

불규칙적으로 가진되는 동흡진기계의 비선형응답현상 Nonlinear Response Phenomena of a Randomly Excited Vibration Absorber System

조 덕 상*
Duk-Sang Cho*

<Abstract>

The nonlinear response statistics of an autoparametric system under broad-band random excitation is investigated. The specific system examined is a vibration absorber system with internal resonance, which is known to be a good model for a variety of engineering systems, including ship motions with nonlinear coupling between pitching and rolling motions. The Fokker-Planck equations is used to generate a general first-order differential equation in the dynamic moment of response coordinates. By means of the Gaussian closure method the dynamic moment equations for the random responses of the system are reduced to a system of autonomous ordinary differential equations. The jump phenomenon was found by Gaussian closure method under random excitation.

*Key words: Vibration absorber system, Random excitation
Gaussian closure 방법, Internal resonance,
Multiple solution, Jump phenomenon*

1. 서론

기존의 선형해석으로는 어떤 구조물의 동적 거동을 충분히 설명할 수 없을 만큼 복잡한 특성을 경험할 수 있다. 이러한 복잡한 응답특성은 그 계가 가지고 있는 고유의 비선형성에서 기인된다. 내부공진을 가지는 확정적(deterministic) 비선형 다자유도계는 그동안 많은 연구자의 관심을 끌어왔다⁽¹⁻⁶⁾. 특히 조화가진력을 받는 계의 경우, 정상상태주기해의 점프현상과 포화현상(saturation phenomenon: 가진력이

특정 임계값에 도달하면 직접 가진되는 모드의 운동이 더 이상 증가하지 않는 현상)을 비롯하여 Hopf 분기와 주기배가분기를 거쳐 혼돈 운동을 가질 수 있음은 잘 알려져 있다⁽²⁻⁶⁾. 불규칙가진력을 받는 비선형 계의 경우, 동역학계의 응답 및 안정성연구에는 확률과정(random process)과 확률미분방정식(stochastic differential equation)에 관한 수학적 이론을 필요로 할 뿐 만 아니라, 이 이론을 직접 공학문제에 적용하는 데는 많은 어려움이 따르고 있다. 그 이유는 어떤 계를 해석하기 위해 적용하는 방

* 정회원, 영남대학교 공업기술연구소, 工博
영남대학교 대학원 졸업
Tel : (053) 814-4288

Researcher, Institute of Industrial Technology,
Yeungnam University, Ph.D

법이 다르면 해석결과도 판이하게 달라질 수 있기 때문이다. 이러한 어려움에도 불구하고 불규칙가진력을 받는 비선형 다자유도계의 응답 특성에 미치는 내부공진효과에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다⁽⁷⁻¹²⁾. 이 중에서 Ibrahim⁽¹¹⁾과 이원경·조덕상⁽¹²⁾은 확정적 비선형계에 존재하였던 포화현상은 비확정적 비선형계에서는 발견할 수 없었음을 보고하였다.

본 연구에서는 확정적계에 존재하는 점프현상이 비확정적계에 존재하는지를 조사하기 위하여 동흡진기를 선택하였다. 동흡진기의 운동 방정식으로부터 유도된 Fokker-Planck 방정식으로부터 모멘트방정식을 얻은 후 Gaussian closure 방법을 이용하여 14개의 자율상미분방정식을 구하고 이 방정식의 평형해와 응답의 통계적 특성을 조사하였다.

2. 운동방정식

광대역 불규칙 가진력 $F(t)$ 를 받는 동흡진기가 Fig. 1에 나타나 있다. 주질량(M)과 외팔보 질량(m)에 대한 운동방정식은 다음과 같다⁽²⁾.

