

# 시간과 격자 크기 변화에 따른 원주후류해석의 경제적 수치기법

맹주상\* · 김용대\*\* · 최일곤\*\*\*  
(1999년 8월 12일 접수)

## Proper Numerical Scheme to Solve the Flow Past a Circular Cylinder with Time and Grid Size Variations

Joo-Sung Maeng, Yong-Dae Kim and IL-Kon Choi

**Key Words:** Unsteady Flow(비정상상태 유동), Vortex Shedding(와동 흘림), Convective Scheme(대류 도식), Time Integration Scheme(시간적분법), Three-Time Level Scheme(3단계 준위법)

### Abstract

The purpose of this study is to present the most effective numerical scheme to calculate the unsteady flows. In order to calculate the flow quantities of flow past a circular cylinder, Three-time level and five convective schemes are applied to unsteady and convective terms, respectively. The values obtained are compared with those from the existing experimental and numerical studies. At Reynolds numbers up to 160, time intervals can be expanded 10 times of Implicit Euler scheme using Three-time level method, and it is found that QUICK and CUI schemes work much stable than others even if less grid density conditions. The combination of Three-time level and QUICK scheme gives high resolutions for laminar unsteady problems with PC level.

### 기호설명

$C_D$  : 항력 계수 ( $F/\rho U_\infty^2 D$ )  
 $\overline{C_D}$  : 평균 항력 계수  
 $C_L$  : 양력 계수 ( $L/\rho U_\infty^2 D$ )  
 $\widehat{C_L}$  : 양력 계수 진폭  
 $D$  : 원주 지름  
 $F$  : 양력  
 $J$  : 자코비안  
 $L$  : 양력 계수  
 $Re$  : 레이놀즈수 ( $U_\infty D/\nu$ )

$St$  : 스트롤수 ( $fD/U_\infty$ )  
 $T$  : 와동흘림 주기  
 $U_\infty$  : 입구 및 원방 속도  
 $c$  : 국부 위상속도  
 $f$  : 와동흘림 진동수  
 $p$  : 압력  
 $t$  : 무차원 시간 ( $time \cdot U_\infty/D$ )  
 $\Delta t$  : 시간간격 ( $time\ step \cdot U_\infty/D$ )  
 $u, v$  : 직교 속도성분  
 $x, y$  : 직교 좌표계  
 $\theta$  : 박리각  
 $\hat{\theta}$  : 박리각의 변화량  
 $\xi, \eta$  : 곡선 좌표계  
 $\emptyset$  : 스칼라

\* 회원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : jsmaeng@email.hanyang.ac.kr  
TEL : (02)2290-0439 FAX : (02)2281-8201

