

대류가열 비정상 접촉용해에 대한 해석해

유 호 선*
(1999년 8월 28일 접수)

An Analytical Solution for the Unsteady Close-Contact Melting by Convective Heating

Hoseon Yoo

Key Words: Close-Contact Melting(접촉용해), Unsteady Analysis(비정상 해석), Analytical Solution(해석해), Convective Heating(대류가열)

Abstract

This study deals with the unsteady close-contact melting of solid blocks on a flat surface subject to convective heating. Normalizing the model equations in reference to the steady solution successfully leads them to cover constant heat flux and isothermal limits at small and large extremes of the Biot number, respectively. The resulting equations admit a compactly expressed analytical solution, which includes the previous solutions as a subset. Based on the steady solution, the characteristics of close-contact melting can be categorized into constant heat flux, transition, and isothermal regimes, the boundaries of which appear to be nearly independent of the contact force. The unsteady solutions corresponding to Biot numbers in the transition regime show intermediate behaviors between those of the two limits. With a proper approximation, the present solution procedure can cope with the case of variable fluid temperature and heat transfer coefficient. Regardless of imposed conditions, the mean normalized Nusselt number during the unsteady process asymptotically approaches to a constant value as the Biot number comes close to each limit.

기호설명

A : 접촉면의 종횡비
 B : 계수, $Bi \delta_c$
 Bi : Biot수, $h_e R/k$
 c : 액체의 비열
 F : 접촉력, $\tilde{g} \tilde{H}/(GPr)$
 G : 고체의 형상합수
 g : 중력가속도
 \tilde{g} : 무차원 중력가속도, gR^3/α^2
 H : 고체의 높이, Fig. 1
 \tilde{H} : 무차원 높이, H/R
 h_e : 대류열전달계수, Fig. 1

h_{eff} : 유효열전달계수, 식 (2)
 h_{sf} : 용해잠열
 k : 액체의 열전도계수
 k_w : 가열판의 열전도계수
 M : 고체의 질량
 Nu : Nusselt수
 $\hat{N}u$: 정규화된 Nusselt수, 식 (26)
 $\langle \hat{N}u \rangle$: 평균 Nusselt수, 식 (28)
 n : 음이 아닌 정수
 P : 액막 내의 압력
 Pr : Prandtl수, $\mu c/k$
 q'' : 열유속, 식 (1)
 R : 특성길이
 r : 원통형 고체의 반경
 S : 접촉면적
 Ste : Stefan수, $c(T_\infty - T_m)/h_{sf}$
 T, T_m : 온도, 융점온도

* 회원, 숭실대학교 기계공학과

E-mail : hsyoo@engineer.soongsil.ac.kr
 TEL : (02)820-0661 FAX : (02)814-3627

- T_w : 가열벽면 온도
- \hat{T}_w : 정규화된 벽면온도, 식 (27)
- t : 시간
- \hat{t} : 무차원 시간, ta/R^2
- \hat{t} : 정규화된 시간, $\hat{t}\hat{V}_c/(\hat{\rho}\hat{\delta}_c)$
- V : 고체하강속도
- \hat{V} : 무차원 고체하강속도, VR/α
- \hat{V} : 정규화된 고체하강속도, \hat{V}/\hat{V}_c
- z : 높이방향 좌표, Fig. 1

그리스문자

- α : 액체의 열확산계수, $k/(\rho_1c)$
- δ : 액막두께
- δ : 무차원 액막두께, δ/R
- $\hat{\delta}$: 정규화된 액막두께, $\delta/\hat{\delta}_c$
- δ_w : 가열판의 두께, Fig. 1
- μ : 액체의 점도
- ρ : 밀도
- $\tilde{\rho}$: 밀도비, ρ/ρ_s
- ξ, ζ : 가변수

하첨자

- c : 정상상태
- l : 액상
- s : 고상
- u : 비정상 기간

1. 서 론

접촉용해는 근접한 거리를 유지하는 두 고체 사이에서 일어나는 상변화 현상으로서 자연적인 또는 기술적인 여러 과정과 연관된다.⁽¹⁾ 잘 알려져 있듯이 접촉용해의 특징은 짧은 전열거리에 따른 높은 열전달률과 액막의 윤활작용에 의한 낮은 마찰계수에 있으며, 이를 공학적으로 응용하기 위하여 많은 연구가 수행되어 왔다.⁽²⁾

접촉용해의 구동력은 외부로부터의 가열, 가압, 고속의 상대운동에 의해 발생하는 마찰열 또는 이들의 조합 등 다양한 형태를 갖는다. 가령 윤활윤활(melt lubrication)에는 외부가열과 마찰열

이,⁽³⁾ 압력용해(pressure melting)에는 가압과 마찰 열이 작용한다.^(4,5) 범위를 보다 축소하여 외부가 열만에 의한 고전적인 접촉용해를 고찰할 때, 해석적 및 수치적 접근, 정상 및 비정상 과정을 망라하여, 지금까지 연구의 대부분은 등은^(1,3,6,7) 또는 등열유속^(8,9) 경계조건에 관한 것이다. 열전달의 관점에서는 가열조건의 두 한계, 수학적으로는 Dirichlet 및 Neumann조건에 대한 해석이 수행되었을 뿐이다. 그러나, 최근의 연구⁽¹⁰⁾에서 밝혀졌듯이, 두 조건에 대응하는 비정상 접촉용해 거동에는 상당한 차이가 있기 때문에 그 사이를 보완할 필요가 있다. 대류가열은 보다 일반화된 혼합경계조건(mixed condition)으로서 이러한 목적에 잘 부합된다. 실제로 대류가열이 등은 및 등열유속을 포괄하는 경계조건이라는 사실은 이미 확인된 바 있다.⁽¹¹⁾

