퍼지집합을 이용한 퍼지숫자의 순위 결정 방법
(A Fuzzy Set based Method for Determining the Ranks of Fuzzy Numbers)

이 지 형 † 이 광 형 ††
(Jee-Hyong Lee) (Hyung Lee-Kwang)

요 약 퍼지숫자는 보통숫자와는 달리 애매모호한 값을 표현하기 때문에, 어느 퍼지숫자가 다른 퍼지숫자보다 큰지 작은지를 명확히 기술하기 어렵다. 따라서, 주어진 퍼지숫자의 집합 내에서, 어느 퍼지숫자가 몇 번째로 큰지, 또는 k번째로 큰 퍼지숫자가 어느 것인지 역시 애매모호할 수밖에 없다. 본 논문에서는 퍼지숫자의 순위와 k번째로 큰 퍼지숫자를 결정하기 위하여 퍼지집합을 이용하는 방법을 제안한다. 제안하는 방법은 퍼지숫자들 사이에 퍼지대소관계가 주어졌다고 가정하며, 이를 이용하여 퍼지숫자의 순위와 k번째 큰 퍼지숫자를 결정한다. 제안하는 방법은 어느 한 퍼지숫자가 취할 수 있는 모든 순위를 퍼지집합으로 표현하며, k번째로 큰 퍼지숫자가 될 수 있는 모든 퍼지숫자들을 퍼지집합으로 표현한다.

Abstract Fuzzy numbers represent fuzzy numeric values. However, it is difficult to clearly determine whether one fuzzy number is larger or smaller than other fuzzy numbers. Thus it is also difficult to determine the rank which a fuzzy number takes, or to select the k-th largest fuzzy number in a given set of fuzzy numbers. In this paper, we propose a fuzzy set based method to determine the rank of a fuzzy number and the k-th largest fuzzy number. The proposed method uses a given fuzzy greater-than relation which is defined on a set of fuzzy numbers. Our method describes the rank of a fuzzy number with a fuzzy set of ranks that the fuzzy number can take, and the k-th largest fuzzy number with a fuzzy set of fuzzy numbers which can be k-th ranked.

1. 서 론

퍼지숫자는 퍼지이론의 한 분야로, 애매모호한 값을 퍼지집합으로 표현한다. 보통숫자와 마찬가지로 퍼지숫자를 다루기 위한 많은 방법이 제안되었는데, 그 중에는 산술연산, 대소비교연산, 퍼지숫자의 정렬 등이 있다[1]. 본 논문에서는 주어진 퍼지숫자의 집합에서 어느 퍼지숫자가 차지하는 순위와 그 집합 내에서 k번째로 큰 퍼지숫자를 결정하는 방법을 다룬다.

그러나 이러한 것들은 기존의 연구에서 많이 다루어지지 않았는데, 그 이유는 이러한 것들은 퍼지숫자 정렬방법[2-16]을 이용하여 결정될 수도 있기 때문이다. 예를들어, 주어진 퍼지숫자의 집합에서 어느 퍼지숫자의 순위를 얻고자 한다면, 우선 기존의 퍼지숫자 정렬방법으로 퍼지숫자들을 정렬한 후 해당 퍼지숫자가 몇 번째에 놓여 있는가를 확인하면 될 것이다. 마찬가지로 k번째로 큰 퍼지숫자를 얻고자 한다면, 퍼지숫자들을 정렬한 후 k번째에 어떤 퍼지숫자가 놓여 있는가를 확인하면 될 것이다. 그러나, 이 경우 퍼지숫자의 순위로는 하나의 숫자가, k번째 큰 퍼지숫자로는 하나의 퍼지숫자만이 선택되어진다.

그러나 퍼지숫자는 애매모호한 값을 표현하고 있기 때문에 퍼지숫자의 순위나 k번째로 큰 퍼지숫자를 하나의 숫자나 하나의 퍼지숫자만을 선택하므로써는 정확히 기술하기 어렵다. 예를 들면, 그림 1과 같이 4개의 퍼지숫자가 주어졌을 때, f_3는 f_1과는 겹쳐있지 않으나, f_2와 f_4와는 겹쳐있다. 따라서, f_3는 f_1보다 명확히 작다고 할 수 있으나, f_2또는 f_4보다 큰지 작은지 명확하지 않다. 즉, f_3는 f_2나 f_4보다 크다고도 할 수 있으며, 작다고도

· 본 연구는 첨단정보기술 연구센터를 통하여 과학재단의 지원을 받았습니다.
† 비 회 원 : 한국과학기술원 전자전산학과
leejh@fuzzy.kaist.ac.kr
†† 종신회원 : 한국과학기술원 전자전산학과 교수
khlee@fuzzy.kaist.ac.kr
논문접수 : 1999년 3월 4일
심사완료 : 2000년 5월 2일

할 수 있다. 그러므로 f_3가 f_2와 f_4보다 작을 가능성을 생각하면, f_3의 순위는 4가 되고, f_2보다는 작고, f_4보다 클 가능성을 생각하면 3이며, f_2나 f_4보다 모두 클 가능성을 고려하면 2가 된다. 따라서, f_3의 순위는 2, 3, 4라고 해야 f_3의 순위를 잘 표현할 수 있을 것이다.