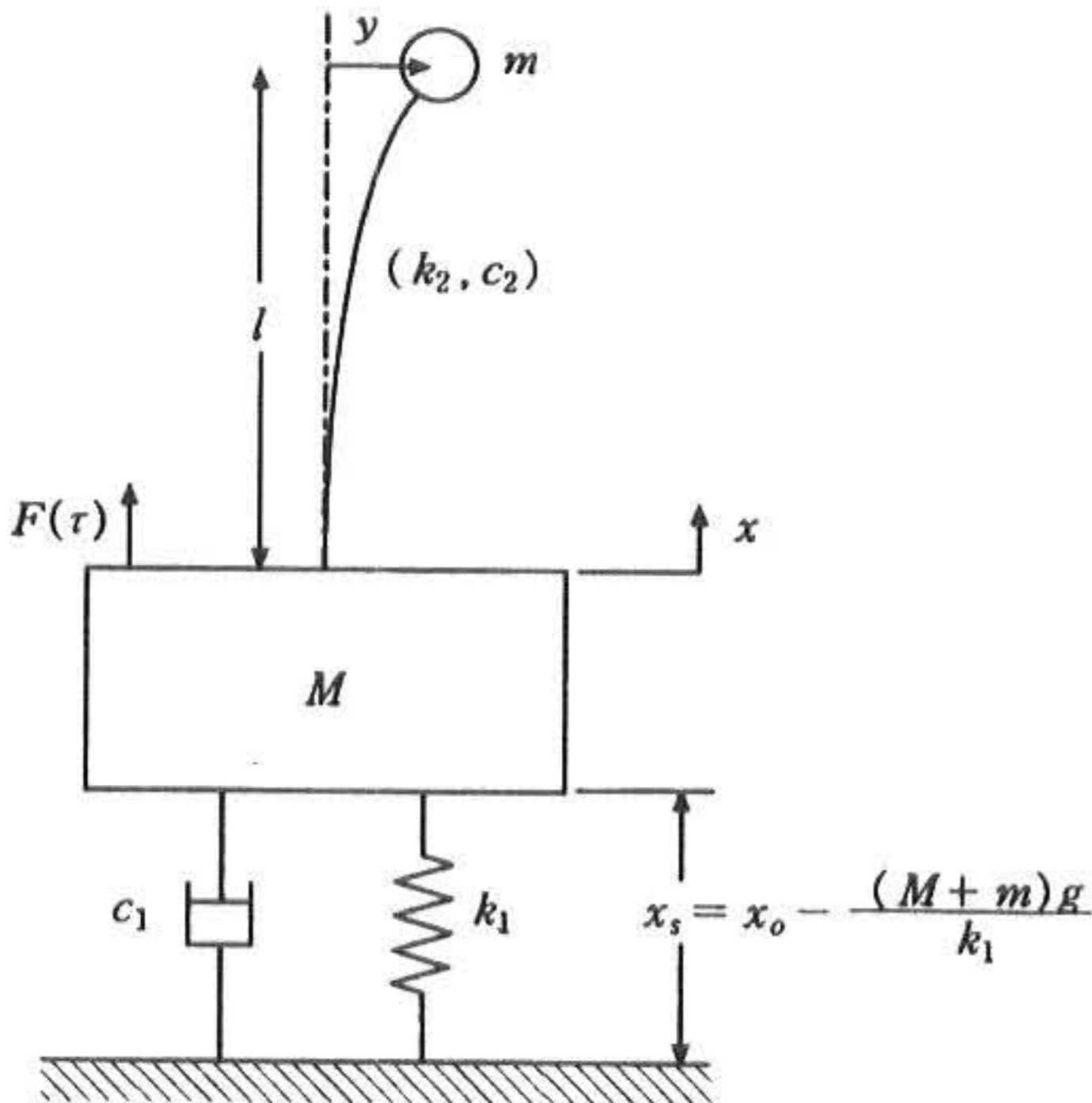


Fig. 1 Schematic diagram of autoparametric absorber system

$$(M+m)\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x - (6/5l)m(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = F(t), \quad (1)$$

$$m\ddot{y} + c_2\dot{y} + \{k_2 - (6/5l)m\dot{x}\}y + (36/25l^2)m y(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = 0 \quad (2)$$

여기서 x 와 y 는 선형화 계에 상응하는 정규좌표를 나타내며 다음과 같은 표현을 이용하여

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{x_s}, Y = \frac{y}{l}, \zeta_1 = \frac{c_1}{2(M+m)\omega_1}, \\ \zeta_2 &= \frac{c_2}{2m\omega_2}, \tau = \omega_1 t, r = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \varepsilon = \frac{l}{x_s}, \\ R &= \frac{m}{M+m}, \omega_1^2 = \frac{k_1}{M+m}, \omega_2^2 = \frac{k_2}{m}, \\ W(\tau) &= \frac{F(\tau/\omega_1)}{(M+m)x_s\omega_1^2}, \rho = \frac{6}{5}, \end{aligned} \quad (3)$$

식 (1)과 (2)를 무차원화하면 다음을 얻는다.

$$X'' + 2\zeta_1 X' + X - \rho\varepsilon R(Y^2 + YY') = W(\tau), \quad (4)$$

$$Y'' + 2\zeta_2 r Y' + (r^2 - \frac{\rho}{\varepsilon} X')Y + \rho^2 Y(Y^2 + YY') = 0 \quad (5)$$

위의 식들에서 $\dot{}$ 과 $\dot{}$ 은 각각 t 와 τ 에 대한 미분을 나타낸다. 근사해석을 위하여 이 계가 약비선형계라고 가정하기로 한다. 즉 식 (4)와 (5)에서 4차 이상의 비선형항을 무시하면 다음을 얻는다.

$$X'' + 2\zeta_1 X' + X + \rho\varepsilon R(r^2 Y^2 + 2r\zeta_2 YY' - Y^2) + \rho^2 R(-W(\tau)Y^2 + XY^2 + 2\zeta_1 X'Y^2) = W(\tau), \quad (6)$$

$$Y'' + 2\zeta_2 r Y' + r^2 Y + \frac{\rho}{\varepsilon}(-Y W(\tau) + XY + 2\zeta_1 YX') + \rho^2(1-R) \times (-r^2 Y^3 - 2\zeta_2 r Y^2 Y' + YY'^2) = 0. \quad (7)$$

불규칙과정 $W(\tau)$ 를 자기상관함수 (autocorrelation function)가 다음과 같이 표시되는 평균이 0인 백색잡음(white noise)으로 가정한다

$$R_{ww}(\Delta\tau) = E[W(\tau)W(\tau+\Delta\tau)] = 2D\delta(\Delta\tau) \quad (8)$$

여기서 $2D$ 는 진동수를 $f(=\omega/2\pi)$ 로 표현할

때의 스펙트럼밀도이고 $\delta(\Delta\tau)$ 는 Dirac delta 함수이다.