\*\* 한양대학교 대학원 기계공학과

\*\*\* 회원, 한양대학교 대학원 기계공학과

1. 서 론

원주 후류의 유동장은 열 교환기, 핵 반응로 등의 공학적인 관심뿐만 아니라 후류 유동의 특성을 파악할 수 있다는 사실과 비정상상태 유동에 대한 수치해석코드의 검증에 위한 모델로 사용되기 때문에 많은 연구자들에 의하여 최근까지 활발히 연구되고 있다. 실험적 연구를 살펴보면 Tessie-Solier(1931)의 연구를 시작으로 Tritton<sup>(1)</sup>이 레이놀즈수 100까지의 저 레이놀즈수 층류 유동의 항력 변화에 대하여 연구하였고, Roshko<sup>(2)</sup>는  $10^6 \sim 10^7$ 의 고 레이놀즈수 난류 유동장에 대한 항력계수와 스트롤수의 관찰을 통하여 원주에서 분할판의 영향과 천이현상에 대하여 연구하였다. Norberg<sup>(3)</sup>는  $50 \sim 4 \times 10^4$ 의 레이놀즈수에서 종횡비 변화에 따른 스트롤수와 배면 압력을 관찰하였고, Williamson<sup>(4)</sup>은 원주 후류 와동구조에 대한 연구를 통해 과거  $Re=70$ 부근에서 나타나는 스트롤수 변화곡선의 불연속이 경사홀림의 발생에 의한 3차원 효과라는 것을 밝혀내고, 끝벽경계 제어를 통하여 평행홀림을 생성함으로써 레이놀즈수 170까지 완전 2차원 St-Re 관계식을 완성하였다. 최초의 이론적 연구는 Karman(1911)의 비점성 유동에 대한 것이다. 그 후 Lecointe와 Piquet<sup>(5)</sup>은 와도-유량함수법을 사용하여 연구하였고, Braza 등<sup>(6)</sup>은 압력기반 해법을 통하여 레이놀즈수 100~1,000까지의 비정상 와동홀림의 유동양상을 연구하였다. Rosenfeld 등<sup>(7)</sup>은 레이놀즈수 100에서 300까지의 비정상 유동을 가압축성법을 사용하여 해석하였고, Park 등<sup>(8)</sup>은 Fractional step method를 사용하여 레이놀즈수 160까지의 유동에 대하여 원주 표면의 정량적인 유동값을 제시하였다.

Peric 등<sup>(9)</sup>과 김용대 등<sup>(10)</sup>은 3단계준위법을 사용하여 원주후류 유동을 모사하였다. 그러나 이러한 활발한 연구와 발달에도 불구하고 비정상상태 유동의 수치적 모사는 많은 계산량과 계산시간을 필요로 하므로, 적은 계산량과 계산시간으로 공간뿐만 아니라 시간에 대해서도 충분한 수치적 안정성과 정확성을 확보할 수 있는 효율적이고 경제적인 해석기법이 요구되고 있다.

본 연구에서는 시간항에 2차 정확도의 3단계준위법을 도입하여 1차 정확도의 Implicit Euler법과 비교하였고, 대류항에 2차의 중앙차분법, LUDS (Linearly Upwind Difference Scheme), 그리고 3차의 QUICK, CUI(Cubic Upwind Interpolation), TVD도식과 같은 5개의 고차 고분해 도식을 적용하였다. 각 도식은 레이놀즈수 200에서 시간간격과 격자밀도 변화에 따라 계산된 결과들을 기존의 실험 및 수치해석결과와 비교하여 정확도 및 수치적 안정성을 검증한 후, 레이놀즈수 160까지 정밀해를 관측하였다.

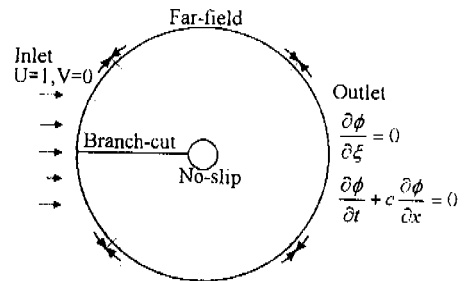
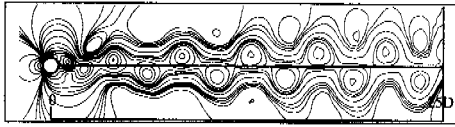


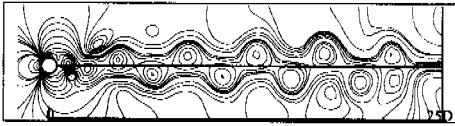
Fig. 1 Computational domain and boundary condition

Table 1 One-parameter family of convection schemes

Scheme	$\kappa$	expression for $\phi_e$ when $U_e > 0$	expression for $\phi_e$ when $U_e < 0$
CDS	1	$\frac{1}{2} \phi_P + \frac{1}{2} \phi_E$	$\frac{1}{2} \phi_P + \frac{1}{2} \phi_E$
LUDS	-1	$\frac{3}{2} \phi_P - \frac{1}{2} \phi_W$	$\frac{3}{2} \phi_E - \frac{1}{2} \phi_{EE}$
QUICK	1/2	$\frac{3}{8} \phi_E + \frac{3}{4} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_W$	$\frac{3}{8} \phi_P + \frac{3}{4} \phi_E - \frac{1}{8} \phi_{EE}$
CUI	1/3	$\frac{1}{3} \phi_E + \frac{5}{6} \phi_P - \frac{1}{6} \phi_W$	$\frac{1}{3} \phi_P + \frac{5}{6} \phi_E - \frac{1}{6} \phi_{EE}$