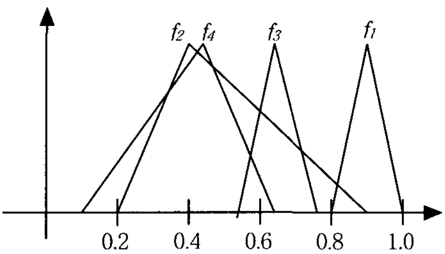


그림 1 4개의 퍼지숫자

또한 이와 유사하게 그림 1에서 세 번째로 큰 퍼지숫자는 어느 것일까? 단순히 하나의 퍼지숫자만을 선택할 수 있을까? 여기에서도 퍼지숫자가 표현하는 애매모호함과 퍼지숫자 사이의 겹침을 고려한다면, 세 번째로 큰 퍼지숫자가 무엇인지 명확하지 않다. 따라서 하나의 퍼지숫자 대신 세 번째로 클 가능성이 있는 퍼지숫자를 모두 선택해야 적절하다.

위의 예에서 알 수 있듯이, 퍼지숫자의 순위나, k번째 큰 퍼지숫자를 기술하기 위해서는 보통값이나, 원소가 하나인 보통집합으로는 부적절하다는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해서, 퍼지숫자의 순위를 퍼지집합으로 표현하는 방법과 k번째 큰 퍼지숫자를 퍼지집합으로 표현하는 방법을 제안한다. 제안하는 방법은 각 퍼지숫자의 사이에 대소관계(또는 선호도관계)가 주어졌다고 가정하며, 이를 이용하여 퍼지숫자의 순위와 k번째 큰 퍼지숫자를 결정한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 퍼지숫자의 순위와 k번째 큰 퍼지숫자의 퍼지집합의 정의에서 사용될 순위확신도에 대해서 정의하며, 3절에서는 본 논문에서 제안하는 퍼지숫자의 순위의 퍼지집합과 k번째 큰 퍼지숫자의 퍼지집합을 정의하고, 4절에서는 예제를 보이며, 5절에서 본 논문의 결론을 맺는다.

2. 순위확신도

본 절에서는 퍼지숫자의 순위의 퍼지집합과 k번째 큰 퍼지숫자의 퍼지집합을 정의하기 위하여 사용되는 순위확신도를 정의한다. 본 논문에서 제안하는 방법은 주어진 대소관계를 이용하므로, 먼저 본 논문에서 가정하는 대소관계에 대해서 간단히 설명한다.

본 논문에서 가정하는 대소관계는 다음과 같다. 대소관계 R은 주어진 퍼지숫자의 집합 $F=\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$에 대해, $F \times F$에 정의된 퍼지관계이다. 또한 (f_i, f_j)가 R에 속하는 정도인 $\mu_R(f_i, f_j)$(또는 R_{ij})는 f_i와 f_j 두 개를 고려했을 때 f_i가 f_j보다 크다고 생각되는 정도를 나타낸다. 즉, $R_{ij}=1$인 경우는 f_i가 f_j보다 명확히 크다는 것을 의미하며, $R_{ij}=0$인 경우는 f_i가 f_j보다 명확히 작다는 것을 나타낸다. 또한 $0 < R_{ij} < 1$ 인 경우는 f_i와 f_j의 대소를 명확히 말할 수 없는 경우이지만, 그 값이 클수록 f_i가 f_j보다 클 가능성이 높다는 것을 나타낸다. 본 논문에서 가정하는 대소관계는 이러한 것 이외에 어떠한 조건도 만족시킬 필요가 없다. 그 이유는 주어진 퍼지관계 R이 위와 같은 의미를 갖는다면, 그것은 비대칭(asymmetry) 또는 반대칭(anti-symmetry) 이거나 이행(transitivity) 관계가 아닐 수 있기 때문이다. 우선 일반적으로 두 퍼지숫자 사이의 대소관계(또는 선호도 관계)는 이행관계가 아닐 수 있으며[8], 어떤 두 퍼지숫자 f_i와 f_j에 대하여 f_i가 f_j보다 큰 정도가 f_j가 f_i보다 큰 정도와 같을 수도 있기 때문에(즉, $R_{ij}=R_{ji}$) 일반적으로 비대칭일 필요도 없다. 또한 모든 두 퍼지숫자 f_i와 f_j에 대하여 $R_{ij}=R_{ji}$가 만족될 수도 있기 때문에 (즉, R은 대칭관계) 반대칭일 필요도 없다. 즉, 본 논문에서는 어떤 주어진 관계가 특정 조건을 만족하지 않더라도, 그것이 두 퍼지숫자 사이의 대소관계를 나타내면, 그것을 이용하여 퍼지숫자의 순위와 k번째 큰 퍼지숫자를 결정하는 방법을 제안한다.

먼저 퍼지숫자의 순위와 k번째 큰 퍼지숫자의 퍼지집합의 정의에 사용되는, 순위확신도를 정의하도록 한다.

정의 1. 퍼지숫자의 집합 $F=\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$가 있고, 대소관계 $R: F \times F \rightarrow [0,1]$ 이 주어졌을 때, 퍼지숫자 f_i가 F내에서 k번째 순위가 될 순위확신도 $C_F(f_i, k)$는 다음과 같이 정의된다.

$$C_F(f_i, k) = \max_{\forall S_i^k} \min\{R_{j_1 i}, R_{j_2 i}, \cdots, R_{j_{k-1} i}, R_{i j_{k+1}}, \cdots, R_{i j_n}\}$$

단 $S_i^k = f_{j_1}, f_{j_2}, \cdots, f_{j_{k-1}}, f_i, f_{j_{k+1}}, \cdots, f_{j_n}$ ($\{j_1, j_2, \cdots, j_{k-1}, j_{k+1}, \cdots, j_n\} = \{1, 2, \cdots, n\} - \{i\}$)는 F의 모든 원소로 이루어진, 퍼지숫자 f_i가 k번째 놓인 수열이다. 그리고, $\min\{R_{j_1 i}, R_{j_2 i}, \cdots, R_{j_{k-1} i}, R_{i j_{k+1}}, \cdots, R_{i j_n}\}$을 편의상 수열 S_i^k내에서 퍼지숫자 f_i의 지역순위확신도라 하고 간단히 $LC(S_i^k, f_i)$로 나타내기로 한다.