3. Gaussian closure 방법

계의 응답과정은 다음과 같은 좌표변환을 이용하여

$$\{x, y, x', y'\}^T = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}^T = X$$

Markov 벡터로 전환할 수 있으며, 또한 불규칙 과정 $W(\tau)$ 를 브라운과정(Brownian process) $B(\tau)$ 의 도함수(formal derivative) 즉, $W(\tau) = dB/d\tau$ 로 나타내면 식 (6)과 (7)은 다음과 같은 Ito방정식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} dX_1 &= X_3 d\tau, dX_2 = X_4 d\tau, \\ dX_3 &= \{-2\zeta_1 X_3 - X_1 \\ &\quad + \rho\epsilon R(X_4^2 - 2r\zeta_2 X_2 X_4 - r^2 X_2^2) \\ &\quad + \rho^2 R(-2\zeta_1 X_2^2 X_3 - X_1 X_2^2)\} d\tau \\ &\quad + (1 + \rho^2 R X_2^2) dB(\tau), \\ dX_4 &= \{-2\zeta_2 r X_4 - r^2 X_2 \\ &\quad + \frac{\rho}{\epsilon}(-X_1 X_2 - 2\zeta_1 r X_2 X_3) \\ &\quad + \rho^2(1 - R)(r^2 X_2^3 + 2\zeta_2 r X_2^2 X_4 \\ &\quad - X_2 X_4^2)\} d\tau + \frac{\rho}{\epsilon} X_2 dB(\tau). \end{aligned} \quad (9)$$

이 Markov 벡터에 대한 응답의 확률밀도함수는 다음과 같이 Fokker-Planck 방정식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} p(\mathbf{x}, \tau) &= - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(\mathbf{x}, \tau) p(\mathbf{x}, \tau)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(\mathbf{x}, \tau) p(\mathbf{x}, \tau)] \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $p(\mathbf{x}, \tau)$ 는 결합확률밀도함수(joint probability density function) 이고 $a_j(\mathbf{x}, \tau)$ 와 $b_{jk}(\mathbf{x}, \tau)$ 는 각각 Markov 과정 $X(\tau)$ 의 1차

및 2차 증가모멘트(incremental moment)이다.

Fokker-Planck 방정식 (10)으로부터 완전해 $p(\mathbf{x}, \tau)$ 를 구하는 것은 불가능하다.⁽¹³⁾ 그렇지만 임의의 차수 $n(=a+\beta+\gamma+\eta)$ 에 대한 $p(\mathbf{x}, \tau)$ 의 모멘트 방정식은 식 (10)에 $x_1^a x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta$ 를 곱하고 전 상태공간 $(-\infty < x_i < \infty)$ 에 대하여 적분함으로써 n 차에 대한 모멘트방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{m}_{a,\beta,\gamma,\eta} &= am_{a-1,\beta,\gamma+1,\eta} + \beta m_{a,\beta-1,\gamma,\eta+1} \\ &\quad - \gamma m_{a+1,\beta,\gamma-1,\eta} \\ &\quad - \epsilon \rho R r^2 \gamma m_{a,\beta+2,\gamma-1,\eta} \\ &\quad - \rho^2 R \gamma m_{a+1,\beta+2,\gamma-1,\eta} \\ &\quad + \epsilon \rho R \gamma m_{a,\beta,\gamma-1,\eta+2} \\ &\quad + (\gamma-1) \gamma D m_{a,\beta,\gamma-2,\eta} \\ &\quad + 2\rho^2 R(\gamma-1) \gamma D m_{a,\beta+2,\gamma-2,\eta} \\ &\quad - 2\zeta_1 \gamma m_{a,\beta,\gamma,\eta} \\ &\quad - 2\rho^2 R \zeta_1 \gamma m_{a,\beta+2,\gamma,\eta} \\ &\quad - 2\epsilon \rho R r \zeta_2 \gamma m_{a,\beta+1,\gamma-1,\eta+1} \\ &\quad - r^2 \eta m_{a,\beta+1,\gamma,\eta-1} \\ &\quad - \frac{\rho}{\epsilon} \eta m_{a+1,\beta+1,\gamma,\eta-1} \\ &\quad + \rho^2(1-R) r^2 \eta m_{a,\beta+3,\gamma,\eta-1} \\ &\quad - \rho^2(1-R) \eta m_{a,\beta+1,\gamma,\eta+1} \\ &\quad + \frac{\rho^2}{\epsilon^2} \eta(\eta-1) D m_{a,\beta+2,\gamma,\eta-2} \\ &\quad - 2\frac{\rho}{\epsilon} \zeta_1 \eta m_{a,\beta+1,\gamma+1,\eta-1} \\ &\quad - 2r\zeta_2 \eta m_{a,\beta,\gamma,\eta} \\ &\quad + 2\rho^2(1-R) r \eta m_{a,\beta+2,\gamma,\eta} \\ &\quad + 2\frac{\rho}{\epsilon} \gamma \eta D m_{a,\beta+1,\gamma-1,\eta-1} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned} m_{a,\beta,\gamma,\eta}(\tau) &= E[X_1^a X_2^\beta X_3^\gamma X_4^\eta] \\ &= \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_1^a x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta p(\mathbf{x}, \tau) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \end{aligned}$$