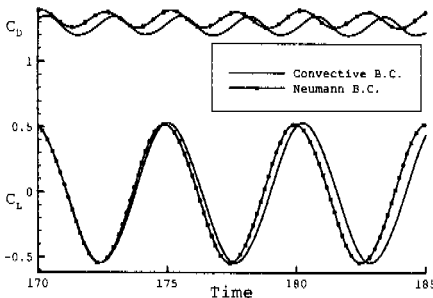


(a) Convective B.C.

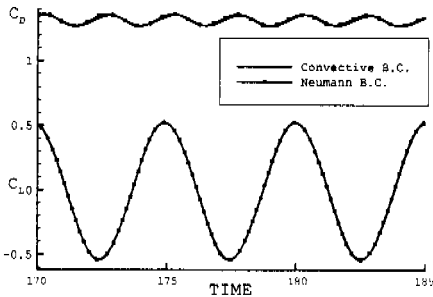


(b) Neumann B.C.

Fig. 2 Pressure contours at Re=200.(25D)



(a) 15D



(b) 25D

Fig. 3 Time evaluation of drag and lift coefficient at Re=200

2. 수치 해법

2.1 지배 방정식

원주 후류의 비정상 비압축성 유동의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot (VV) = \nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla V) \tag{2}$$

2.2 수치 해석

본 연구에서 사용된 격자계는 비엇갈림 격자계이다. 지배 방정식 (1)과 (2)는 유한 체적법으로 이산화하여 SIMPLE법을 사용하여 계산하였다. 대류항은 Van-Leer<sup>(11)</sup>의  $\kappa$  도식의 중앙차분법과 LUDS, CUI, QUICK, TVD와 같은 고차 도식들을 지연수정(Defect correction)으로 구현하였으며, Table 1.은  $\kappa$  값에 따라 구현되는 도식을 나타낸 것이다. 한편 수직 확산항은 내재적으로 그리고 교차 확산항은 외재적으로 처리하였다.

비정상항은 3단계준위법과 Implicit Euler법을 비교하였으며 3단계 준위법은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}}{2\Delta t} \tag{3}$$

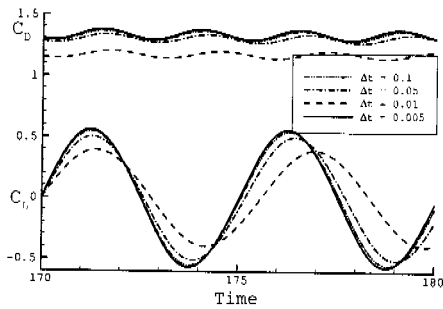
비정상항에 대한 음해법의 적용은 CFL수에 관계없이 무조건 안정되기 때문에 양해법에 비하여 큰 시간 간격을 취할 수 있으며, 특히, 3단계준위법은 다른 음해법에 비하여 큰 시간간격에서 해의 수치적 안정성과 정확도가 뛰어나기 때문에 효율적인 시간진행을 가능하게 한다.