지역순위확신도 $LC(S_i^k, f_i)$는 f_i가 S_i^k와 같은 순서로

놓여 k번째로 클 가능성을 나타낸다. 다시 말하면, $S_i^k = f_{j_1}, f_{j_2}, \cdots, f_{j_{k-1}}, f_i, f_{j_{k+1}}, \cdots, f_{j_n}$라 할 때 f_i가 $f_{j_1}, f_{j_2}, \cdots, f_{j_{k-1}}$의 ($k$-1)개 퍼지숫자보다 작고, $f_{j_{k+1}}, \cdots, f_{j_n}$의 ($n$-$k$)의 퍼지숫자보다는 클 가능성을 의미한다. 따라서 f_i보다 명확히 작은 퍼지숫자가 수열 S_i^k에서 f_i보다 앞에 놓이거나, 명확히 큰 것이 f_i보다 뒤에 놓이면, $LC(S_i^k, f_i) = 0$이 된다. 또한 f_i보다 명확히 큰 모든 숫자가 f_i의 앞에 놓이고, f_i보다 명확히 작은 숫자가 모두 f_i뒤에 놓이면, $LC(S_i^k, f_i) = 1$이 된다. 그러므로, 보통숫자의 경우, 두 숫자 사이의 비교가 명확하므로, 지역순위확신도는 0또는 1만을 갖게 된다.

정의 1에서 정의된 순위확신도 $C_F(f_i, k)$는 f_i가 F 내에서 k번째로 크다고 할 수 있는 모든 가능성을 고려한다. 즉, F의 원소로 이루어진 수열중 퍼지숫자 f_i가 k 번째 놓인 모든 것에 대하여 각각의 지역순위확신도를 구하고, 그 중 최대값을 $C_F(f_i, k)$로 한다.

표 1 4개의 퍼지숫자 사이의 대소 관계

x \ y	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	0.500	0.998	1.000	1.000
f_2	0.002	0.500	0.183	0.681
f_3	0.000	0.817	0.500	0.992
f_4	0.000	0.319	0.008	0.500

예를 들어, 그림 1에서 $C_F(f_2, 3)$를 구해보자. 우선 그림 1의 퍼지숫자 $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$에 대하여 대소관계가 필요하므로, 만족함수[16,17]를 적용하여 표 1과 같은 대소관계를 얻는다. 본 논문에서는 대소관계를 구하기 위하여 만족함수를 사용하였으나, 그 이외의 다른 방법을 사용해도 된다. 만족함수는 두 퍼지숫자의 대소관계를 [0,1]사이의 실수값으로 표현하는 것으로 다음과 같이 정의된다.

$$S(f_i < f_j) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} \mu_{f_i}(x) \odot \mu_{f_j}(y)\,dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{f_i}(x) \odot \mu_{f_j}(y)\,dx\,dy}$$

$$S(f_i > f_j) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty} \mu_{f_i}(x) \odot \mu_{f_j}(y)\,dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{f_i}(x) \odot \mu_{f_j}(y)\,dx\,dy}.$$

식에서 연산자 $\odot$은 임의의 T-norm 연산자이다. $S(f_i < f_j)$는 퍼지숫자 f_i가 퍼지숫자 f_j보다 작을 가능성을 나타내며, 이와 마찬가지로 $S(f_i > f_j)$는 f_i가 f_j보다 클 가능성을 나타낸다. 이러한 만족함수는 $R_{ij} + R_{ji} = 1$인 성질은 있으나, 일반적으로 이행조건이나 반대칭 또는 비대칭 조건은 만족하지 않는다. 만족함수는 두 퍼지숫자가 겹치지 않아서, 그 대소관계가 명확한 경우에는 두 퍼지숫자의 대소를 0 또는 1로 표현하고, 겹치는 경우에는 어느 퍼지숫자가 다른 것보다 어느 정도 큰가를 0과 1사이의 실수로 표현한다.

표 1은 퍼지숫자 x가 y보다 클 가능성을 나타내는 것으로, 예를 들면 f_1이 f_2보다 클 가능성은 $R_{12} = 0.998$이며, f_1이 f_3보다 클 가능성은 $R_{13} = 1.000$이다. 이때 표 1을 이용하여 $C_F(f_2, 3)$의 값을 구하면 다음과 같다. 우선 $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$로 이루어진 수열 중 f_2가 3번째에 놓이는 것을 모두 구하면, 다음과 같이 6개가 있으며, 각각 f_2의 지역순위확신도 $LC(S_2^3, f_2)$를 구하면 다음과 같다.