방정식 (11)은 연성된 모멘트방정식이 무한

조(infinite set)로 구성되어 있다. 따라서 확률적 응답특성을 구하기 위하여 이 계를 약비선형계라고 가정할 경우 계의 응답의 확률밀도함수는 가우스분포로 근사할 수 있다. 따라서 3차 및 4차 cumulant를 0으로 놓음으로써 3차 및 4차 모멘트를 1차 또는 2차 모멘트로 전환할 수 있고, 이 경우 식(11)은 $n = 1, 2$ 에 대해서 미분방정식을 전개할 수 있다. 따라서 14개의 모멘트(4개의 1차 모멘트와 10개의 2차 모멘트) 미분방정식을 얻을 수 있다.

4. 평형해의 안정성

Gaussian closure 방법으로 얻어진 14개의 자율 상미분방정식(autonomous ordinary differential equations)의 자율 상미분방정식으로 구성된 계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{m} = f(m) \quad (12)$$

여기서 $m = \{m_{1.0.0.0}, m_{0.1.0.0}, \dots\}^T$ 는 14개의 요소를 가진 모멘트 벡터이며 $f(m) = \{f_1(m), f_2(m), \dots\}^T$ 은 이 계의 벡터장(vector field)이다.

우선 계 (12)의 평형해 m_0 는 다음의 식

$$f(m_0) = 0 \quad (13)$$

으로 부터 구해지며 이 평형해의 안정성을 판별하기 위하여

$$m = m_0 + \delta m$$

으로 두고 평형해의 작은 교란 δm 에 대한 미분방정식으로 바꿔쓴 후 δm 의 비선형항을 무시하면 다음과 같은 선형 상미분방정식을 얻는다.

$$\delta \dot{m}' = \left. \frac{\partial f}{\partial m} \right|_{m=m_0} \delta m \quad (14)$$

이 Jacobian 행렬의 모든 고유치의 실수부가 음이면 그 평형해 m_0 는 점근적으로 안정하다고 판단된다. 식 (11)과 (13)을 면밀히 관찰하면

이 계는 다음과 같은 평형해를 갖게 됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} m_{2.0.0.0} &\equiv E[X_1^2] = D/2\zeta_1, \\ m_{0.0.2.0} &\equiv E[X_2^2] = D/2\zeta_1, \end{aligned} \quad (15)$$

나머지 모멘트들은 0

이다. 이 평형해들은 동흡진기가 외팔보의 운동 (y)은 없이 주질량의 운동(x)만 하고 있음을 말해주고 있다.

5. 수치결과

수치예를 위하여 우선 대수방정식 (13)을 수치적으로 풀어서 식 (15)로 표시된 평형해가 유일한 평형해인가를 조사한 후, 이 평형해의 안정성을 판별하였으며, 이 평형해가 안정성을 잃는 경우에는 상미분방정식 (12)를 수치적으로 적분함으로써 모멘트들의 거동을 조사하였다. 수치적분은 4차 Runge-Kutta 방법을 이용하였다.

Fig. 2는 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$, $2D = 0.0002$, $\varepsilon = 2$ 이고 $R = m/(M+m)$ 이 각각 0.15와 0.08인 경우에, 진동수비 $r = \omega_2/\omega_1$ 에 따라 정상상태(steady state)에서의 운동의 제곱평균값이 어떻게 변화하는지를 보여 주고 있다. 이 그림에서 내부공진영역($r \approx 0.5$)을 벗어나 있는 두 수평선은 각각 주질량의 운동과 외팔보의 운동의 제곱평균값이 r 뿐만 아니라 시간 τ 에 무관하므로 운동이 정상과정(stationary process)임을 말해 주고 있다. 이 결과는 불규칙가진력에 의해 직접 가진되는 주질량의 운동만 존재하고 외팔보의 운동은 일어나지 않으며, 정상가진(stationary excitation)에 의한 응답이 정상과정을 보여 주고 있으므로 선형계의 응답특성과 일치한다. 이 사실은 비록 두 운동이 비선형항으로 연성되어 있다 하더라도 내부공진영역을 벗어나면 이 계는 전혀 연성되어 있지 않은 선형계나 다름이 없음을 말해 주고 있다. Fig. 2(a)에서는 평형해의 안정성해석결과 r_a 과 r_b 에서 Hopf 분기에 의해 이 해가 안정성을 잃는 것으로 확인되었다. 따라서 $r_a < r < r_b$ 에

서는 이 해가 불안정하여 모멘트들이 시간에 따라 일정한 값을 갖지 않고 주기해, 준주기해, 혼돈운동 등의 운동양상을 보일 수가 있다^(4, 6).

