996, "Dynamical Flow Characterization of Transitional and Chaotic Regimes in Converging-Diverging Channels," *J. Fluid Mech.* Vol. 321, pp. 25~57.

(19) Goswami, B., 1997, "The Role of Period Tripling in the Development of a Self Similar Bifurcation Structure," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Vol. 7, pp. 2691~2706.

(20) Kimura, K., Schubert, G., Straus, J.M., 1986, "Route to Chaos in Porous-Medium Thermal Convection," *J. Fluid Mech.* Vol. 166, pp. 305~324.

(21) Mukutmoni, D. and Yang, K.T., 1993, "Rayleigh-Benard Convection in a Small Aspect Ratio Enclosure: Part II- Bifurcation to Chaos," *J. Heat Transfer*, Vol. 115, pp. 367~376.