

헬리컬 기어의 최적 설계 프로그램 개발 및 3차원 모델링 Development of the Optimal Design Program and the 3-D Modeling for the Helical Gear

곽재섭*, 정성원**
Jae-Seob Kwak*, Sung-Won Chung**

<Abstract>

Recently the studies on the vibration and the noise of a helical gear transmission have been focused on the many researchers. The manufacturing error and the deformation of the tooth profile, which generates the vibration and the noise of the gear transmission, are main factors. The major purpose of this study is to develop an optimal design program for reducing the vibration and the noise of the helical gear. To obtain the these results, we restrain the helical gear from the deformation of the tooth profile and increase the contact ratio within the optimal design program. Furthermore we made the three-dimensional solid modeling of the helical gear from the AutoCAD and the Pro/Engineer. This model will be available to generate the finite element model and the NC code.

Key Words : *Helical gear, Optimal design, Vibration and noise, Three dimensional solid modeling*

1. 서론

힘과 동력을 전달하는 전동장치 중 기어는 가장 중요한 기계요소로, 속도비가 정확하고 전달 효율이 우수하여 널리 사용되고 있다. 최근 자동차, 항공기, 산업기계 및 공작기계 등 다양한 분야에 사용되고 있는 기어는 저진동, 저소음화에 대한 필요성이 크게 대두되고 있다. 특히 헬리컬 기어(Helical gear)는 진동 및 소음이 가장 작은 것으로 알려져 있으나, 그 소음 수치와 진동은 많은 문제를 야기하고 있

는 실정이다. 자동차 변속기에 사용되고 있는 헬리컬 치형의 진동과 소음은 외부적인 원인으로 노면, 엔진, 그리고 차체의 조립상태 등에 의해 발생하며, 내부적인 원인으로는 기어의 제작오차와 기어의 전동시 발생하는 탄성변형과 마찰 마모에 의한 치형의 변화 때문이다. 따라서 기어 전동에서 진동과 소음의 주원인인 치형의 변화를 극소화하기 위해, 헬리컬 치형 곡선의 기구학적 특성을 고찰하여, 물림율(Contact ratio)을 증가시켜 작용력을 분산시켜야 한다.

M. S. Tavakoli^[1]는 스피어 기어에서 정적 전

* 정회원, 부산대학교 기계기술연구소 전임연구원, 工博,

** 정회원, 밀양대학교 기계공학과, 교수

Full-time Researcher, RIMT of Pusan University, Dr. Eng. Prof., Dept. of Mechanical Engineering, Miryang College

달오차(Static transmission error)를 최소화하기 위한 연구를 하였고, 국내에서는 윤구영^[2] 등이 저소음 기어 설계에 고차 스플라인(Spline) 곡선을 도입하여 기어의 작용선이 전 구간에서 일정하도록 하는 치형 수정에 관한 연구를 하였다. 그러나 이 방법은 수정량의 계산절차가 복잡하고, 또한 기어를 제작할 때에 치형 곡선의 일부를 잘라내야 하기 때문에 인벌루트 치형이 손상되어 기어의 맞물림 운동에 영향을 줄 수 있다. 기어의 최적설계(Optimal design)에 관한 연구로는 정태형^[3] 등이 동력전달용 베벨 기어의 최적설계에서 여러 가지 인자를 고려하여 기어의 무게를 최소화하는 문제를 다루었고, 김도균^[4]이 기어의 압력각을 변화시켜 치간섭을 제거하는 최적설계 문제에 관한 연구를 하였다.

본 연구에서는 저소음과 저진동의 치형 설계에 순차 이차 계획법으로 널리 사용되는 PLBA (Pshenichy Lim-Belegundu-Arora)^[5] 최적화 기법을 적용하여, 설계변수인 모듈(Module), 압력각(Pressure angle) 및 나선각(Helix angle)을 구하였다. 작용력 분산을 위해 물림율의 극대화를 목적함수로 하여, 굽힘강도(Bending strength)와 접촉 면압강도(Contact strength)를 제약조건으로 하여 최적 설계 프로그램을 개발한다. 또한 구해진 설계 제원을 토대로 헬리컬 기어를 AutoCAD와 Pro/Engineer를 사용하여 3차원으로 모델링함으로써 유한요소 모델과 NC 데이터를 생성하는 기초 정보를 제공하고자 한다.