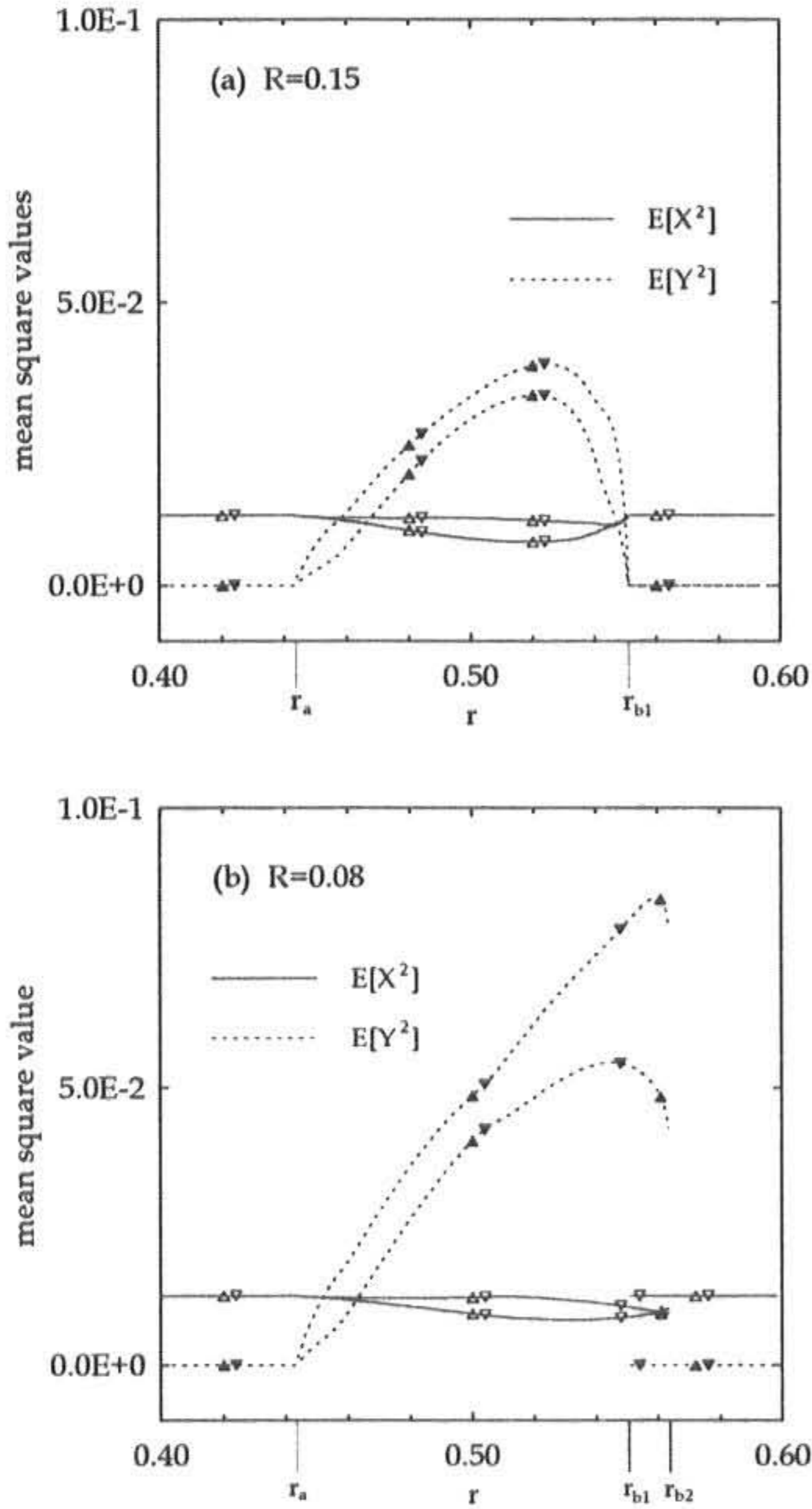


Fig. 2 Limits of mean square responses $E[X^2]$ and $E[Y^2]$ as functions of the frequency ratio r ($\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.01$, $\varepsilon = 2$, $2D = 0.0005$); \blacktriangle , \triangle , r increasing; \blacktriangledown , \triangledown , r decreasing.