2.3 경계 조건

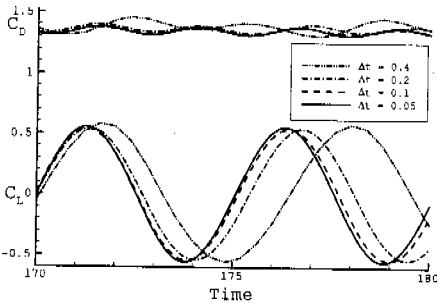
Fig. 1은 계산 영역 및 경계조건을 나타낸다. 원주 표면과 표면으로부터 25D 떨어진 외부 경계면까지의 계산 영역에 대하여 양질의 격자 구성이 용이한 O형 격자계를 대수적으로 생성하였다. 원주 표면에서는 점착조건을 주었고, 입구 및 상하 경계면은 균일한 속도조건을 사용하였다. 절단면에는 주기조건을 적용하였고, 출구에서는 Neumann조건과 대류경계조건을 모두 사용하여 항력 및 양력계수를 구하고 그 값을 비교한후 값의 변화가 없는 곳에서 Neumann조건을 사용하였다. 본 연구에 사용한 경계조건은 다음과 같다.

Neumann B.C. :  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0 \tag{4}$

Convective B.C. :  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{5}$



(a) Implicit Euler scheme



(b) Three-time level scheme

Fig. 4 Drag and lift coefficient with time step size variations.(Re=200, 160 × 80)

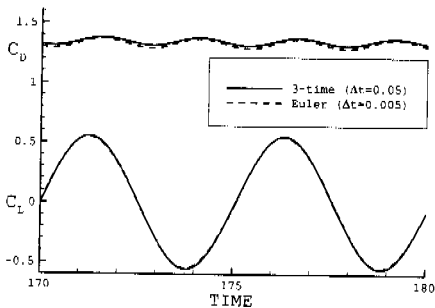


Fig. 5 Time interval comparison between Three-time level and Euler method.(Re=200, 160 × 80)

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 경계 조건

Fig. 2는 원주로부터 출구 경계면까지의 압력분

Table 2 Comparison of results for flow over a circular cylinder at Re=200

	$C_D$	$C_L$	$St$
While <sup>(1)</sup> (Exp.)	1.3		
Kovaznay <sup>(12)</sup> (Exp.)			0.19
Roshko <sup>(2)</sup> (Exp.)			0.19
Rogers <sup>(1)</sup>	1.33 ± 0.05	± 0.68	0.19
Rosenfeld et al. <sup>(1)</sup>	1.31 ± 0.04	± 0.65	0.20
Braza et al. <sup>(6)</sup>		± 0.77	0.20
Miyake <sup>(19)</sup>	1.34 ± 0.043	± 0.67	0.196
Present 201 × 131 Grid, Δt=0.03			
QUICK	1.34 ± 0.045	± 0.615	0.196
CUI	1.32 ± 0.041	± 0.599	0.196
TVD	1.33 ± 0.037	± 0.585	0.188
CDS	1.30 ± 0.035	± 0.550	0.192

포를 나타낸 것이다. (a)는 대류경계조건을 적용한 결과이고, (b)는 Neumann 조건의 결과로 출구에서 압력분포의 차이가 확연히 나타나고 있으며 이것이 원주 주위에까지 전파되는지를 검토하였다.

Fig. 3은 각 경계조건에 따른 항력 및 양력 계수의 변화를 나타낸 것으로 (a)는 출구 경계까지의 거리가 원주지름의 15배인 15D일 때의 결과이고, (b)는 25D거리일 때의 결과이다. (a)는 경계조건에 따라 결과의 차이를 보이고 있으나, (b)는 일치하는 결과를 나타내고 있다. 그러므로 25D되는 곳에서 Neumann조건을 사용하더라도 구하고자 하는 물리량에 큰 영향을 미치지 않는다.

#### 3.2 시간적분법의 비교 (시간간격)

원주 후류의 유동은 레이놀즈수가 5보다 크고 40보다 작은 경우 한 쌍의 상하 대칭의 와를 생성하며 이러한 와의 구조는 발달후 깨어지지 않는 안정된 구조를 갖는다. 이러한 상하 대칭의 와의 구조는 레이놀즈수가 50보다 커지면서 초기 상하 대칭이던 와의 구조는 비정규적으로 주기적인 교번의 와동홀림으로 발달한다. 이 때의 와동홀림은 층류유동이며, 레이놀즈수 300에 이르면서 와동홀림의 와도는 완전 난류 유동으로 발달한다.