최근 본 저자는 일련의 연구^(7,9,10)를 통하여 관심 있는 기하학적 형상을 대상으로 합리적인 단순화를 통하여 비정상 접촉용해에 대한 이론적 모델을 정립하고, 간결한 형태의 해석해를 성공적으로 유도한 바 있다. 해석해는 접촉용해의 본질을 쉽게 파악할 수 있고, 수치모델의 검증에 유용하며, 실험결과가 설정된 조건에서 이격된 정도를 평가하는 기준이 될 수 있다는 점에서 중요하다. 다만 상기 연구는 모두 전술한 가열조건의 한계에 대하여 수행되었기 때문에 결과의 적용은 제한될 수밖에 없다.

비정상 접촉용해에 대한 일반화된 해석해를 확립하기 위한 노력의 하나로서, 본 연구는 대류가열을 경계조건으로 취한다. 등은유체와 가열면 사이 대류열전달계수의 양극한이 등은 및 등열유속 조건으로 귀결됨을 보이고, 임의의 가열조건에 대한 해석해를 유도한다. 기본적으로 선행연구⁽¹⁰⁾와 유사한 해석방법에 의존하지만, 정상해(steady solution)의 성질과 비정상 열전달특성을 특히 강조하고자 한다. 또한 등은 및 등열유속 한계의 범위에도 관심을 기울인다.

2. 모 델

본 연구의 대상은, Fig. 1에 개략적으로 도시되었듯이, 중력장에서 초기에 용점온도 T_m 상태인 고체가 온도 $T_\infty (> T_m)$ 인 등은유체에 의해 가열

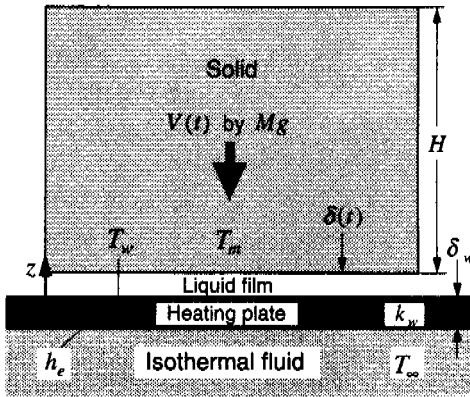


Fig. 1 Schematic of the present system

되는 평판 위에서 용해하는 현상이다. 이때 고체의 기하학적 형상은 무한 깊이의 직사각형, 축대칭 원통 및 삼차원 직육면체를 포괄한다. 가열유체로부터의 열전달에 따라 용해가 시작되면 고체와 평판 사이 접촉면에는 얇은 액체층이 형성되고 시간에 따라 성장한다. 이와 동시에, 중력으로 인한 고체의 하강에 의해 용해된 액체는 액막과 주위와의 경계로 유동하여 외부로 압출된다. 용해의 진행에 따라 액막의 두께 δ 및 고체의 하강속도 V 는 변화하면서 상경계면에서의 용해율과 고체하강속도가 일치하는 (준)정상상태로 접근할 것이다. 대류가열에 의한 접촉용해의 시작에서 정상상태까지의 비정상 거동을 해석하는 것이 연구의 내용이다.

덕트 내부에서 완전발달된 층류열전달 해석을 통하여 Sparrow와 Patankar⁽¹¹⁾는 외부의 등온유체에 의한 대류가열이 등온 및 등열유속을 포함하는 일반화된 경계조건임을 보인 바 있다. 또한 열전달 분야에 있어서 이러한 혼합경계조건이 시스템의 특성을 이해하는 데 유용하다는 점도 지적되었다.⁽¹²⁾ 문제는 판이하지만, 같은 접근방법을 접촉용해에 원용하자는 것이 본 연구의 초점이다. Fig. 1에서 얇은 가열판을 사용할 때 열용량 및 전도저항은 무시될 수 있으므로 외부로부터 시스템으로 전달되는 열유속은

$$q'' = h_e(T_\infty - T_w) \quad (1)$$

이다. 전도저항이 고려되어야 할 경우에는 식 (1)의 h_e 를

$$h_{eff}^{-1} = (k_w/\delta_w)^{-1} + h_e^{-1} \quad (2)$$

로 정의되는 h_{eff} 로 대체하면 된다.⁽¹²⁾

문제에 해석적으로 접근하기 위하여 접촉용해 분야에서는 이미 보편화된 아래의 가정에 의존하였다. 첫째, 액막에 대하여 박막근사(thin film approximation)⁽¹²⁾가 성립한다. 이때 액막을 통한 열전달은 종방향 전도에 의해 주도되고 과도적인 액막두께의 횡방향 변화도 없다.⁽³⁾ 박막근사의 유효범위는 대략 $Ste < 0.1$ 이라는 사실이 규명된 바 있으며,^(12,13) 보고된 접촉용해 조건의 대부분은 이를 만족한다. 둘째, 비정상 과정동안 용해로 인한 고체질량 즉 높이 H 의 변화는 무시한다.⁽⁶⁻¹⁰⁾ 이 가정은 고체가 접촉면의 반경이 r 인 원통형일 때 $Ste < 0.1$ 에 대하여 $H/r > 0.1$ 이면 타당하므로⁽¹⁾ 고체의 형상이 극히 얇은 경우를 제외하면 문제가 없다. 셋째, 접촉용해 과정동안 유체의 온도 및 열전달계수는 일정하다. 항온조로부터 다량의 유체가 일정한 유량으로 순환되는 경우에 해당될 것이다.