f_1, f_3, f_2, f_4 :
$\min\{R_{12}, R_{32}, R_{24}\} = \min\{0.998, 0.817, 0.681\} = 0.681$
f_1, f_4, f_2, f_3 :
$\min\{R_{12}, R_{42}, R_{23}\} = \min\{0.998, 0.319, 0.183\} = 0.183$
f_3, f_1, f_2, f_4 :
$\min\{R_{32}, R_{12}, R_{24}\} = \min\{0.817, 0.998, 0.681\} = 0.681$
f_3, f_4, f_2, f_1 :
$\min\{R_{32}, R_{42}, R_{21}\} = \min\{0.817, 0.319, 0.002\} = 0.002$
f_4, f_1, f_2, f_3 :
$\min\{R_{42}, R_{12}, R_{23}\} = \min\{0.319, 0.998, 0.183\} = 0.183$
f_4, f_3, f_2, f_1 :
$\min\{R_{42}, R_{32}, R_{21}\} = \min\{0.319, 0.817, 0.002\} = 0.002$

따라서, 퍼지숫자 f_2가 3번째 순위가 될 확신도 $C_F(f_2, 3)$는 다음과 같다.

$$C_F(f_2, 3) = \max\{0.681, 0.183, 0.681, 0.002, 0.183, 0.002\} = 0.681$$

위의 정의에 의하면 어느 퍼지숫자 f의 지역순위확신도를 구하기 위해서는 F에서 f를 제외한 나머지 퍼지숫자의 가능한 모든 수열을 구하여야 한다. 따라서, F내에 n개의 퍼지숫자가 있다면, 모두 $(n-1)!$개의 수열을 조사하여야 하므로, 시간 복잡도가 매우 높을 수 있다. 그러나, 다음과 같이 낮은 시간 복잡도를 갖는 알고리즘이 존재한다. 그림 2는 n개의 퍼지숫자를 포함하는

집합 F가 주어졌을 때 $f_i \in F$에 대하여 $C_F(f_i, k)$를 구하는 알고리즘이다. 이 방법은, 집합을 1차원 배열(array)로 구현하면 $O(n\log n)$의 시간 복잡도를 갖는다.

```
S={R_kl | l=1,…,n and l≠i}
I={R_lk | l=1,…,n and l≠i}
U= S∪I
Do
  R_lm = select the minimum in U
  delete R_lm from U and from its source, S or I
Until ( |S|<k-1 or |I|<n-k or ( R_ml∉S and R_ml∉I) )
The lately deleted R_lm is C_F(f_i, k)
```

그림 2 순위확신도를 구하는 방법

위의 방법에 따라서 표 1에서 $C_F(f_2, 3)$를 구하는 과정을 Do-Until문의 실행횟수에 따라 살펴보면 다음과 같다.

초기값 : $S=\{R_{12}, R_{32}, R_{42}\}$ $I=\{R_{21}, R_{23}, R_{24}\}$

1번째실행후 : $S=\{R_{12}, R_{32}, R_{42}\}$ $I=\{R_{23}, R_{24}\}$

2번째실행후 : $S=\{R_{12}, R_{32}, R_{42}\}$ $I=\{R_{24}\}$

3번째실행후 : $S=\{R_{12}, R_{32}\}$ $I=\{R_{24}\}$

4번째실행후 : $S=\{R_{12}, R_{32}\}$ $I=\{\}$

초기값이 $S=\{R_{12}, R_{32}, R_{42}\}$, $I=\{R_{21}, R_{23}, R_{24}\}$이므로, Do-Until을 처음 실행하면 $U=\{R_{12}, R_{32}, R_{42}, R_{21}, R_{23}, R_{24}\}$이 되고 여기에서 최소값은 R_{21}이다. 그리고 이것은 I에서 왔으므로, R_{21}을 I에서 지운다. 두 번째 실행에서는 $S=\{R_{12}, R_{32}, R_{42}\}$이고 $I=\{R_{23}, R_{24}\}$이므로, $U=S\cup I$에서 최소값은 R_{23}이고, 이것은 I에서 왔으므로, 이것을 지우면 $I=\{R_{24}\}$ 된다. 이러한 방식으로, 네 번째 실행후에는 $S=\{R_{12}, R_{32}\}$, $I=\{\}$가 되어, $|I|=0<4-3$가 만족되므로 Do-Until을 끝내게 된다. 이때, 최종적으로 지워진 $R_{24}=0.681$이 $C_F(f_2, 3)$가 된다. 그림 2의 방법이 순위확신도 $C_F(f_i, k)$을 구함에 대한 증명은 부록에 첨부하였다.

3. 퍼지숫자의 순위와 k번째 큰 퍼지숫자

이 절에서는 2절에서 정의한 순위확신도를 이용하여 퍼지숫자의 순위와 k번째 큰 퍼지숫자의 퍼지집합을 정의한다.

정의 2. 퍼지숫자의 집합 $F=\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$가 주어졌을 때, F에서 퍼지숫자 f_i가 차지하는 순위의 퍼지집합 $\tilde{R}_F(f_i)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{R}_F(f_i)=\{(k, \mu_{\tilde{R}_F(f_i)}(k)) \mid \mu_{\tilde{R}_F(f_i)}(k)=C_F(f_i, k), k=1,\cdots,n\}$$

$\tilde{R}_F(f_i)$는 퍼지숫자 f_i가 주어진 퍼지숫자의 집합 내에서 몇 번째로 큰 수인가를 퍼지집합으로 나타낸다. 보통숫자의 경우에는 주어진 집합 내에서 몇 번째로 큰 것인가가 명확하지만, 퍼지숫자의 경우는 그렇지 않다. 따라서 퍼지숫자의 순위는 퍼지숫자가 차지할 수 있는 여러 순위와 그 순위를 차지할 가능성을 모두 표현할 필요가 있다. 정의 2의 $\tilde{R}_F(f_i)$는 f_i가 F내에서 취할 수 있는 순위와 그 순위를 취할 수 있는 가능성을 기술하므로써, 퍼지숫자 순위의 애매모호함을 표현하였다. $\mu_{\tilde{R}_F(f_i)}(k)$는 퍼지숫자 f_i의 순위가 k일 가능성을 나타내며, 그 값은 순위확신도 $C_F(f_i, k)$로 정의된다.