시간항과 대류항에 대한 각 도식의 수치적 안정성을 검증하기 위하여 Peclet수가 가장 큰 레이

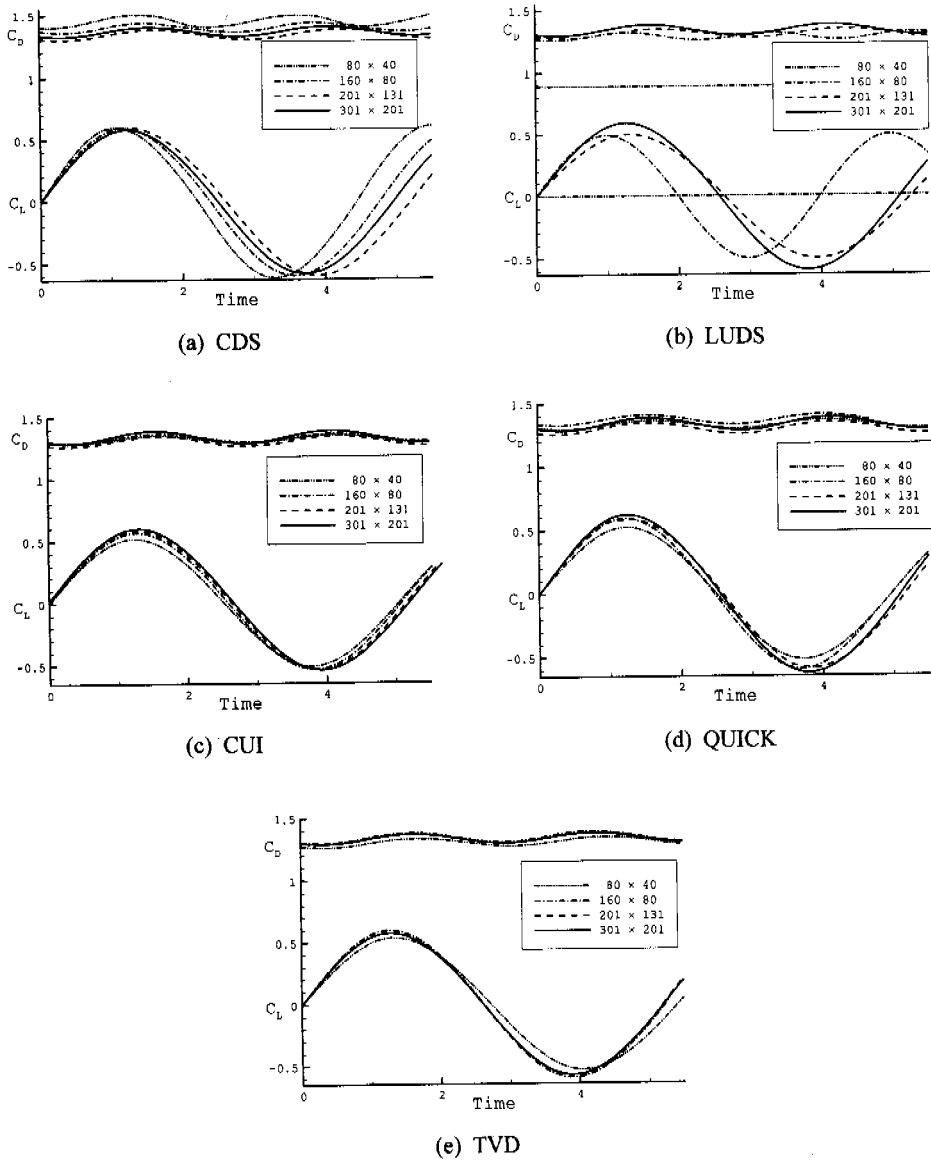


Fig. 6 Drag and lift coefficient with grid density variations.( $Re=200, \Delta t=0.03$ )

늘즈수 200에 대하여 시간간격과 격자밀도에 따른 해석해들을 실험 및 수치해들과 비교하여 Table 2에 나타내었다.