비정상 접촉용해 거동은 고체하강속도 및 액막두께의 시간에 따른 변화로 특성화된다. 이미 확립된 사실로서,^(1,6-10) 이들 변수는 힘의 평형 및 에너지 보존으로부터 결정된다. 고체의 하강에 따른 관성력, 고체의 자중 및 액막 내부의 압력 사이에는

$$M\left(g - \frac{dV}{dt}\right) = \int_s P dS \quad (3)$$

인 관계가 있다. 여기서 dV/dt 는 g 에 비하여 극히 작기 때문에 무시될 수 있다.^(1,7,9,10) 고체 내부는 용점온도이고 박막근사에 따라 액막두께는 균일하므로 상경계면에서의 에너지 보존은

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\delta} = \rho_s h_s \left(V + \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (4)$$

로 표현된다. 식 (2) 우변의 괄호 안은 접촉면 단위면적당 비정상 용해율로서 고체하강속도와 액막두께 변화율의 합으로 구성된다.

3. 해석

3.1 모델방정식

식 (3)과 (4)의 완결을 위해서는 각각에 나타난

압력분포 및 상경계면 온도구배를 액막 내의 연속, 운동량 및 에너지 방정식의 해로부터 종속변수인 고체하강속도와 액막두께의 함수로 표현하여야 한다.

힘의 평형을 나타내는 식 (3)은 가열조건과 무관하고 고체의 형상에 따른 압력분포가 이미 확립되어 있기 때문에^(1,3,7,9,10) 유도과정은 생략하고 결과만을 무차원 형태로 제시한다.

$$\tilde{V} + (1 - \tilde{\rho}) \frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{t}} = \left(\frac{\tilde{g}\tilde{H}}{G Pr} \right) \tilde{\delta}^3 \quad (5)$$

여기서 G 는 고체의 기하학적 형상을 대표하는 인자로서 시스템의 특성길이와 직접적으로 연관된다. 무한 길이 직사각형 및 축대칭 원형 단면 고체의 경우 특성길이는 각각 접촉길이의 절반 및 반경이며 $G=4$ 및 1.5 인 상수이다.^(1,7,9) 삼차원 직육면체 형상의 고체에 있어서 특성길이는 접촉면적의 제곱근이 편리하며 이에 대응하는 G 는 아래와 같이 접촉면 종횡비 A 의 함수이다.⁽¹⁰⁾

$$G(A) = \frac{1}{A} - \frac{192}{\pi^5 A^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh[(2n+1)\pi A/2]}{(2n+1)^5} \quad (6)$$

참고로 식 (6)은 $A=1$ (정사각형 접촉면)에 대하여 대칭이며 최대값은 $G(1) \cong 0.421731$ 이다. 자세한 성질에 관해서는 문헌⁽¹⁰⁾을 참조하기 바란다.

박막근사에 의하여 액막 내의 온도분포는 선형이므로 식 (4)는

$$q'' = \frac{k(T_w - T_m)}{\delta} = \rho_s h_{sf} \left(V + \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (7)$$

로 정리된다. 식 (1)과 (7)로부터 $(T_w - T_m)$ 을 $(T_\infty - T_m)$ 의 함수로 표현하고, 기호설명에 정의된 방법으로 무차원화하면 다음과 같다.

$$\tilde{V} + \frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{t}} = \tilde{\rho} Ste \frac{Bi}{1 + Bi \tilde{\delta}} \quad (8)$$

여기서 Bi 는 외부가열의 정도를 나타내는 무차원 인자이다. 이상의 같이 정립된 대류가열 비정상 접촉용해의 모델방정식이 식 (5)와 (8)이다.

대류가열에 있어서 열전달계수의 극한거동을 접촉용해의 경우에 대하여 확인하기로 한다. 만일 h_c 가 충분히 크면 식 (1)에서 $T_w = T_\infty$ 즉

등온 한계로, h_c 가 충분히 작으면 식 (7)에서 q'' 은 비록 작지만 시간에 대하여 불변인 값 즉 등열유속으로 접근한다. 전술한 덕트 내부 층류 열전달에서의 축방향 공간좌표가 접촉용해에서는 시간좌표로 대체되었다.^(11,12)

3.2 정규화

무차원 모델방정식 (5)와 (8)에서 \tilde{V} 를 소거한

$$\tilde{\rho} \frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{\rho} Ste Bi}{1 + Bi \tilde{\delta}} - \left(\frac{\tilde{g}\tilde{H}}{G Pr} \right) \tilde{\delta}^3 \quad (9)$$

를 적분하여 해를 구할 수는 있다. 그러나 식 (9)에서 Bi 수의 극한을 검토할 때 $Bi \rightarrow \infty$ 의 경우 알려진 등온 한계로 귀결되지만,^(7,10) $Bi \rightarrow 0$ 의 경우 비현실적인 결과 즉 $d\tilde{\delta}/d\tilde{t} < 0$ 가 초래된다. 즉 무차원 모델방정식은 등열유속 한계를 타당하게 반영하지 못한다. 등온 및 등열유속 한계와 Bi 수의 양극한이 일대일로 대응하도록 하기 위해서는 모델방정식의 형태변환이 필요하며, 기존의 연구^(7,9,10)를 고려할 때 유일한 방법이 정상해를 기준 한 정규화이다.