예를 들어, 표 1과 같이 선호도 관계가 주어진 $F=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$에 대하여 각 퍼지숫자가 취할 수 있는 순위의 퍼지집합을 구하면 다음과 같다.

$\tilde{R}_F(f_1)$ = { (1, 0.998), (2, 0.002), (3, 0.000), (4, 0.000) }

$\tilde{R}_F(f_2)$ = { (1, 0.002), (2, 0.183), (3, 0.681), (4, 0.319) }

$\tilde{R}_F(f_3)$ = { (1, 0.000), (2, 0.817), (3, 0.183), (4, 0.008) }

$\tilde{R}_F(f_4)$ = { (1, 0.000), (2, 0.008), (3, 0.319), (4, 0.681) }

위의 퍼지집합에 의하면, f_1은 F중에서 가장 클 가능성은 0.998이고, 두 번째로 클 가능성은 0.002이며, 그 외의 순위가 될 가능성은 0이다. 또한 f_4의 경우에는 이것이 제일 큰 숫자일 가능성은 0이며, 두 번째로 큰 숫자일 가능성은 0.008이고, 세 번째로 큰 숫자일 가능성은 0.319이며, 가장 작은 숫자일 가능성은 0.681인 것이다. 이 결과를 그림 1과 비교하면 각 퍼지숫자의 순위를 잘 기술하고 있음을 알 수 있다.

정의 3. 퍼지숫자의 집합 $F=\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$가 주어졌을 때, L에서 k번째로 큰 퍼지숫자의 퍼지집합 $\tilde{L}_F(k)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{L}_F(k)=\{(f_i, \mu_{\tilde{L}_F(k)}(f_i)) \mid \mu_{\tilde{L}_F(k)}(f_i)=C_F(f_i, k), k=1,\cdots,n\}$$

$\tilde{L}_F(k)$는 퍼지숫자의 집합 F에서, k번째로 큰 퍼지숫자의 퍼지집합이다. 그리고, 어느 퍼지숫자 f가 $\tilde{L}_F(k)$에 속하는 소속도 $\mu_{\tilde{L}_F(k)}(f)$는, 그것이 k번째일 확신도

로 해석될 수 있다. 예를 들어 표 1과 같이 선호도 관계가 주어진 $F=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$에 대하여 k번째로 큰 퍼지숫자의 퍼지집합을 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{F}_F(1) = \{(f_1, 0.998), (f_2, 0.002), (f_3, 0.000), (f_4, 0.000)\}$$

$$\tilde{F}_F(2) = \{(f_1, 0.002), (f_2, 0.183), (f_3, 0.817), (f_4, 0.008)\}$$

$$\tilde{F}_F(3) = \{(f_1, 0.000), (f_2, 0.681), (f_3, 0.183), (f_4, 0.319)\}$$

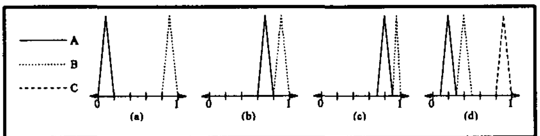
$$\tilde{F}_F(4) = \{(f_1, 0.000), (f_2, 0.319), (f_3, 0.008), (f_4, 0.681)\}$$

즉, F에서 제일 크다고 생각되는 퍼지숫자의 퍼지집합에 f_1은 0.998정도로 포함되며, f_2는 0.002로 f_3와 f_4는 0의 가능성으로 포함된다. 또한 네 개의 모든 퍼지숫자가 두 번째로 크다고 할 수 있는데, 이것들의 확신도는 각각 0.002, 0.183, 0.817, 0.008이다.

4. 예 제

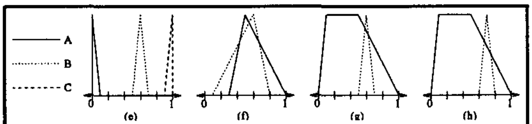
제안하는 순위결정방법이 다른 여러 애매한 경우에 대하여 어떤 결과를 보이는지를 알아보기 위해, 제안하는 방법을 표 2~표 6과 같이 20가지 경우에 대하여 적용하였다. 여기에서 사용된 20가지 경우는 Bortolan[6]이 퍼지숫자 정렬방법을 평가하기 위하여 사용한 것이지만, 본 논문에서는 제안하는 순위 결정방법을 평가하기 위해서 사용하였다. 이들 경우에서 각 퍼지숫자의 순위를 결정하기 위해 2절에서 사용한 만족함수를 사용하여 대소관계를 구했다.