Fig. 4는 시간간격 변화에 따른 항력 및 양력계수를 나타낸 것이다. 비정상항에 Implicit Euler를 적용한 (a)의 결과는 시간간격이 커지면서 진폭이 작아지는 소산오차(dissipation error)가 발생하고 있으며, 충분한 정확도를 확보하기 위해서는 양력 계수 진동주기의 약 1/1000인 0.005이하의 시

간간격이 필요함을 보여준다. 그에 비하여 3단계준위법을 사용한 (b)의 결과는 양력계수와 항력계수가 매우 일정하게 예측되며 주기의 약 1/100인 0.05정도의 시간간격을 가질 때 충분한 안정성과 정확도를 확보할 수 있다.

Fig. 5는 시간간격 0.005에서의 Implicit Euler법 결과와 시간간격 0.05에서 3단계준위법 결과를 비교한 것이다. 10배 정도의 시간간격 차이에도 불구하고 같은 값을 예측하고 있는바 3단계준위

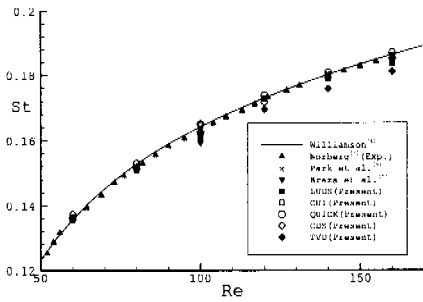


Fig. 7 Strouhal vs. Reynolds number relation

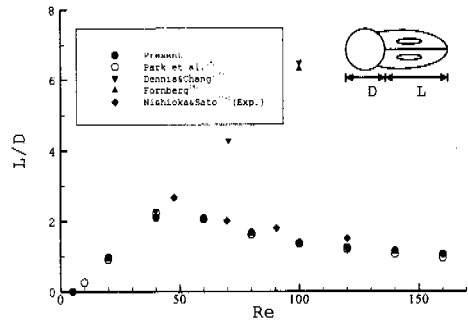


Fig. 9 Length of the time-averaged separation bubble behind cylinder vs. Reynolds number

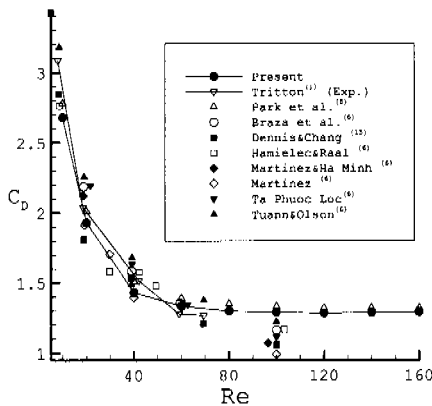


Fig. 8 Calculated and experimental values for the total drag coefficient.

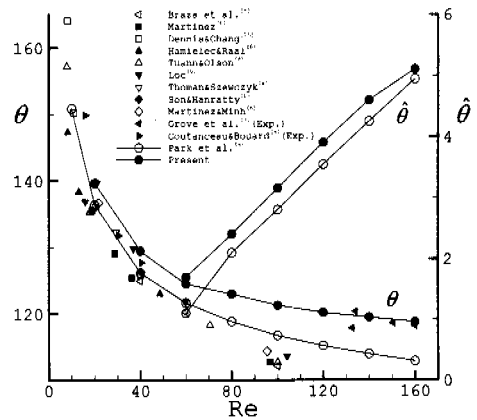


Fig. 10 Separation angle vs. Reynolds numbers

법이 비정상상태 유동장 계산에 매우 경제적이라는 것을 알 수 있다.