정상상태에서는 $d\tilde{\delta}/d\tilde{t} = 0$ 임으로 식 (5)와 (8)로부터 정상해는 쉽게 구해진다. 무차원 액막두께는 대수방정식

$$\tilde{\delta}_c^3 + Bi \tilde{\delta}_c^4 = \tilde{\rho} Ste Bi F^{-1} \quad (10)$$

의 해로서 결정되며, 고체하강속도는

$$\tilde{V}_c = F \tilde{\delta}_c^3 \quad (11)$$

이다. 여기서 $F = \tilde{g}\tilde{H}/(G Pr)$ 는 고체의 형상 및 물성치에만 관계될 뿐 가열조건과는 무관한 인자로서 물리적으로는 접촉력을 나타낸다.

정규화에 앞서 정상해의 특성을 분석하기로 한다. 일반적인 접촉용해 조건에 대하여 $\tilde{\delta}_c \ll 1$ 임을 고려할 때 Bi 수가 작으면 각 항의 크기차수(order of magnitude) 비교로부터 식 (10)은

$$\tilde{\delta}_c^3 \approx \tilde{\rho} Ste Bi F^{-1} \quad (12)$$

로 단순화되며, 대응하는 근사해는 다음과 같다.

$$\tilde{\delta}_c \approx (\tilde{\rho} Ste)^{1/3} F^{-1/3} Bi^{1/3} \quad (13)$$

$$\tilde{V}_c \approx (\tilde{\rho} Ste) Bi \quad (14)$$

반면 Bi수가 크면 식 (10) 좌변의 첫 항이 무시될 수 있으므로 근사하는

$$\delta_c \approx (\tilde{\rho} Ste)^{1/4} F^{-1/4} \quad (15)$$

$$\tilde{V}_c \approx (\tilde{\rho} Ste)^{3/4} F^{1/4} \quad (16)$$

이다. 식 (13)과 (14) 및 (15)와 (16)은 각각 등열 유속 및 등은 가열에 대한 정상해⁽¹⁰⁾와 일치한다. 이 사실은 원래 의도한 대로 정상해를 기준한 정규화가 Bi수의 양극한에서 등은 및 등열유속 조건으로 귀결될 가능성을 시사한다. 다만 위의 근사화가 성립하는 Bi수의 범위는 부여된 조건에 의존하므로 현단계에서 결정될 수는 없다.

식 (10)과 (11)을 적용하여 식 (5)와 (8)을 $\tilde{V} = \tilde{V}/\tilde{V}_c$, $\hat{\delta} = \delta/\delta_c$ 및 $\hat{t} = t\tilde{V}_c/(\tilde{\rho}\delta_c)$ 로 정규화하면 각각

$$\tilde{V} + \frac{(1-\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{t}} = \hat{\delta}^3 \quad (17)$$

$$\tilde{V} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{t}} = \frac{1+B}{1+B\hat{\delta}} \quad (18)$$

로 정리된다. 여기서 $B = Bi\delta_c$ 이다. 식 (18)의 우변은 이제 $B \rightarrow 0$ 이면 1로, $B \rightarrow \infty$ 이면 $\hat{\delta}^{-1}$ 로 접근하며 각각은 이미 알려진 등은 및 등열유속 조건에 대한 정규화된 방정식과 일치한다.⁽¹⁰⁾

3.3 해석해

정규화된 모델방정식의 해는 식 (9)의 경우와 같이 식 (17)과 (18)에서 \tilde{V} 을 소거한

$$\frac{d\hat{\delta}}{d\hat{t}} = \frac{1+B}{1+B\hat{\delta}} - \hat{\delta}^3 \quad (19)$$

이 변수분리되므로 적분하고 초기조건 $\hat{\delta}(0)=0$ 을 적용함으로써 쉽게 구해진다.

$$\hat{t} = \int_0^{\hat{\delta}} \left(\frac{1+B}{1+B\xi} - \xi^3 \right)^{-1} d\xi \quad (20)$$

여기서 ξ 는 가변수(dummy variable)이다. 일단 $\hat{\delta}$ 이 결정되면 식 (17)과 (18)에서 $d\hat{\delta}/d\hat{t}$ 를 소거하여 \tilde{V} 를 얻는다.

$$\tilde{V} = \frac{(\tilde{\rho}-1)}{\tilde{\rho}} \frac{1+B}{1+B\hat{\delta}} + \frac{\hat{\delta}}{\tilde{\rho}} \quad (21)$$

