

비압축성 Navier-Stokes 방정식에 대한 Krylov 부공간법의 적용

맹주성* · 최일곤** · 임연우***
(1999년 8월 18일 접수)

Application of the Krylov Subspace Method to the Incompressible Navier-Stokes Equations

Joo-Sung Maeng, IL-Kon Choi and Youn-Woo Lim

Key Words: Krylov Subspace(Krylov 부공간), Driven-Cavity(끌림 공동), Preconditioner(예조건자), SIMPLE, Convergence Acceleration(수렴 가속)

Abstract

The preconditioned Krylov subspace methods were applied to the incompressible Navier-Stokes equations for convergence acceleration. Three of the Krylov subspace methods combined with the five of the preconditioners were tested to solve the lid-driven cavity flow problem. The MILU preconditioned CG method showed very fast and stable convergency. The combination of GMRES/MILU-CG solver for momentum and pressure correction equations was found less dependency on the number of the grid points among them. A guide line for stopping inner iterations for each equation is offered.

기호설명

A : 계수 행렬
 b : 원천항
 D : 행렬의 대각 성분
 I : 단위 행렬
 K^k : Krylov 부공간
 L : 하삼각 행렬
 M : 예조건화 행렬
 p : 압력
 R : 잔차
 U : 상삼각 행렬
 u, v : 속도 성분

Γ : 확산 계수
 α : MILU 변수
 ϕ : 종속 변수
 x : 대류 도식 변수
 ω : 이완 변수

BiCG : Bi-Conjugate Gradient Method
 CGSTAB : Bi-Conjugate Gradient Stabilized
 CG : Conjugate Gradient Method
 CGS : Conjugate Gradient Squared Method
 CUI : Cubic Upwind Interpolation
 GMRES : Generalized Minimal Residual
 GMRESR : GMRES Revised
 IC : Incomplete Choleski Factorization
 ILU : Incomplete Lower Upper Factorization
 MILU : Modified Incomplete Lower Upper Factorization

* 회원, 한양대학교 기계공학부
 E-mail : jsmaeng@email.hanyang.ac.kr
 TEL : (02)2290-0439 FAX : (02)2281-8201

** 회원, 한양대학교 대학원 기계공학과

*** 한양대학교 대학원 기계공학과

- RILU : Row Scaling ILU
 SIP : Stone's Strongly Implicit Procedure
 SOR : Successive Over-Relaxation
 SSOR : Symmetric Successive Over-Relaxation

1. 서 론

CFD 분야에서 연산 시간 감소를 위한 수렴가속 방법 중 관심을 끌고있는 2가지 주요 방법은 다중 격자법^(1~3)과 Krylov 부공간법^(4~13)이다.

다중 격자법은 각기 다른 격자 밀도를 가진 일련의 계층 격자를 사용하여 모든 주파수의 오차 성분을 효과적으로 제거하므로 정보 전파를 가속시켜주는 방법이다. 이 방법은 격자 수에 독립적인 최적 수렴율(optimal convergence)을 얻을 수 있기 때문에 여러 수렴 가속 방법 중 가장 탁월한 성능을 보여주고 있다. 그러나 복잡한 계산 영역이나 비정렬 해법의 경우는 다중 격자 수준을 나타내기 위한 새로운 자료 구조가 필요하기 때문에 기존 코드를 완전히 재작성하거나 대폭적으로 재구성해야 하는 등 구현하기가 어렵다. 또한 다중 격자법을 효과적으로 구현하기 위해서는 적절한 완화법, 연장 및 제한 보간 연산자도 선정해야 하는 불편한 점이 있다.

수렴 가속에 대한 또 다른 대안 중 하나는 Krylov 부공간법으로 변위 공간(shifted space)위에서 반복법을 통하여 근사해를 구하는 방법이다. 종래의 점 및 선 완화법에 기반을 둔 반복법은 신뢰할 수 있고 구현하기 쉽다는 장점을 가지고 있지만 상대적으로 장시간의 연산 시간이 요구되며 특히 격자수가 커질수록 급격한 반복수 증가로 인해 이런 문제가 더욱 심각해진다. 따라서 연구자들은 해를 가속시키기 위해 보다 효과적인 반복해법인 Krylov 부공간법에 관심을 기울이게 되었으며 그 결과 CG,⁽⁴⁾ CGS,⁽⁵⁾ BiCG,⁽⁶⁾ BiCGSTAB⁽⁷⁾ 그리고 GMRES⁽⁸⁾같은 다양한 Krylov 부공간법을 고안하였다. 또한 이 방법은 격자의 형태에 관계없이 구현할 수 있기 때문에 수렴 가속효과가 다중 격자법에는 미치지 못할지라도 응용 측면에서는 더욱 바람직한 방법일 수 있다. 특히, 이 방법에 적절한 예조건자를 적용한다면 그 효과를 더욱 증가시킬 수 있다. 예를 들어