### 3.3 경대류도식의 비교(격자 밀집도)

여러 가지 대류도식의 정확한 비교를 위하여 비정상항에 이미 수치적 안정성과 정확성이 검증된 3단계준위법을 사용하였다.

Fig. 6은 각 도식의 격자밀도 변화에 대한 양력 및 항력 계수의 변화를 나타낸 것이다. 이 때 시간간격은 0.03이다. (a)의 중앙차분법의 결과는 격자밀도에 대하여 대단히 큰 값의 변화를 나타내고 있으며, 이것은 알려진 바와 같이 중앙차분법이 충분히 밀한 격자계에서 수행되어야만 수치적 안정성을 확보하고 유동의 정확한 예측이 가능함을 보여준다. (b)는 2차 정확도의 상류 차분도식인 LUDS를 사용한 결과이다. 80 × 40의 격자에서 와동 흐름현상을 전혀 예측하지 못하고 있으

며, 이러한 현상은 120 × 60 격자까지 나타나고, 보다 밀한 격자를 구성하여도 격자 밀도에 대하여 값의 변화가 매우 불안정한 양상을 나타낸다. 그에 비하여 (c), (d), (e)의 고차 고분해 도식을 사용한 해석결과는 격자밀도 변화에 대하여 뛰어난 수치적 안정성을 보이고 있다.

Fig. 7은 St-Re 관계선도로 0.03의 시간간격과 201 × 131 격자에서 각 대류도식들의 결과를 Williamson<sup>(4)</sup>의 실험에 의하여 제시된 레이놀즈수 160까지의 2차원 와동흐림에 대한 스트루수-레이놀즈수 관계식, Norberg, Tritton 등의 실험 및 여러 수치해석 연구 결과들과 비교한 것이다. QUICK, CUI 등의 고차종상도식을 사용한 경우 Williamson 등의 실험 결과에 매우 잘 일치하는 결과를 보여주고 있으며, Park 등<sup>(8)</sup>이 641 × 241에서 계산한데

비하여 약 1/6정도의 격자에서도 충분히 정확한 결과를 예측하고 있음을 알 수 있다. TVD도식을 적용한 결과는 전체적인 선도의 경향은 같으나 전체적으로 하향 예측하고 있고, 중앙차분법과 LUDS도식의 결과도 고차풍상도식에 비하여 해의 정확도가 부족함을 알 수 있다.

앞선 결과들로부터 가장 뛰어난 안정성과 정확성을 보인 시간항에 대한 3단계준위법과 QUICK도식을 사용하여 0.03의 시간간격과  $201 \times 131$  격자에서 계산한 여러 가지 물리량들을 실험 및 수치 결과들과 비교하였다.

Fig. 8은 항력계수를 나타낸 것이다. Tritton의 실험 및 이전 연구결과들과 잘 일치하는 결과를 보이고 있고,  $641 \times 241$  격자를 사용한 Park의 해석결과에도 일치하고 있으며, 레이놀즈수 120을 지나면서 항력계수가 거의 일정한 값을 나타내고 있음을 알 수 있다.

Fig. 9는 시간평균된 속도장에서 레이놀즈수에 대한 와류 bubble의 길이를 나타낸 것으로 Nishioka와 Sato<sup>(13)</sup>의 실험 결과 및 Park의 수치결과와 잘 일치하고 있다. 여기에서도  $Re=120$  이후부터는 일정한 값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

Fig. 10은 벽의 와도가 '0'이 되는 박리각을 레이놀즈수에 따라 나타낸 것이다. 레이놀즈수가 커짐에 따라 Park 및 다른 수치해석결과에 비하여 크게 예측하고 있으나 Grove의 실험값과는 매우 잘 일치하는 결과를 보여주고 있다. Fig. 8과 Fig. 9에서 항력계수와 와류 bubble의 길이가  $120 \leq Re \leq 160$  범위에서 일정한 값을 나타내고 있는 것으로 보아  $Re=120$  근방에서 박리의 크기와 위치가 일정한 임계값이 존재하는 것으로 해석될 수 있다. 따라서 본 연구에서 계산된 박리각도  $120 \leq Re \leq 160$  범위에서 일정한 값을 갖는 것이 타당하다.