이 그림에서는 두 제곱평균값들의 변동의 상한(upper limit)과 하한(lower limit)을 나타내었다. 이 결과는 주질량의 운동은 안정한 영역에서의 주질량의 운동보다 작아지는 반면에, 큰 외팔보의 운동이 발생하여 내부공진을 통해 직접 가진되는 주질량의 운동으로부터 직접적으로 가진되지 않는 외팔보의 운동으로 에너지가 전달되었음을 보여주고 있다. 시간의 경과에

따라 이 운동의 제곱평균값이 두 한계 사이에서 변동하므로 응답이 비정상과정임을 말해주고 있다. 결국 내부공진조건이 비선형항들의 연

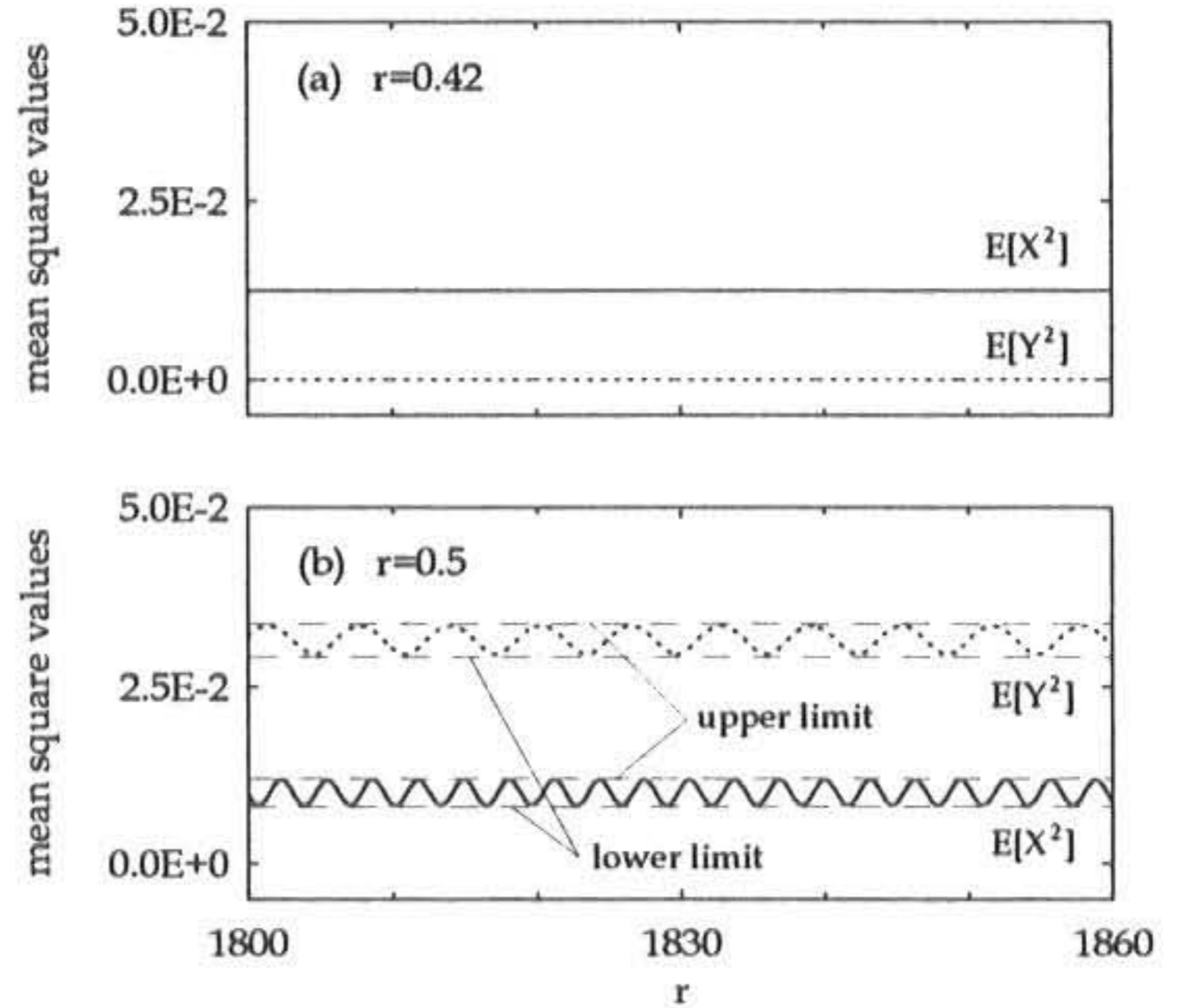


Fig. 3 Time histories of mean square responses $E[X^2]$ and $E[Y^2]$ ($\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.01$, $\varepsilon = 2$, $R = 0.15$, $2D = 0.0005$)