$A\phi = b$ 인 행렬 역변환(matrix inversion)문제에서 계수 행렬 A 가 희소 행렬(sparse matrix)이고 대칭이며 양의 정부호(symmetric positive definite)인 행렬일 때, 그 수렴특성은 A 의 고유값 분포에 따라 결정되는데 이 고유값들이 1에 가깝게 밀집될수록 수렴성이 좋아지기 때문에 예조건자인 행렬 M 의 역을 양변에 곱함으로써 더욱 밀집된 고유값 분포를 갖도록 하는 것이다.

비압축성 유동을 계산하는데 있어서 가장 널리 사용되어온 방법은 분리형(segregated) 알고리즘인 SIMPLE법⁽¹⁴⁾이다. 이 방법은 또 다른 수송 방정식을 쉽게 포함시킬 수 있는 순차적 기법의 장점을 가진 반면 변수간 연립이 약하기 때문에 레이놀즈 수 증가나 격자의 질에 따라 수렴이 크게 늦어지는 등 몇 가지 약점을 가지고 있다. 특히 압력 수정 방정식은 강한 타원형이기 때문에 운동량방정식이나 다른 스칼라 수송 방정식에 비하여 엄청나게 많은 반복계산을 필요로 하며 연산 시간의 대부분을 이 압력 수정 방정식의 풀이에 소비하게 되어 수렴 가속화가 절실히 필요하다.

유동 해석에 대한 Krylov 부공간법 적용 결과 중 비압축성 유동에 관한 연구들을 살펴보면 다음과 같다. Lin과 Chen⁽⁹⁾은 상판 끌림 공동(lid-driven cavity) 문제에 다항식 예조건자를 적용한 GMRES법을 사용하여 운동량에 대해서는 1~2번 그리고 압력 수정 방정식에 대해서는 3~6번의 내부 반복으로 수렴해를 얻을 수 있었다. Sheen과 Wu⁽¹⁰⁾는 ADI 예조건자를 적용한 CG법을 사용하여 공동 문제에 적용한 압력 수정 방정식의 초기 수렴 동향에 대하여 알아보았다. Kim과 Ro⁽¹¹⁾는 압력 수정 방정식 해법으로서 수정한 SIP를 예조건자로 사용한 CG법을 개발하였다. Tanyi와 Thatcher⁽¹²⁾는 병렬 연산에서 Gauss-Seidel 예조건자를 적용한 CG법과 GMRES의 수렴성을 비교하였다. 그리고 Vuik⁽¹³⁾은 RILU 예조건자를 사용한 GMRESR에 의한 수렴 가속을 고찰하였으며 Noll과 Wittig⁽¹⁴⁾는 ILU예조건자를 사용한 BiCG법으로 연소기 내 3차원 유동장의 수렴 가속에 대하여 연구하였다. 맹주성⁽¹⁵⁾ 등은 다중격자법의 smoother로 Krylov 부공간법을 사용한 수렴 가속에 대하여 연구하였다.

본 연구에서는 SIMPLE법을 적용한 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 해를 구하는 과정에 Jacobi, SSOR, IC, ILU, 그리고 MILU의 5가지 예 조건자를 Krylov 부공간법 중 CG, CGSTAB 그리고 GMRES에 적용하여 해의 수렴 양상 및 그 가속 성능에 대하여 알아보았다. 특히, 분리형 알고리즘인 SIMPLE법의 특성을 고려하여 초기 단계 수렴 양상뿐만 아니라 그것이 전체 수렴율에 미치는 영향에 대하여 알아보았다.

2. Krylov 부공간법의 적용

2.1 공식화 과정

Cartesian 좌표계에서 수송방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}) + S_\phi \quad (1)$$

여기에서 u, v 는 2차원 좌표 방향에서의 속도 성분, Γ 는 확산 계수 그리고 S_ϕ 는 변수 ϕ 에 대한 원천항이다.