#### 4. 결 론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 도출할 수 있다.

(1) 비정상항에 대하여 3단계준위법을 사용하고, 대류항에 대하여 QUICK 또는 CUI도식을 적용한 해석기법은 층류 비정상상태 유동문제의 해

석에 있어서 막대한 계산시간 및 계산량을 효과적으로 감소시킬 수 있으며, 그 결과 비정상상태 유동해석을 PC에서도 충분히 효율적으로 수행할 수 있게 해주는 경제적인 해석기법으로 판명되었다.

(2) 레이놀즈수 160까지의 2차원 층류 원주유동에서 박리각은  $120^\circ$  부근에서 임계값을 가지며 더 이상 작아지지 않는다.

#### 참고문헌

- (1) Tritton, D. J., 1959, "Experiment on the Flow Past a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 6, pp. 547~567.
- (2) Roshko, A., 1960, "Experiment on the Flow Past a Circular Cylinder at Very High Reynolds Number," *J. Fluid Mech.*, Vol. 10, pp. 345~357.
- (3) Norberg, C., 1994, "An Experimental Investigation of the Flow around a Circular Cylinder : Influence of Aspect Ratio," *J. Fluid Mech.*, Vol. 258, pp. 287~316.
- (4) Williamson, C. H. K., 1996, "Vortex Dynamics in the Cylinder Wake," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 28, pp. 477~539.
- (5) Lecoq, Y. and Piquet, J., 1984, "On the Use of Several Compact Methods for the Study of Unsteady Incompressible Viscous Flow around a Circular Cylinder," *Computers & Fluids*, Vol. 12, No. 4, pp. 255~280.
- (6) Braza, M., Chassaing, P. and Ha Minh, H., 1986, "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder," *J. Fluid Mech.*, Vol. 165, pp. 79~130.
- (7) Rosenfeld, M., Kwak, D. and Vinokur, M., 1991, "A Fractional Step method for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinate Systems," *J. Comp. Physics.*, Vol. 94, pp. 102~137.
- (8) Park, J., Kwon, K. and Choi, H., 1998, "Numerical Solutions of Flow Past a Circular Cylinder at Reynolds Numbers up to 160," *KSME International Journal*, Vol. 12, No. 6, pp. 1200~1205.

- (9) Peric, M. et al., 1997, "Computation of Unsteady Flows Using Non-matching Blocks of Structured Grid," *Numer. Heat Transfer, Part. B*, Vol. 32, pp. 403~418.
- (10) 김용대, 최일곤, 맹주성, 1998, "3단계준위법을 이용한 원주후류 와동흐름의 수치해석 연구," 한양대학교 기계기술연구논문집, 제4권, 1호 pp. 403~418.
- (11) Van-Leer, B., 1979, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V.A Second Order Sequel to Godunov's Method," *J. Comp. Phys.*, Vol. 32, pp. 101~136.
- (12) Han, T. Y., Meng, J. C. S. and Innis, G. E., 1983, "An Open Boundary Condition for Incompressible Stratified Flows," *J. Comp. Phys.*, Vol. 49, pp. 279~297.
- (13) Nishioka, M. and Sato, H., 1978, "Mechanism of Determination of the Shedding Frequency for Vortices behind a Cylinder at Low Reynolds Numbers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 89, Part 1, pp. 49~60.
- (14) Liu, C., Zheng, X. and Sung, C. H., 1998, "Preconditioned Multigrid Methods for Unsteady Incompressible Flows," *J. Comp. Phys.*, Vol. 139, pp. 35~57.
- (15) Dennis, S. C. R. and Chang, G., 1970, "Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100," *J. Fluid Mech.*, Vol. 42, part 3, pp. 471~489.