성을 강화함으로써, 가진력이 정상과정이라 하더라도 응답이 비정상과정인 비선형계의 전형적인 응답특성을 보여주고 있다. Fig. 2(b)에서는 평형해의 안정성해석결과 r_a 와 r_{b1} 에서 Hopf 분기에 의해 이 해가 안정성을 잃는 것으로 확인되었으며 수치적분을 수행한 결과 r_{b2} 에서도 해가 안정성을 잃는 것으로 확인되었다. 다시 말하자면 r_{b1} 에서 r_{b2} 사이에는 다중해(multiple solution)가 존재하는 영역이 된다. 또한 r_{b1} , r_{b2} 에서는 점프가 존재하는데 r_{b1} 에서는 상향점프(upward jump)가 r_{b2} 에서는 하향점프(downward jump)가 존재한다. 진동수비 r 값을 증가시키면 r_{b2} 에서 하향점프가 발생하고, 반대로 r 값을 감소시키면 r_{b1} 에서 상향점프가 발생한다. 이러한 점프현상은 초기조건에 매우 민감함을 해석을 통하여 파악할 수 있다. Fig. 2에서 질량비 R 이 감소함에 따라 외팔보의 운동은 증대하나 분기점 r_a 와 r_{b1} 는 변화되지 않는다.

Fig. 3은 운동의 제곱평균값이 시간이 경과함에 따라 어떻게 변화하는지를 보여 주고 있는

데 Fig. 3(a)와 3(b)는 각각 $r=0.42$ 과 0.5 에 해당하는 것이다. Fig. 3(a)는 두 제곱평균값이 일정한 정상과정을 보여 주고 있으며, Fig. 3(b)는 내부공진효과로 말미암아 이 둘이 비정상과정이 되었음을 보여 주고 있다. 이 그림을 면밀히 관찰하면 $E[x^2]$ 과 $E[\phi^2]$ 는 각각 해당하는 모드의 고유진동수의 두배인 진동수로 변동하고 있

성을 파악하기 위하여 Fokker-Planck 방정식으로부터 유도된 Gaussian closure 방법이 사용되었다. 내부공진 영역에서 계의 비선형 연성으로 인하여 직접 가진되는 주질량의 운동으로부터 직접 가진되지 않는 외팔보의 운동으로 에너지가 전달됨을 확인하였다. 또한 확정적 비선형계에 존재하는 다중해와 점프현상은 해석적 방법을 통하여 불규칙 가진력을 받는 동흡진기에서도 발견되었다. 이러한 다중해와 점프현상은 진동수비 r 의 유한한 구간에서만 발견되었다.