표 2 퍼지순위 예제(1)



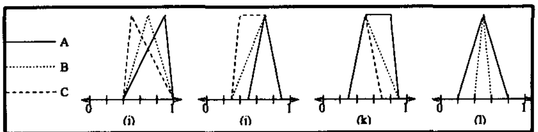
순위	(a)		(b)		(c)		(d)		
	A	B	A	B	A	B	A	B	C
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	0	1	0	0	1	0
3	-	-	-	-	-	-	1	0	0

표 3 퍼지순위 예제 (2)



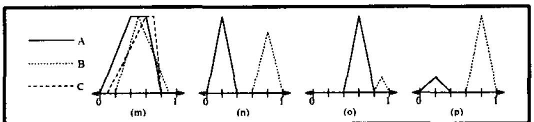
순위	(e)			(f)		(g)		(h)	
	A	B	C	A	B	A	B	A	B
1	0	0	1	0.66	0.34	0.23	0.77	0.13	0.87
2	0	1	0	0.34	0.66	0.77	0.23	0.87	0.13
3	1	0	0	-	-	-	-	-	-

표 4 퍼지순위 예제(3)



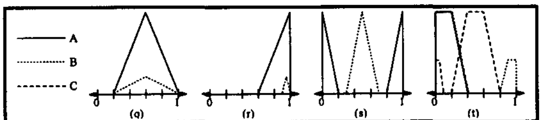
순위	(i)			(j)			(k)			(l)	
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B
1	0.65	0.35	0.24	0.65	0.35	0.24	0.62	0.38	0.24	0.50	0.50
2	0.35	0.65	0.35	0.35	0.62	0.38	0.38	0.62	0.35	0.50	0.50
3	0.24	0.35	0.65	0.24	0.38	0.62	0.24	0.38	0.65	-	-

표 5 퍼지순위 예제(4)



순위	(m)			(n)		(o)		(p)	
	A	B	C	A	B	A	B	A	B
1	0.35	0.50	0.50	0	1	0	1	0	1
2	0.36	0.64	0.50	1	0	1	0	1	0
3	0.64	0.35	0.36	-	-	-	-	-	-

표 6 퍼지순위 예제(5)



순위	(q)		(r)		(s)		(t)		
	A	B	A	B	A	B	A	B	C
1	0.50	0.50	0.33	0.77	0.50	0.50	0.07	0.23	0.77
2	0.50	0.50	0.77	0.33	0.50	0.50	0.42	0.58	0.23
3	-	-	-	-	-	-	0.58	0.42	0.07

표 2~표 6은 각 퍼지숫자가 취할 수 있는 모든 순위의 가능성을 보여준다. 예를 들면, 표 4의 (i)의 경우에서 A의 순위가 1일 가능성 $\mu_{\tilde{R}_{\{A,B,C\}}(1)}(A)=0.65$이며, 순위가 2일 가능성 $\mu_{\tilde{R}_{\{A,B,C\}}(2)}(A)=0.35$이고, 순위가 3일

가능성 $\mu_{\tilde{R}_{\{A,B,C\}}(3)}(A)=0.24$이다.

표 2~표 6에서 알 수 있듯이 퍼지숫자가 서로 겹치지 않아서, 그 대소관계가 명확한 경우는 퍼지숫자가 차지할 수 있는 순위 역시 명확하게 결정되었음을 알 수 있다. 예를 들면, 표 2의 (d)에서 A의 순위가 1 또는 2일 가능성은 0이고, 3일 가능성은 1이다. 즉, 그림에서 알 수 있듯이, A는 세 개중에서 제일 작다는 것이 명확하므로, A가 차지할 수 있는 순위는 3으로 명확하게 기술된 것이다. 그러나 퍼지숫자들이 겹쳐 있어서, 대소관계가 명확하지 않은 경우에는 각 퍼지숫자가 취할 수 있는 순위가 퍼지집합으로 결정됨을 알 수 있다. 표 4의 (m)경우에서는 세 퍼지숫자들이 서로 겹쳐 있어 그 대소관계를 명확하게 파악하기 어렵다. 따라서, 각 퍼지숫자가 취할 수 있는 순위 역시 명확하지 않다. 즉, A는 0.35의 가능성으로 순위 1을, 0.36의 가능성으로 순위 2를, 0.64의 가능성으로 순위 3을 취할 수 있고, B는 0.36, 0.64, 0.50의 가능성으로 C는 0.64, 0.35, 0.36의 가능성으로 각 순위를 모두 취할 수 있다. 이러한 예제로부터, 본 논문에서 제안한 방법은 퍼지숫자의 대소관계가 명확하지 않아서 생기는 퍼지숫자의 순위의 애매모호함을 퍼지집합으로 잘 표현하고 있음을 알 수 있다.

그러나, 만약 이들 경우에 기존의 퍼지숫자 정렬방법을 이용하여 순위를 구하면, 이러한 순위의 애매모호함이 표현되지 못한다. 정렬을 이용한 순위결정방법은 보통숫자의 순위결정과 유사하다. 먼저 주어진 퍼지숫자를 크기 순으로 정렬하여 하나의 수열을 얻고, 그것으로부터 어느 퍼지숫자가 어떤 순위를 차지하는가를 결정하는 것이다. 예를 들어, 표 4의 (m)경우에 사용된 세 퍼지숫자를 [16]에서 제안한 방법으로 정렬하면, 그 순서는 B, C, A가 된다. 이로부터, B의 순위는 1이고, C의 순위는 2이며, A의 순위는 3이라는 것을 얻을 수가 있다. 그러나 이러한 방법으로 얻은 각 퍼지숫자의 순위는 퍼지숫자의 대소관계가 애매모호함으로 생기는 순위의 애매모호함을 적절히 표현하지 못함을 알 수 있다. 즉, 세 퍼지숫자가 모두 겹쳐있어서 어느 것이 가장 큰지, 어느 것이 두 번째로 큰지, 어느 것이 가장 작은지 명확히 말할 수 없음에도 위와 같은 방법은 단순히 B가 가장 크고, 그 다음으로 C, A라고 기술하여, 순위에 존재하는 애매모호함을 표현하고 있지 못하다.