식 (20)은 음함수 형태이지만 $\hat{\delta}$ 이 \hat{t} 에 대한 단조함수이므로 $\hat{\delta}(\hat{t})$ 는 수치적분을 통하여 쉽게 계산된다. 다만 $B \rightarrow 0$ 및 $B \rightarrow \infty$ 인 극한에서 식 (20)은 알려진 바와 같이⁽¹⁰⁾ 각각

$$\hat{t} = \int_0^{\hat{\delta}} \frac{d\xi}{1-\xi^3} = \frac{1}{3} \ln \frac{(1+\hat{\delta}+\hat{\delta}^2)^{1/2}}{1-\hat{\delta}} + \frac{1}{3^{1/2}} \tan^{-1} \frac{3^{1/2}\hat{\delta}}{2+\hat{\delta}} \quad (22)$$

$$\hat{t} = \int_0^{\hat{\delta}} \frac{d\xi}{\xi^{-1}-\xi^3} = \frac{1}{2} \int_0^{\hat{\delta}^2} \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{1}{2} \tanh^{-1} \hat{\delta}^2 \quad (23)$$

로 적분된다. 식 (22)와 (23)에 대응하는 \tilde{V} 은 식 (21)에서 자명하다.

비정상 접촉용해 문제를 고상하강속도 및 액막 두께의 향으로 공식화한 이유 중의 하나는 다른 모든 특성이 이들 종속변수의 함수로 표현될 수 있기 때문이다. 먼저, 유체로부터 시스템으로 전달된 열량을

$$Nu = \frac{q''}{T_\infty - T_m} \frac{R}{k} \quad (24)$$

로 정의된 Nu수로 나타낼 때⁽¹²⁾ 식 (24)는 $\hat{\delta}$ 의 함수로 간결히 표현된다.

$$Nu = Bi / (1 + B\hat{\delta}) \quad (25)$$

여기서 유사한 물리량인 무차원 용해율은 식 (8)로부터 $(\tilde{\rho} Ste)Nu$ 이다. 정상상태에서 $\hat{\delta}=1$ 임으로 정규화된 Nu수는

$$\hat{Nu} = (1+B) / (1+B\hat{\delta}) \quad (26)$$

이다. 다음으로, 비정상 접촉용해 실험과 관련하여 평판의 표면온도 변화를 검토한다. 지금까지의 해석에서와 같이 정상상태를 기준으로 벽면온도를 정규화하고 $\hat{\delta}$ 의 향으로 정리하면

$$\hat{T}_w = \frac{T_w - T_m}{T_{wc} - T_m} = \frac{(1+B)\hat{\delta}}{1+B\hat{\delta}} \quad (27)$$

이다. 여기서도 $B \rightarrow 0$ 및 $B \rightarrow \infty$ 인 극한에서의 거동은 각각 $\hat{T}_w = \hat{\delta}$ 및 1로서 알려진 사실과 일치한다.⁽¹⁰⁾

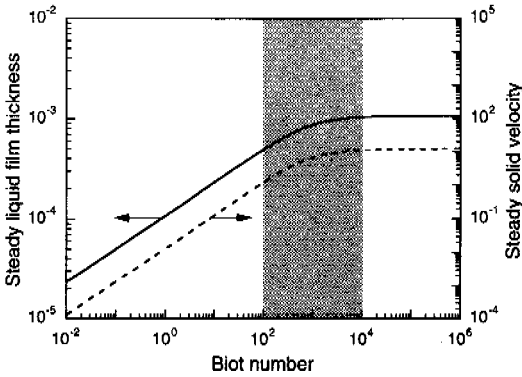


Fig. 2 Steady solution as a function of the Biot number

4. 결과 및 고찰

본 해석은 Bi수의 양극한에서 선행연구⁽¹⁰⁾에서 취급된 등온 및 등열유속 한계와 일치한다. 따라서 유도된 해석해는 선행연구의 결과를 부분집합으로 포함하는 보다 일반화된 형태이다. 이미 등온 및 등열유속 조건 각각에 대한 해석해가 정교한 모델에 기초한 수치해와 양호하게 일치한다는 사실이 밝혀졌기 때문에^(7,9) 본 연구의 타당성을 별도로 검증할 필요는 없을 것으로 보인다.

해에 영향을 미치는 인자는 \tilde{g} , $\tilde{\rho}$, \tilde{H} , G , Pr , Ste , Bi 등 다수이다. 여기서는 대류가열이 관심의 대상이므로 다른 인자는 이미 보고된 대표적인 조건⁽⁶⁾으로 고정하고, Bi수의 변화에 따른 해의 거동에 초점을 맞추었다. 계산에 사용된 조건은 $\tilde{g}=5.521 \times 10^{11}$, $\tilde{\rho}=1.0$, $\tilde{H}=1.0$, $G=4.0$, $Pr=13.44$ 및 $Ste=0.01266$ 이다. 따라서 F 는 약 1.027×10^{10} 이다.