해법으로는 유한 체적법을 사용하였다. 대류항 이산화는 Van Leer의 κ 도식⁽¹⁸⁾ 중 $\kappa=1/3$ 인 CUI를 사용하였는데 1차에 대한 지연수정(deferred correction)을 이용하여 구현하였으며 확산항의 경우 2차 중앙차분법을 사용하였다. Rhie와 Chow⁽¹⁷⁾의 내삽법을 사용한 비엇갈림 격자계를 사용하여 모든 셀 중심에 속도와 압력을 저장하였다. 각 종속변수에 대한 대수 방정식은

$$a_P \phi_P = \sum_{nb \in E, W, N, S} a_{nb} \phi_{nb} + S_U \quad (2)$$

$$a_P = \sum_{nb \in E, W, N, S} a_{nb} - S_P \quad (3)$$

여기에서 $\phi = u, v, p'$ 를 나타내며 S_P 는 원천항 선형화에서 생기는 ϕ_P 의 계수이며 S_P 가 무조건 음이 되도록 선택한다. S_U 는 방정식 (1)에 있는 원래 원천항 이산화에서 생기는 상수 부분과 이웃 격자점(E,W,N,S)에서의 ϕ 값으로 근사할 수

없는 추가적인 항을 더한 것이다. 따라서 모든 격자점에 대하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$B\phi = c \quad (4)$$

여기에서 B 는 ϕ 의 대류 및 확산 수송에 의존하는 모든 공간적 연립을 포함하고 있는 5대각 계수 행렬이며 c 는 B 에서 고려되지 않은 연립과 Dirichlet 경계 조건을 포함하고 있다.

압력장과 속도장은 SIMPLE 알고리즘을 사용하여 연립시켰으며 여기에서 압력 수정 과정이 수행된다. 먼저, 주어진 압력 분포 p^* 에 대하여 운동량 방정식을 풀면 u^*, v^* 를 얻는다. u^*, v^* 는 연속 방정식을 만족시키지 않기 때문에 추정된 압력을 수정하여야 한다. 압력 수정 방정식(p' 방정식)을 푸는 것은 이 과정에 포함된다. 위의 각 단계를 전체적으로 한번 실행함으로써 비선형 외부 반복을 수행하게 되는 것이다.

지배방정식의 비선형성과 연립 때문에 하향 이완이 필요하게 되는데 다음과 같은 방법으로 도입하였다.

$$\frac{a_P}{\omega} \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + S_U + \frac{1-\omega}{\omega} a_P \phi_P^{old} \quad (5)$$

여기서 $0 < \omega < 1$ 은 하향 이완계수를 나타낸다. $(n+1)$ 번째 반복에서의 최종적인 식은 다음과 같다.

$$\left(B + \frac{1-\omega}{\omega} D \right) \phi^{n+1} = c + \frac{1-\omega}{\omega} D \phi^n \quad (6)$$

여기에서 D 는 식 (4)에서의 행렬 B 의 주대각 성분을 가지는 대각 행렬이다. 식 (6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A\phi = b \quad (7)$$

$0 < \omega < 1$ 이기 때문에 하향 이완을 시키면 행렬 A 의 대각 지배성이 향상된다. 이 계수 행렬 A 는

식 (4)와 마찬가지로 다음과 같은 5개의 0이 아닌 대각 요소를 가진다. 즉,

$$\text{entry}(A) = (A^S, A^W, A^P, A^E, A^N) \quad (8)$$

비선형 외부 반복 중에 각 유동 변수에 대하여 위의 방정식을 풀게 되는데 최종적으로 다음과 같은 행렬 방정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$A_P \phi_P + \sum_{nb} A^{nb} \phi_{nb} = b_P \quad (9)$$

반복 계산 후 해 벡터 ϕ 의 중간값을 가지고 전영역에 대한 잔차의 합과 압력 수정 방정식의 질량 원천항의 합을 계산한다.

$$R_\phi = \sum_{i,j} b_P - (A^P \phi_P + \sum_{nb} A^{nb} \phi_{nb}) \quad (10)$$

$$R_m = (\sum (\rho u)_e - (\rho u)_w + (\rho v)_n - (\rho v)_s) \quad (11)$$

수렴판정은 각 변수에 대한 잔차 R_ϕ 와 압력 수정 방정식의 질량 원천항 R_m 의 절대값의 합이 식 (12)와 같이 사전에 정한 어떤 값보다 작으면 수렴한 것으로 한다.

$$\max(R_u, R_v, R_m) < tol \quad (12)$$

내부 반복에서는 다음과 같이 잔차 감소율이 사전에 정한 값 이하로 감소하면 반복을 중지한다.

$$\lambda = \frac{R}{R_0} \quad (13)$$

여기에서 R_0 는 첫 번째 반복 후의 잔차를 나타낸다.