따라서, 본 논문에서 제안하는 방법은 애매모호한 정보를 다루는 의사결정 시스템이나 전문가 시스템에서 매우 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 대부분의 의사결정 시스템이나 전문가 시스템에서는 주어진 대안들 중에서 가장 좋은 것은 어느 것인가 또는 어느 것은 몇 번째로 좋은 것인가에 대한 판단이 많이 이루어진다. 이러한 판단에 본 논문에서 제안하는 방법을 적용하면, 주어진 대안들의 애매모호함으로 인하여 생기는 순위의 애매모함을 잘 표현할 수 있으므로, 애매모호한 정보 처리에 유용하게 사용될 것이다.

5. 결 론

본 논문에서는 퍼지숫자의 애매모호함으로 인하여 생기는 퍼지숫자의 순위와 k번째로 큰 퍼지숫자를 기술하는데 존재하는 애매모호함을 어떻게 표현할 것인가를 다루었다. 본 논문에서는 주어진 대소관계를 이용하여 퍼지숫자의 순위와 k번째 큰 퍼지숫자를 퍼지집합을 이용하여 결정하였다. 제안하는 방법은 퍼지숫자의 순위에 존재하는 애매모호함을 표현할 수 있으므로, 애매모호한 정보를 다루는 여러 시스템에서 유용하게 사용될 수 있다.

참 고 문 헌

[1] A. Kaufmann, M. M. Gupta, *Introduction to Fuzzy Arithmetic*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.

[2] V. Peneva, I. Popchev, "Comparison of clusters from fuzzy numbers," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.97, pp.75-81, 1998.

[3] C. H. Cheng, "A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.95, pp.307-317, 1998.

[4] K. Kim, K. S. Park, "Ranking fuzzy numbers with index of optimism," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.35, pp.143-150, 1990.

[5] S.-H. Chen, "Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.17, pp.113-129, 1985.

[6] G. Bortolan, R. Degani, "A review of some methods for ranking fuzzy subsets," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.15, pp.1-19, 1985.

[7] L. M. Campos Ibanes, A. Gonzalez Munoz, "A subjective approach for ranking fuzzy numbers," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.29, pp.145-153, 1989.

[8] S. A. Orlovsky, "Decision-making with a fuzzy preference relation," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.1, pp.155-167, 1978.

[9] T. S. Liou, M. J. Wang, "Ranking fuzzy numbers with integral value," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.50, pp.247-255, 1992.

[10] P. Fortemps, M. Roubens, "Ranking and defuzzification methods based on area compensation,"

Fuzzy Sets and Systems, vol.82, pp.319-330, 1996.
[11] K. P. Yoon, "A probabilistic approach to rank complex fuzzy numbers," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.80, pp.167-176, 1996.
[12] A. González, "A study of the ranking function approach through mean values," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.35, pp.29-41, 1990.
[13] R. R. Yager, "A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval," *Information Science*, vol.24, pp.141-161, 1981.
[14] J. F. Baldwin, N. C. F. Guild, "Comparison of fuzzy sets on the same decision space," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.2, pp.213-231, 1979.
[15] J. H. Lee, H. Lee-Kwang, "A method for ranking fuzzy numbers based on a given viewpoint and its application to decision-making," *IEEE trans. Fuzzy Systems*, 1999 (to appear).
[16] K. M. Lee, C. H. Cho, H. Lee-Kwang, "Ranking fuzzy values with satisfaction function," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.64, pp.295-309, 1994.
[17] J. H. Lee, H. Lee-Kwang, "Comparison of fuzzy values on a continuous domain," *Fuzzy Sets and Systems*, 1999(to appear).

부 록

정리 1. 그림 2의 방법은 퍼지숫자의 집합 $F=\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$가 주어졌을 때, 퍼지숫자 f_i가 F내에서 k-번째 순위가 될 확신도 $C_F(f_i, k)$를 구한다.

증명. 지역순위확신도는 정의에 의해 $LC(S_i^k, f_i)=\min\{R_{j_1 i}, R_{j_2 i}, \cdots, R_{j_{k-1} i}, R_{i j_{k+1}}, \cdots, R_{i j_n}\}$이다. 이때, $LC(S_i^k, f_i)$를 구하기 위한 집합 $\{R_{j_1 i}, R_{j_2 i}, \cdots, R_{j_{k-1} i}, R_{i j_{k+1}}, \cdots, R_{i j_n}\}$을 $S_{S_i^k}$라 정의하면, $S_{S_i^k}$는 다음을 만족한다. 대소관계 R에 대하여, $S=\{R_{kl} | l=1, \cdots, n \text{ and } l \neq i\}$ $I=\{R_{lk} | l=1, \cdots, n \text{ and } l \neq i\}$ 일 때,

1) $|S \cap S_{S_i^k}| = k-1$
2) $|I \cap S_{S_i^k}| = n-k$
3) $\forall R_{ij}, R_{ij} \in S_{S_i^k} \leftrightarrow R_{ji} \notin S_{S_i^k}$, 단 $i \neq j$.