위의 조건 하에서 식 (13)~(16)으로 표시된 정상상태 근사해의 유효영역을 결정하기 위하여 넓은 범위의 Bi수에 대한 정상해를 Fig. 2에 도시하였다. 예상대로 δ_c 및 \tilde{v}_c 모두 log-log선도 상에서 Bi수의 증가에 따라 선형적으로 증가하다가 일정한 값으로 점근적으로 접근한다. 이 결과로부터 접촉응해의 특성을 3개 영역 즉 등열유속, 천이 및 등온 영역으로 구분할 수 있으며, 경계는 $Bi \approx 10^2$ 과 10^4 이다(그림에서 음영부분은 천이 영역). 등열유속 영역에서 $\log \delta_c$ 및 $\log \tilde{v}_c$ 의

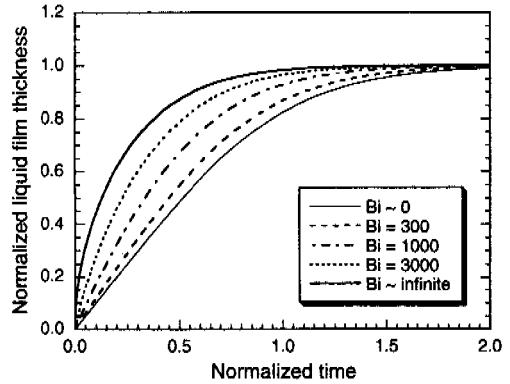


Fig. 3 Evolutions of the normalized liquid film thickness for selected Biot numbers

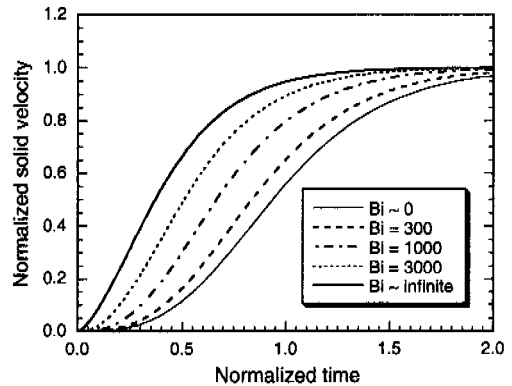


Fig. 4 Evolutions of the normalized solid descending velocity for selected Biot numbers

$\log Bi$ 에 대한 기울기가 각각 1/3 및 1임은 식 (13), (14)와 일치한다.

과도해의 Bi수 의존성을 고찰하기 위하여 Fig. 2에 나타난 정상해의 거동에 근거하여 양극한 및 천이 영역에 속하는 $Bi=300, 1000, 3000$ 등 5개의 경우를 선택하였다. 정규화된 액막두께 및 고체 하강속도의 시간변화에 대한 Bi수의 영향을 각각 Fig. 3과 4에 나타내었다. 두 그림에서 공통적으로 천이 영역의 곡선은 Bi수의 증가에 따라 등열유속 한계에서 등온 한계로 단조적으로 즉 서로 교차하지 않고 접근한다. 등온 한계에 가까울수록 δ_c 및 \tilde{v}_c 는 급격히 증가하여 조기에 정상상태에 도달한다. 실제 접촉응해의 가열조건은 등온이나 등열유속보다는 천이 영역에 속할 것이라는 관점에서 임의의 Bi수에 대한 과도 거동을 해

상한 본 해석해의 의의를 확인할 수 있다. 전술하였듯이, 본 연구는 기본적으로 가열유체의 온도와 열전달계수가 일정하다는 가정 하에 수행되었으나, 이 인자들이 변화하는 경우로도 확장될 수 있다. 유체온도는 Ste수, 열전달계수는 Bi수에만 관계되므로, 정규화를 거치지 않고 무차원 미분방정식 (9)의 해를 구할 때 Ste 및 Bi의 변화형태에 따라 적절한 계단함수로 가정하고 구간적분을 수행함으로써 근사해를 구할 수 있다. 정규화된 모델방정식은 가변적인 인자의 함수인 정상해를 이미 포함하고 있기 때문에 이러한 근사해석에는 오히려 부적합하다.

비정상 접촉용해에 대한 실험에 있어서 액막두께나 고체하강속도보다는 가열면의 온도를 측정하는 것이 비교적 용이하다. 또한 등온보다는 등열유속이나 대류가열이 구현하기 쉽다. 본 연구에 도입된 가정을 만족하는 대류가열의 경우, 가열면 온도만을 측정하여도 식 (27)을 적용하여 Nu수를 비롯한 다른 특성이 파악될 수 있다. Fig. 5는 Fig. 3과 4에 대응하는 벽면온도의 시간변화이다. 등온 한계에서는 자명하고, 등열유속 한계에서는 $\hat{T}_w = \delta$ 임을 재확인할 수 있다. 등열유속 한계로부터 Bi수가 증가함에 따라 \hat{T}_w 은 용해초기에 보다 급격히 상승한 후 조기에 정상상태에 도달한다. 측정된 벽면온도와 다수의 Bi수에 대하여 계산된 $\hat{T}_w(\hat{t})$ 중에서 일치하는 곡선을 선택하여 실험에서의 열전달계수 h_e 를 결정하는 것도 해석해의 중요한 응용이다.

과도해와 같은 맥락에서 정규화된 Nu수의 시간변화를 Fig. 6에 도시하였다. 식 (26)에서 알 수 있듯이 \hat{Nu} 는 등열유속 한계에서는 시간과 관계없이 일정하고, 등온 한계에서는 무한대로부터 또한 천이 영역의 Bi수에서는 유한한 초기값 즉 $1+B$ 로부터 감소하면서 1로 접근한다. 특징적인 점은 Fig. 3~5에서는 각 Bi수에 대한 곡선이 서로 교차하지 않았음에 비하여 Fig. 6에서는 교차하는 것이다. 예를 들어, Bi=3000에 대한 \hat{Nu} 가 등온에 대한 \hat{Nu} 보다 $\hat{t} > 0.15$ 에서 큰 값을 보인다. 이러한 거동은 각 Nu수의 정상상태에 대한 상대적인 크기일 뿐 절대적인 열전달률과는 무관하며, Bi수가 작을수록 비정상 상태가 정규화된 시간 기준으로 오래 지속되는 데 기인한다(Fig. 2 참조).