2.2 Krylov 부공간법

Krylov 부공간법은 변위 공간에서 근사해를 구하는 방법이다. 수식 (7)에 다음과 같이 Richardson 반복법을 적용시키면

$$\phi_k = (I - A)\phi_{k-1} + b \quad (14)$$

$$\phi_0 + K^k(A; r_0) = \phi_0 + \{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\} \quad (15)$$

이 되어 변위 공간에서 근사해를 구성하게 되는데 여기에서 K^k 를 Krylov 부공간이라 부른다. 잔차 r_0 는 다음과 같다.

$$r_0 = b - A\phi_0 \quad (16)$$

모든 Krylov 부공간법은 다음과 같은 3가지의 종류로 분류할 수 있다.

첫째, Ritz-Galerkin법으로 잔차가 현재의 부공간에 직교하는 ϕ_k 를 구성한다.

$$b - A\phi_k \perp K^k(A; r_0) \quad (17)$$

둘째, Minimal Residual 법으로 $K^k(A; r_0)$ 에서 Euclid 정칙(norm) $\|b - A\phi_k\|_2$ 이 최소가 되는 ϕ_k 를 정한다.

셋째, Petrov-Galerkin법으로 잔차 $b - A\phi_k$ 가 다른 어떤 적당한 k -차원의 부공간에 직교하는 ϕ_k 를 찾는다.

본 연구에서 고려한 3가지 Krylov 부공간법 중 CG법은 Ritz-Galerkin법에, GMRES는 Minimal Residual법에 해당되며 CGSTAB은 3가지 방법을 혼합한 것이다. 각 방법에 대한 구체적인 사항은 참고문헌 (4~8)에 자세히 설명되어있으므로 여기에서는 생략한다.

2.3 예조건자

일반적으로 대칭 및 비대칭을 막론하고 계수 행렬이 밀집된 고유값 분포를 가지면 수렴이 빨라지게 된다. 따라서 고유값 분포를 바꾸어 계수 행렬의 스펙트럼 특성을 개선하고자 하는 것을 예조건화라고 하며 예조건자란 바로 그러한 효과를 주는 행렬을 뜻한다. M 이 A 를 근사하는(어떤 의미에서) 비특이 행렬이라고 하면 새로운 선형 계

$$M^{-1}A\phi = M^{-1}b \quad (18)$$

는 식 (7)과 동일한 해를 가지며 풀기가 더욱 쉬워질 수 있다. 여기에서 M 을 예조건자라고 한다. 좋은 예조건자란 다음과 같은 조건을 갖추어야 한다. 하나는 A 를 잘 근사할 수 있어야 한다. 즉, $M^{-1}A \approx I$ 인 것이다. 또 하나는 그를 구성하고 적용하는데 드는 비용이 싸야 한다는 것이다. 이 두 가지 조건은 서로 상충하는 것이기 때문에 양자 사이에서 타협점을 찾아 균형을 갖추도록 해야 한다.

본 연구에 적용한 예조건자는 다음과 같은 Jacobi, SSOR, IC, ILU, 그리고 MILU의 5가지이다.

가장 간단한 Jacobi 예조건자는 계수 행렬 A 의 주대각 성분을 이용하여 만들어지며 식 (19)와 같다.

$$M = D \quad (19)$$

단, 여기서 D 는 행렬 A 의 주대각 성분을 가리킨다.

SSOR은 SOR의 sweep 방향을 바꿈으로써 얻을 수 있는 예조건자로 행렬 A 는 대각 성분 D 와 하삼각행렬 L , 상삼각행렬 U 로 분해된다.

$$A = D + L + U \quad (20)$$

$$M = \left(\frac{1}{2-\omega} \right) \left(\frac{D}{\omega} + L \right) \left(\frac{D}{\omega} \right)^{-1} \left(\frac{D}{\omega} + L \right)^T \quad (21)$$

여기에서 이완 인자 ω 는 참고문헌 (10)에서와 같은 1.4를 사용하였다.