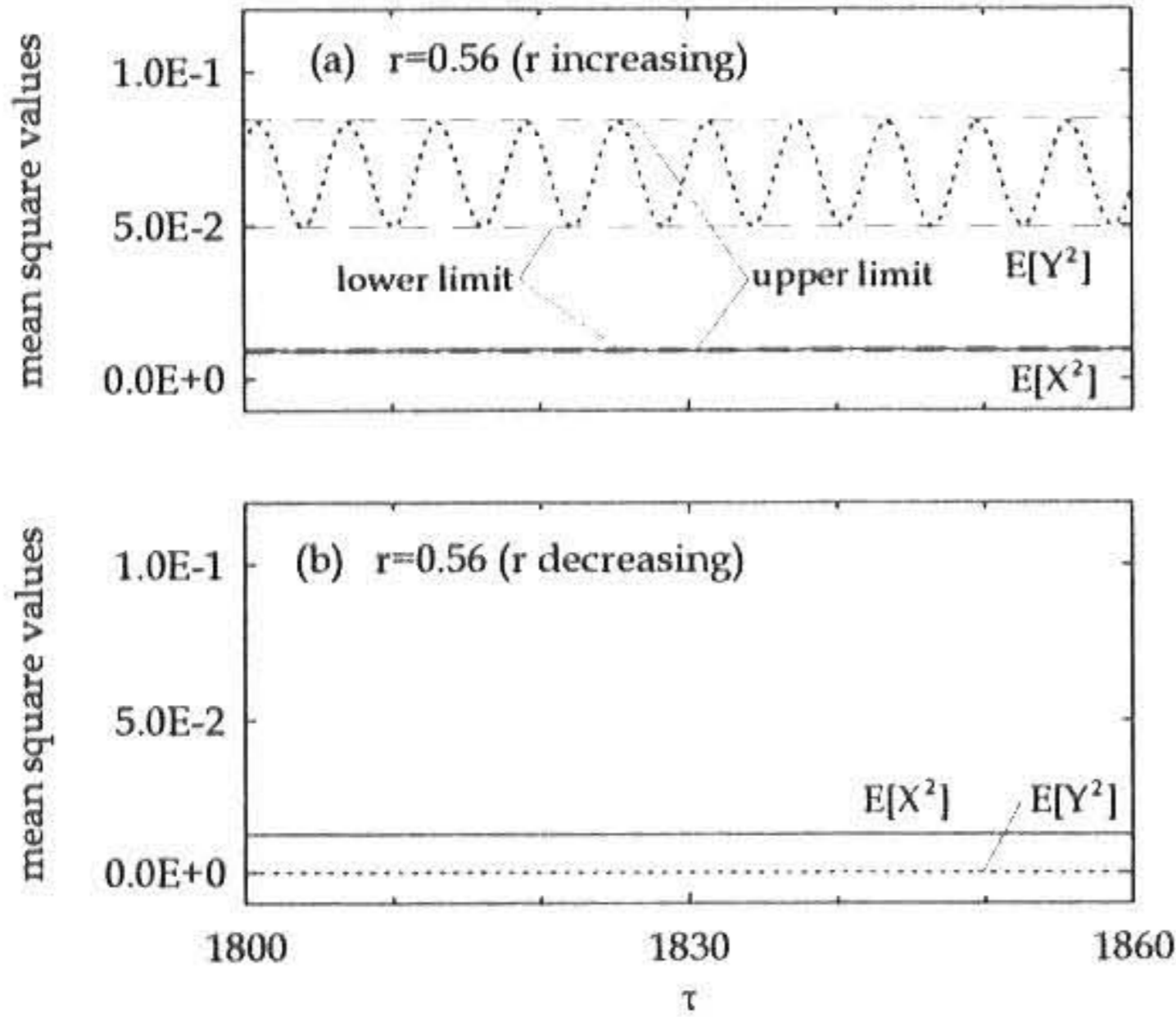


Fig. 4 Time histories of mean square responses $E[X^2]$ and $E[Y^2]$ ($\xi_1 = 0.01, \xi_2 = 0.01, \epsilon = 2, R = 0.08, 2D = 0.0005$)

음을 알 수 있다. 이 사실은 어떤 조화함수를 제공하면 그 조화함수의 진동수의 두배인 진동수를 갖게 됨과 일치한다.

Fig. 4는 Fig. 2(b)의 다중해 영역에 있는 두 시간이력을 나타내고 있다. Fig. 4(a)는 진동수비 r 값을 증가시키면서 $r = 0.56$ 에서 응답의 제곱평균값을 나타내고 있다. Fig. 4(b)는 진동수비 r 값을 감소시키면서 $r = 0.56$ 에서 응답의 제곱평균값을 나타내고 있다. 같은 시스템 파라메타라 할지라도 초기값에 따라서 계의 응답이 다름을 보여주고 있다.

6. 결론

비선형 2자유도계의 내부공진효과로 인하여 발생하는 불규칙응답특성을 조사하기 위하여 주질량의 수직방향으로 광대역 불규칙가진력을 받는 동흡진기를 선택하였다. 계의 응답의 통계적 특

참고문헌

- 1) Minorsky, N., Nonlinear oscillations, Princeton: Roberty E. Krieger, 1962.
- 2) Haxton, R. S. and Barr, A. D. S., The autoparametric vibration absorber, ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, 119-125, 1972.
- 3) Bux, S. L. and Roberts, J. W., Non-linear vibratory interactions in systems of coupled beam, Journal of Sound and Vibration, Vol. 104, 497-520, 1986.
- 4) Nayfeh, A. H., Mook, D. T. and Marshall, L. R., Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions, Journal of Hydronautics, Vol. 7(4), 145-152, 1973.
- 5) Lee, W. K. and Hsu, C. S., A global analysis of an harmonically excited spring-pendulum system with internal resonance, Journal of Sound and Vibration, Vol. 171 (3), 335-359, 1994.
- 6) Lee, W. K. and Park, H. D., Chaotic dynamics of an harmonically excited spring-pendulum system with internal resonance, Nonlinear Dynamics, Vol. 14, 221-229, 1997.
- 7) Ibrahim, R. A., Recent results in random vibrations of nonlinear mechanical systems, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 117, 222-233, 1995.
- 8) Ibrahim, R. A., Soundararajan, A. and

- Heo, H., Stochastic response of nonlinear dynamic systems based on a non-Gaussian closure, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.52, 965-970, 1985.
- 9) Ibrahim, R. A. and Roberts, J. W., Broad band random excitation of a two-degree-of-freedom system with autoparametric coupling, Journal of Sound and Vibration, Vol. 44(3), 335-348, 1976.
- 10) Ibrahim, R. A. and Heo, H., Autoparametric vibration of coupled beams under random support motion, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.108, 421-426, 1986.
- 11) Ibrahim, R.A., Nonlinear random vibration: experimental results, Applied Mechanics Review, Vol.44, 423-446, 1991.
- 12) 이원경, 조덕상, 광대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계의 내부공진효과, 한국소음진동공학회지, Vol.8 (3), 399-407, 1998.
- 13) Ibrahim, R. A., Parametric random vibration, John Wiley, New York, 1985.
- 14) Soong, T. T. and Grigoriu, M., Random vibration of mechanical and structural systems, Prentice-Hall International, Inc., 1993.

(2000년2월1일 접수, 2000년 5월20일 채택)