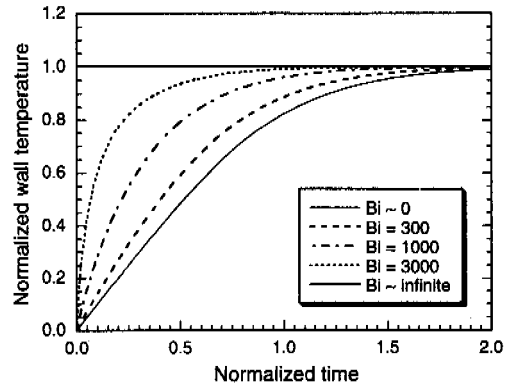


Fig. 5 Evolutions of the normalized wall temperature for selected Biot numbers

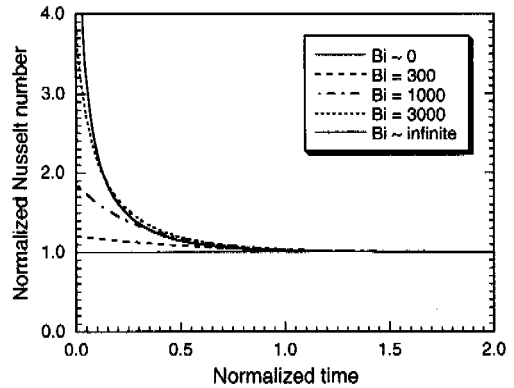


Fig. 6 Evolutions of the normalized Nusselt number for selected Biot numbers

비정상 접촉용해의 열전달특성을 보다 잘 이해하기 위하여

$$\langle \hat{Nu} \rangle = \frac{1}{\hat{t}_u} \int_0^{\hat{t}_u} \hat{Nu} \, d\hat{t} \quad (28)$$

로 정의되는 평균 Nu수의 Bi수에 따른 변화를 Fig. 7에 도시하였다. 여기서 비정상 기간 \hat{t}_u 는 정의에 따라 상이한 값이 될 수 있으나,⁽¹⁰⁾ Fig. 3과 6을 참조하여 본 연구에서는 $\hat{t}_u = 2.0$ 을 사용하였다. 마치 대류가열에 의한 덕트 내의 총류열 전달에서와 같이⁽¹²⁾ Bi수가 감소하면 등열유속 한계로, Bi수가 증가하면 등온 한계로 각각 점근적으로 접근하며, 천이 영역에서는 급격히 변화한다. 양극한에서의 거동은 식 (26)에서 $Bi \rightarrow 0$ 이면

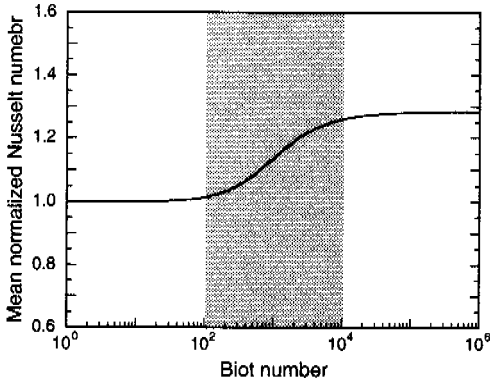


Fig. 7 Mean normalized Nusselt number as a function of the Biot number

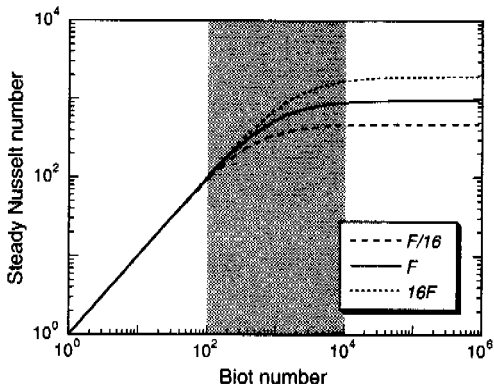


Fig. 8 Steady Nusselt number as a function of the Biot number

자명하게 $\langle \hat{Nu} \rangle = 1$ 이고, $Bi \rightarrow \infty$ 이면 식 (23)으로부터

$$\langle \hat{Nu} \rangle = \frac{1}{\hat{t}_u} \int_0^{\hat{t}_u} \coth^{1/2}(2\hat{t}) d\hat{t} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{\hat{t}_u} \right) \quad (29)$$

인 사실과 부합된다. 극한값은 부여된 조건과 무관하게 상수임을 주지하기 바란다.