ILU와 MILU 예조건자의 경우는 LDU 로 정의되는 예조건자 M 으로 계수행렬 A 를 근사한다. L, D, U 의 행렬 entry는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{entry}(L) = \left(A^S, A^W, \frac{1}{D^P}, 0, 0 \right) \quad (22)$$

$$\text{entry}(D) = (0, 0, D^P, 0, 0) \quad (23)$$

$$\text{entry}(U) = \left(0, 0, \frac{1}{D^P}, A^E, A^N \right) \quad (24)$$

ILU에서 MILU로 바뀌는 전이를 제어하는 변수 α 를 도입하면 동일한 식으로 두 예조건자를 나타낼 수 있다. 행렬 D 에서의 대각 성분은 다음과 같이 계산한다.

$$D_{i,j}^P = 1 / (A_{i,j}^P - D_{i-1,i}^P A_{i,j}^W (A_{i-1,j}^E + \alpha A_{i-1,i}^N) - D_{i,j-1}^P A_{i,j}^S (A_{i,j-1}^N + \alpha A_{i,j-1}^E)) \quad (25)$$

이때 α 가 0이면 ILU 예조건자가 되고 α 가 1이면 MILU 예조건자가 된다. 본 연구에서는 MILU의 경우에 $\alpha=0.99$ 를 사용하였다.

IC 예조건자는 ILU에서 두 삼각행렬의 주대각 성분이 같다는 조건을 갖고 분해를 한 경우이다. 여기에서는 행렬 A 의 $a_{ij}=0$ 인 성분과 대응하는 행렬 L 의 성분 $l_{ij}=0$ 으로 한 뒤 분해된 행렬 L 의 성분을 계산한다. $a_{ij} \neq 0$ 이며 l_{ij} 는 다음과 같다.

$$l_{ij} = \frac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right)}{l_{jj}} \quad i \neq j \quad (26)$$

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2} \quad i = j \quad (27)$$

$$D_{i,j}^P = \frac{1}{A_{i,j}^P - D_{i-1,i}^P [A_{i,j}^W]^2 - D_{i,j-1}^P [A_{i,j}^S]^2} \quad (28)$$

3. 결과 및 고찰

위에서 상술한 각종 예조건자를 적용한 Krylov 부공간법의 수렴 동향을 알아보기 위하여 본 연구에서 선택한 유동 해석 대상은 레이놀즈 수 1,000과 5,000에서의 상판 끌림 공동유동이다.

먼저, 각 예조건자 효과에 따른 압력 수정방정식의 초기 단계 수렴 동향을 알아보기 위하여 레이놀즈 수 1,000에 대하여 계산하였다. 사용한 격자의 수는 64×64 이다. 운동량 방정식에는 모든 경우 공히 GMRES(3)을 사용하였으며 압력 수정방정식에는 종래의 ADI와 Jacobi, SSOR, ILU, MILU 예조건자를 적용한 CG법을 사용하였다. Fig. 1, 2, 3은 30, 250 그리고 500회 반복 후 압