여기에서 S는 다른 퍼지숫자가 f_i보다 클 가능성의 집합이며, I는 f_i가 다른 퍼지숫자보다 클 가능성의 집합이다. $LC(S_i^k, f_i)$를 구하기 위한 $S_{S_i^k}$가 위의 세 조건을 만족하는 이유는 다음과 같다. 수열 S_i^k에는 f_i보다 큰 $(k-1)$개의 퍼지숫자가 있고, f_i보다 작은 $(n-k)$개의 퍼지숫자가 있으며, 어느 한 퍼지숫자는 꼭 한번은 수열 내에서 f_i의 앞이나 뒤에는 반드시 나와야 하기 때문이다. 그리고, 이러한 이유로 다음을 만족하는 집합 U에는 적어도 하나의 $S_{S_i^k}$가 포함된다.

4) $U \subset S \cup I$
5) $|S \cap U| \geq k-1$
6) $|I \cap U| \geq n-k$
7) $\forall R_{ij}, R_{ij} \in S_{S_i^k} \leftrightarrow R_{ji} \notin S_{S_i^k}$, 단 $i \neq j$.

그리고, $w \geq 0$에 대하여

$$U(w)=\begin{cases} S \cup I & \text{if } w=0 \\ U(w-1)-\{\min U(w-1)\} & \text{if } w>0 \end{cases}$$

라 정의하자. $U(w)$는 $U(w-1)$에서 최소값을 제외한 것이다. 그리고, $U(w)$가 조건 5)~7)을 만족할 때, $U(w)$에 포함되는 모든 $S_{S_i^k}$의 집합을 $S_{S_i^k}^{U(w)}$라 하면, $S_{S_i^k}^{U(w)}$과 $S_{S_i^k}^{U(w+1)}$사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$S_{S_i^k}^{U(w+1)} = S_{S_i^k}^{U(w)} - \{S_{S_i^k} | S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w)}, \min U(w) \in S_i^k\}$$

즉, $S_{S_i^k}^{U(w)}$에 포함되는 $S_{S_i^k}$중 $U(w)$의 최소값을 포함하는 것을 $S_{S_i^k}^{U(w)}$에서 제외하면 $S_{S_i^k}^{U(w+1)}$과 같아지는데, 그 이유는 $S_{S_i^k}^{U(w)}$로부터 만들 수 있는 모든 $S_{S_i^k}$중 $U(w)$의 최소값을 포함하는 것을 제외한 것은 $U(w)$에서 최소값을 제외한 것으로 만들 수 있는 모든 $S_{S_i^k}$와 같기 때문이다. 따라서 $M=\{S_{S_i^k} | S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w)}, \min U(w) \in S_i^k\}$이라 하면, $S_{S_i^k}^{U(w)} = S_{S_i^k}^{U(w+1)} \cup M$이므로, $\max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w)}} \min S_{S_i^k} = \max\{\max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w+1)}} \min S_{S_i^k}, \max_{S_{S_i^k} \in M} \min S_{S_i^k}\}$이다. 여기에서 $S_{S_i^k} \in M$에 대하여 $\min S_{S_i^k} = \min U(w)$이므로, $\max_{S_{S_i^k} \in M} \min S_{S_i^k} = \min U(w)$이다. 또한 $U(w+1)$은 $U(w)$에서 최소값을 제외한 것이므로, $\max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w+1)}} \min S_{S_i^k} \geq \min U(w)$이다. 따라서,

$$\max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w)}} \min S_{S_i^k} = \max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w+1)}} \min S_{S_i^k}$$

가 된다. $C_F(f_i, k)$는 정의에 의해서 $C_F(f_i, k) = \max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(0)}} \min S_{S_i^k}$ 이므로, 위 식에 의해서

$$C_F(f_i, k) = \max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(0)}} \min S_{S_i^k} = \max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w)}} \min S_{S_i^k}$$

이다. 이때 어떤 w에 대하여, $U(w)$는 조건 5)~7)을 만족하지만, $U(w+1)$은 5)~7)의 조건을 만족하지 않았다

면, $S_{S_i^k}^{U(w+1)} = \phi$가 되므로,

$$C_F(f_i, k) = \max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w)}} \min S_{S_i^k}$$

$$= \max\{\max_{S_{S_i^k} \in S_{S_i^k}^{U(w+1)}} \min S_{S_i^k},\quad \max_{S_{S_i^k} \in M} \min S_{S_i^k}\}$$

$$= \max_{S_{S_i^k} \in M} \min S_{S_i^k} = \min U(w)$$

이다. 따라서, $C_F(f_i, k) = \min U(w)$가 된다.

그림 2의 방법에서 i번째 반복(iteration)의 U 는 $U(i)$라 할 수 있으므로, 최종적으로 U에서 지워진 값이 $C_F(f_i, k)$가 된다.

이 지 형

1993년 한국과학기술원 전산학 학사. 1995년 2월 한국과학기술원 전산학 석사. 1999년 8월 한국과학기술원 전산학 박사. 1996년 12월 ~ 1997년 9월 미국 AIO Microservice Co. 파견연구원. 1999년 9월 ~ 2000년 1월 한국과학기술원 첨단정보기술연구센터 연수연구원. 2000년 2월 ~ 현재 미국 Stanford Research Institute 방문연구원. 관심분야는 퍼지이론 및 응용, 인공지능, 진화연산, bioinformatics 등

이 광 형

정보과학회논문지 : 소프트웨어 및 응용 제 27 권 제 1 호 참조