지금까지의 고찰은 접촉력(F)이 고정된 경우에 국한되었다. 마지막으로, 정상해의 거동에 따라 구분된 3개 특성 영역의 경계에 미치는 접촉력의 영향을 조사하기 위하여 전술한 F 와 $F/16$ 및 $16F$ 3가지 값에 대하여 정상상태 Nu 수의 Bi 수 의존성을 계산한 결과가 Fig. 8이다. 여기서 배수 16은 물리적으로 의미있는 범위 내에서 식 (16)에 나타난 인자 $F^{1/4}$ 의 결과를 쉽게 가시화하

기 위함이다. 식 (8)과 (25)로부터 \hat{V}_c 와 Nu_c 사이에는

$$Nu_c = \hat{V}_c / (\hat{\rho} Ste) \quad (30)$$

인 관계가 성립하므로 양자의 거동은 당연히 일치하며, 따라서 F 의 영향은 Nu_c 를 통해서도 분석될 수 있다. 비교적 광범위한 접촉력에 대하여 음영으로 표시된 천이 영역의 경계가 되는 Bi 수는 거의 불변이다. 등열유속 영역에서 Nu_c 는 식 (14)에서 자명하듯이 F 와 무관하고, 등온 영역에서는 예상대로 2배수의 차이를 보인다. 결과적으로 대류가열에 의한 접촉용해에 있어서 접촉력이 극히 크거나 작지 않는 한 $Bi \leq 10^2$ 이면 등열유속 해에, $Bi \geq 10^4$ 이면 등온해에 의존하여도 큰 오차를 수반하지는 않을 것으로 판단된다.

5. 결론

대류가열 경계조건에 대한 비정상 접촉용해의 해석해를 추기한 본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

무차원화된 모델방정식은 Bi 수의 극한거동을 불완전하게 반영하지만, 정상해를 기준하여 정규화된 모델방정식은 등온 및 등열유속 한계를 포괄하는 일반화된 형태이다. 정규화된 모델방정식에 대하여 기존의 해를 부분집합으로 포함하는 간결한 해석해를 성공적으로 유도하였다.

정상해의 거동에 근거하여 대류가열 접촉용해의 특성을 등열유속($Bi < 10^2$), 천이($10^2 \leq Bi \leq 10^4$) 및 등온($10^4 < Bi$) 3개의 영역으로 구분할 수 있다. 이때 각 영역의 경계가 되는 Bi 수는 접촉력에 거의 무관하다.

천이 영역의 Bi 수에 대응하는 과도해는 등열유속해 및 등온해의 중간 거동을 보인다. 또한 본 해석방법을 확장하면 가열유체의 온도 및 열전달 계수가 변화하는 경우에 대한 근사해도 구할 수 있다. 비정상 과정동안 평균 Nu 수는 Bi 수의 양극한에서 부여된 조건과 무관하게 각각 일정한 값으로 점근적으로 접근한다.

과도해와 벽면온도 변화의 관계를 이용하면 비정상 접촉용해의 실험에서 측정된 온도만으로도 시스템의 특성을 쉽게 파악할 수 있을 뿐만 아니라 열전달계수를 간접적으로 결정할 수도 있다.

참고문헌

- (1) Moallemi, M. K., Webb, B. W., and Viskanta, R., 1986, "An Experimental and Analytical Study of Close-Contact Melting," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 894~899.
- (2) Bejan, A., 1994, "Contact Melting Heat Transfer and Lubrication," *Adv. Heat Transfer*, Vol. 24, pp. 1~38.
- (3) Bejan, A., 1989, "The Fundamentals of Sliding Contact Melting and Friction," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 111, pp. 13~20.
- (4) Fowler, A. J. and Bejan, A., 1993, "Contact Melting during Sliding on Ice," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 1171~1179.
- (5) Colback, S. C., Najarian, L., and Smith, H. B., 1997, "Sliding Temperature of Ice Skates," *American J. Physics*, Vol. 65, pp. 488~492.
- (6) Hong, H. and Saito, A., 1993, "Numerical Method for Direct Contact Melting in Transient Process," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2093~2103.
- (7) 유호선, 1997, "등온가열에 의한 접촉용해의 초기 과도과정에 대한 근사적 해석해," 대한기계학회논문집(B), 제21권 제12호, pp. 1710~1719.
- (8) Saito, A., Kumano, H., Okawa, S. and Yamashita, K., 1996, "Analytical Study on Transient Direct Contact Melting Phenomena," *Trans. of the JAR*, Vol. 13, pp. 97~108 (in Japanese).
- (9) 유호선, 1998, "등열유속에 의한 평판 위 비정상 접촉용해에 대한 근사적 해석해," 대한기계학회논문집(B), 제22권 제12호, pp. 1726~1734.
- (10) 유호선, 1999, "열전도가 주도적인 삼차원 접촉용해에 대한 비정상 해석," 대한기계학회논문집(B), 제23권 제8호, pp. 945~956.
- (11) Sparrow, E. M. and Patankar, S. V., 1977, "Relationship among Boundary Conditions and Nusselt Numbers for Thermally Developed Duct Flows," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 99, pp. 483~485.
- (12) Bejan, A., 1995, *Convection Heat Transfer*, 2nd Edn., Wiley, New York, pp. 118~121.
- (13) Taghavi, K., 1990, "Analysis of Direct-Contact Melting Under Rotation," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 137~143.
- (14) Yoo, H., Hong, H., and Kim, C. -J., 1998, "Effects of Transverse Convection and Solid-Liquid Density Difference on the Steady Close-Contact Melting," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 19, pp. 368~373.