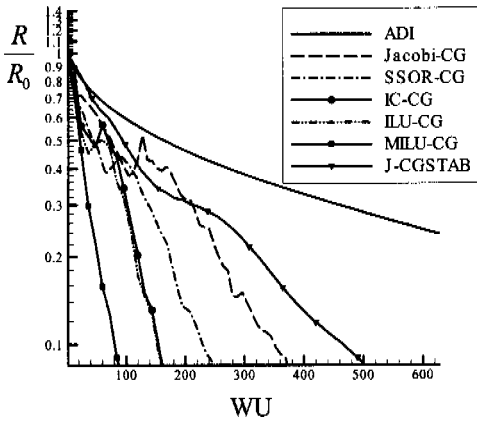


Fig. 1 Residual vs. work units, iteration number=30

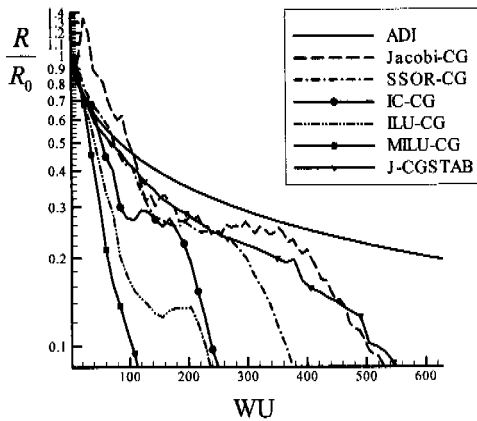


Fig. 2 Residual vs. work units, iteration number=250

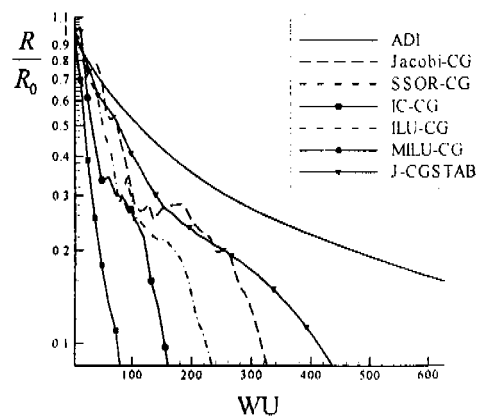


Fig. 3 Residual vs. work units, iteration number=500

Table 1 Work unit of the linear solvers in 2D

Linear Solvers	WORK UNIT
ADI, CG	7
Jacobi-CG	8
IC, ILU, MILU CG	12
SSOR CG	13
Jacobi-CGSTAB	14

력수정 방정식의 잔차 변화를 나타낸 것이다.

각 방법들은 계산량이 다르기 때문에 공정한 평가를 위하여 작업단위(work unit, WU)에 대한 상대 잔차 R_m/R_0 변화에 따라 그 효과를 평가하였다. 여기서 1 WU는 각 격자점에서 곱셈 또는 나눗셈 한번을 의미한다. 작업 시간이 근사적으로 곱셈과 나눗셈에 비례한다는 가정을 하였기 때문에 덧셈과 뺄셈에 대한 연산량은 무시하였다. 2차원 문제에 대하여 각 방법에 대응하는 작업단위를 다음과 같이 Table 1에 나타내었다.

기본적으로 세 경우 모두 어느 정도의 불규칙한 초기 수렴 양상과 점진적 수렴 양상을 가지고 있다. 특히 Jacobi-CG는 모든 경우에서 매우 불규칙한 양상을 나타내어 예조건자로서의 역할을 충분히 하지 못하고 있다는 것을 알 수 있다. SSOR-CG는 Jacobi-CG보다는 안정적이지만 다른 방법에 비하여 상대적으로 수렴이 느다. ILU-CG와 IC-CG는 거의 유사한 수렴 양상을 나타내었으며 특히 MILU-CG는 가장 빠른 초기 단계 수렴율을 보여주었다. Jacobi-CGSTAB법은 ADI보다는 빠른 수렴율을 보이지만 상대적으로 느린 수렴율을 보여주고 있다.

분리형 알고리즘인 SIMPLE법에서는 순차적 해법의 특성상 내부 반복 중에 통상 한 크기 차수 정도의 잔차 감소가 요구되는데 그림에서 보듯이 예조건화 CG법에서는 $R/R_0=0.2$ 근방에서 대부분 안정적 수렴 양상을 가지게 되므로 이 근방에 도달할 때까지 내부 반복을 하는 것이 적절할 것으로 생각된다. 그러나 ADI법은 급격한 반복수 증가를 가져오게 되므로 최대 내부 반복수를 고정시키거나 R/R_0 를 높여야할 것으로 생각된다.

Table 2는 $R/R_0=0.2$ 를 만족시킬 때까지의 운동량 및 압력 수정 방정식에 대한 각각의 평균 내

Table 2 Performance of the linear solvers

	U,V sweep	P sweep	Total CPU time(s)
ADI	3	130	420
Jacobi-CG	3	41	267
SSOR-CG	3	15	259
IC-CG	3	14	212
ILU-CG	3	12	220
MILU-CG	3	6	187
J-CGSTAB	3	25	268

Table 3 Performance of ADI/ADI

Grid Size	Iterations	CPU Time(s)
32 × 32	1563	108
64 × 64	3872	1134
128 × 128	4632	11846

Table 4 Performance of ADI/MILU-CG

Grid Size	Iterations	CPU Time(s)
32 × 32	1114	54
64 × 64	2041	478
128 × 128	3275	4095

Table 5 Performance of GMRES(3)/MILU-CG

Grid Size	Iterations	CPU Time(s)
32 × 32	1089	91
64 × 64	1938	763
128 × 128	2178	4702

부 반복수와 전체 유동장이 수렴할 때까지의 총 연산 시간을 나타낸 것이다. 본 연구에서의 모든 계산은 Intel 사의 Pentium II 300 Mhz CPU를 사용한 개인용 컴퓨터에서 수행하였으며 수렴 판정은 식 (12)와 같이 각 방정식에 대한 잔차 합 중 가장 작은 것이 10^{-5} 보다 작아지면 수렴한 것으로 하였다. 여기에서 보면 내부 반복수가 큰 ADI법은 수렴이 매우 느리기 때문에 작업단위는 작더라도 장시간의 연산 시간이 소요되었으며 초기 수렴률이 매우 좋은 MILU-CG를 적용하였을 경우 압력 수정 방정식을 가장 적게 풀게되어 전체 연산 시간도 가장 짧은 것을 알 수 있었다. 좋은 수렴 특성이란 점근적 수렴율을 가지면서 동시에 안정적인 초기 단계 수렴성을 가진다는 것을 말한다. 그러므로 MILU-CG는 전반적으로 이와 같은 수렴 특성을 보임으로써 압력 수정 방정식을 푸는데 가장 적절한 해법이라는 것을 알 수 있다.

다음은 3가지 조합에 대하여 격자수 증가에 따른 수렴 양상을 살펴보았다. 첫번째는 운동량방정식과 압력수정방정식에 대하여 모두 ADI로, 두번째는 각각 ADI와 MILU-CG로 그리고 마지막은 GMRES(3)과 MILU-CG로 계산한 경우이다. $32 \times 32, 64 \times 64, 128 \times 128$ 의 격자계에서 레이놀즈 수 5,000일 때의 결과를 Table 3, 4, 5와 같이 얻었다. Table 3과 4를 비교해보면 압력 수정방정식을 ADI로 풀 경우는 격자수가 커짐에 따라 연산시간이 매우 급격히 증가하였으며 이는 Fig.4에서도 확인할 수 있다. 이와는 상대적으로 MILU-CG를 사용하였을 때에는 연산시간 증가가 완만하였다. Table 4와 5는 운동량방정식을

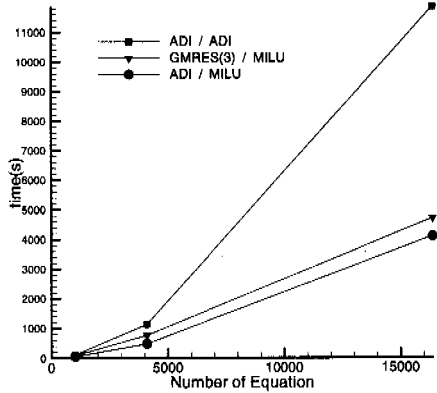


Fig. 4 Computation Time vs. the Number of Equations.

GMRES(3)와 ADI로 그리고 압력 수정 방정식을 MILU-CG로 풀 경우 연산시간과 반복수를 나타내었다.

전반적으로 GMRES(3)/MILU-CG는 ADI/MILU-CG 보다 더 많은 연산 시간을 필요로 하는데 이는 GMRES(3)/MILU-CG의 경우가 자체 연산량이 많기 때문이다. 격자수 $32 \times 32, 64 \times 64$ 인 경우에는 ADI/MILU-CG가 최대 70% 정도 작은 연산 시간을 보이며 격자수가 128×128 인 경우에는 GMRES(3)/MILU-CG가 ADI/MILU-CG방법에

Table 6 Comparison of different combinations of the momentum/pressure correction solvers

Momentum/Pressure Correction	α
ADI/ADI	1.693
ADI/MILU-CG	1.560
GMRES(3)/MILU-CG	

비해 연산시간이 약 15 %정도만 더 소요되어 격자수가 커질수록 이 차이가 줄어들어 가는 것을 알 수 있다. 연산 시간과는 달리 반복수는 GMRES(3)/MILU-CG가 모든 경우에 대하여 ADI/MILU-CG보다 오히려 적다는 것을 알 수 있다. 그 이유는 GMRES는 매번 잔차를 구하지 않고 잔차의 정측(norm)이 충분히 작아진 후에 계산을 반복하기 때문이다. 그리고 두 가지 모두 연산 시간은 거의 같지만 GMRES가 보다 작은 반복수를 가지므로 병렬 계산에서 더욱 효율적일 것으로 생각된다.

연산에 사용된 CPU 시간을 다음과 같은 멱법칙 함수를 통하여 격자 수와의 관계로 나타내면 해석 결과에 대한 격자 의존도를 알아볼 수 있었다.

$$t \sim N^\alpha(t; \text{CPU time}, N; \text{격자수}) \quad (29)$$

이 식에 따라 각 조합에 대한 α 값을 구해보면 Table 6과 같다.

일반적으로 SIMPLE법 같은 분리형 알고리즘은 격자의 크기에 따라 수렴율이 크게 영향을 받지만 Krylov 부공간법을 적용하면 격자 의존성이 어느 정도 줄일 수 있다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 풀기 위한 분리형 SIMPLE 알고리즘에 예조건자를 적용한 Krylov 부공간법을 사용하여 그 수렴 특성을 알아보았으며 그 결과 다음과 같은 결론을 도출할 수 있었다.

(1) Jacobi-CG는 매우 불안정한 초기수렴 양상으로 압력 수정 방정식을 풀기에 부적합하다. 또

한 ILU-CG나 IC-CG는 비슷한 수렴양상을 갖는다.

(2) 압력 수정 방정식에 MILU-CG를 사용할 경우 초기수렴동향이 가장 빠르고 안정적이었으며 MILU 예조건자는 본 연구에서 고려한 것 중 가장 탁월한 것으로 판명되었다.

(3) 압력 수정 방정식에 MILU-CG를 사용하였을 경우 기존의 ADI와 비교하였을 때 격자수 증가에 따른 연산시간 증가는 상대적으로 매우 완만하였으며 분리형 알고리즘인 SIMPLE법의 약점인 수렴성의 격자 크기 의존도가 이 방법의 사용으로 어느 정도 상쇄될 수 있음을 보여주었다.

참고문헌

- (1) Brandt, A., 1977, "Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems," *Math.*, Vol. 31, pp. 333~390.
- (2) Choi, I. K., Maeng, J. S., and Yoon, J. Y., 1998, "Convergence Behavior of a Full-Multigrid SIMPLE Algorithm," *Proc. of 4th KSME-JSME Fluids Eng. Conf.*, pp. 281~284.
- (3) Lilek, Z. and Muzaferiza, S., and Peric, M., 1997, "Efficiency and Accuracy Aspects of a Full-Multigrid SIMPLE Algorithm for Three-Dimensional Flows," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 31, pp. 23~42.
- (4) Hestenes, M. R. and Stiefel, E., 1952, "Method of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems," *Nat'l Bur. Standards J. Rev.*, Vol. 49, pp. 409~436.
- (5) Sonneveld, P., 1989, "CGS: A Fast Lanczos-type Solver for Nonsymmetric Linear Systems," *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 10, pp. 36~52.
- (6) Fletcher, R., 1976, "Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems," *Lecture Notes Math.*, Vol. 506, pp. 73~89., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- (7) van der Vorst, H. A., 1992, "BiCGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of BiCG for the Solution of Non-symmetric Linear Systems," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 12, pp. 631~644.

- (8) Saad, Y. and Schultz, M. H., 1986, "A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, No. 7, pp. 856~869.
- (9) Lin, H. W. and Chen, L. D., 1996, "Application of the Krylov Subspace Method to Numerical Heat Transfer," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 30, pp. 249~270.
- (10) Sheen, S. C. and Wu, J. L., 1997, "Solution of the Pressure Correction Equation by the Pre-conditioned Conjugate Gradient Method," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 32, pp. 215~230.
- (11) Kim, C. J. and Ro, S. T., 1995, "Efficient and Robust Matrix Solver for the Pressure Correction Equation in Two- and Three- Dimensional Fluid Flow Problems," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 27, pp. 355~369.
- (12) Tanyi, B. A. and Thatcher, R. W., 1996, "Iterative Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on the Meiko Computing Surfaces," *Intl. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, pp. 220~240.
- (13) Vuik, C., 1996, "Fast Iterative Solvers for the Discretized Incompressible Navier-Stokes Equations," *Intl. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, pp. 195~210.
- (14) Noll, B. and Wittig, S., 1991, "Generalized Conjugate Gradient Method for the Three Dimensional Fluid Flow Problems," *Numerical Heat Transfer, Vol. 20, Part B*, pp. 207~221.
- (15) 맹주성, 최일곤, 임연우, 1999, "비압축성 Navier-Stokes 방정식의 수렴 가속을 위한 예조건화 Krylov 부공간법과 다중 격자법의 결합," 한국 전산유체공학회 1999년도 춘계학술대회 논문집, pp. 106~112.
- (16) Patankar, S. V. and Spalding, D. B., 1980, *Numerical Heat and Fluid Flow*, Hemisphere, New York.
- (17) Rhie, C. M. and Chow, W. L., 1983, "A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA J.*, Vol. 21, pp. 1525~1532.
- (18) Van-Leer, B., 1979, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme; A Second-order Sequel to Godunov's Method," *J. Comp. Phys.*, Vol. 32, pp. 101~136.