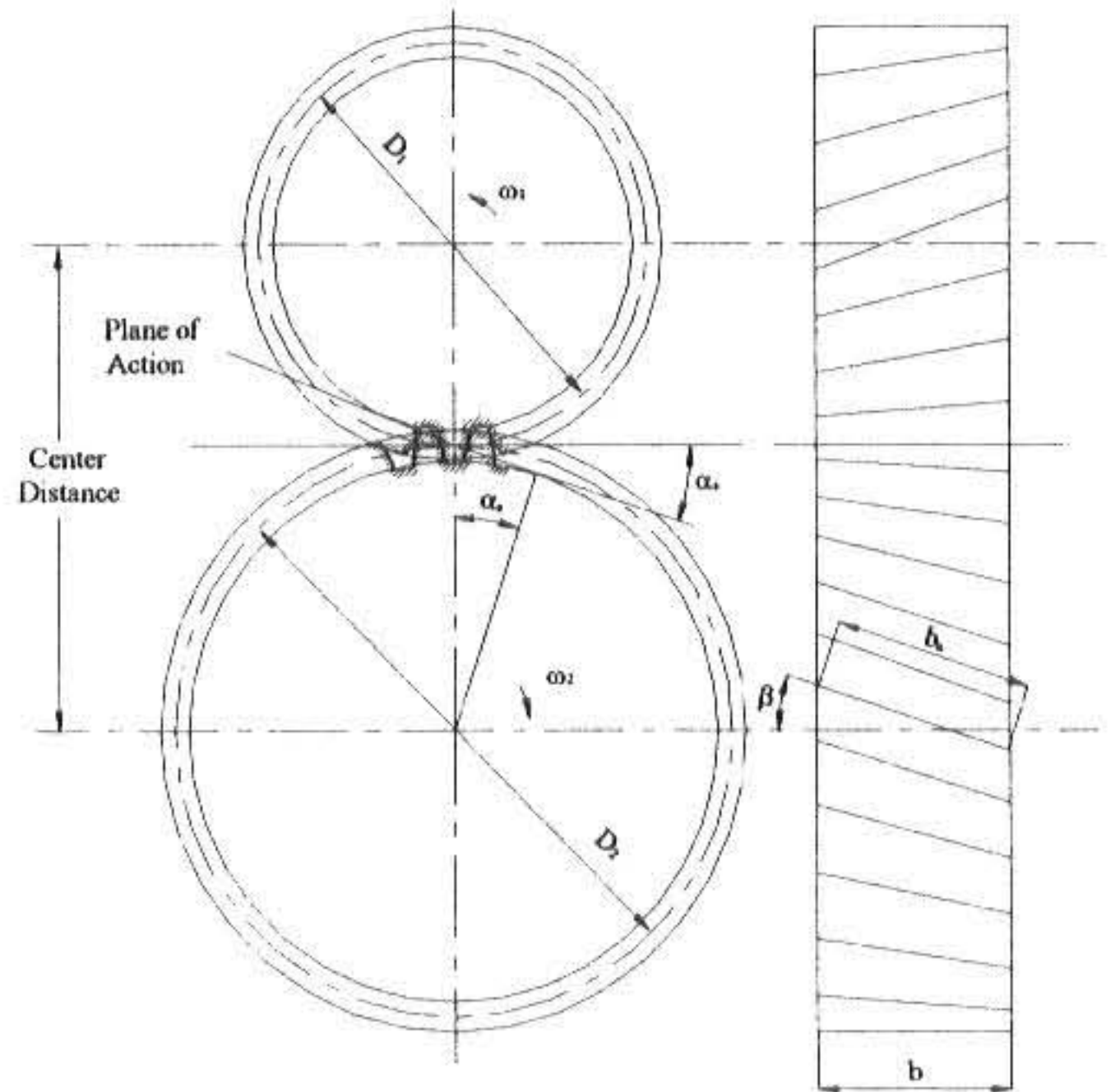
2. 헬리컬 기어의 기구학적 해석

Fig. 1과 같이 이(齒)가 원통상에 나선으로 되어 있는 기어를 표준 헬리컬 기어의 치직각과 축직각의 압력각, 모듈, 치폭의 관계^[6]는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tan \alpha_s = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \tag{1}$$

$$m_s = \frac{m_n}{\cos \beta} \tag{2}$$

$$b = b_n \cos \beta \tag{3}$$



α : transverse pressure angle β : helix angle
 b : face width b_n : normal face width
 $D_{1,2}$: pitch diameter of gear 1,2 $\omega_{1,2}$: angular velocity of gear 1,2

Fig. 1 Denomination of the helical gear

여기서 α 는 압력각, β 는 나선각, 그리고 b 는 치폭이며, m 은 모듈이며, 하첨자 n 과 s 는 치직각과 축직각을 의미한다.

기어가 균일한 속도비로 회전하기 위해서는 한 쌍의 기어치가 접촉을 끝마칠 때까지 적어도 다음 한 쌍의 기어치가 맞물림 상태에 있어야 한다. 즉, 기어가 연속적으로 전동을 할려면 적어도 한쌍의 기어치는 항상 맞물려 있어야 한다는 것이다. 이를 위해서는 접촉호의 길이가 반드시 원주피치보다 커야한다. 여기서 접촉호의 길이를 원주피치로 나누어 준 값을 물림율이라 하고, 물림율^[7] (ϵ)은 다음과 같이 표시된다.

$$\epsilon = \frac{\sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} + \sqrt{r_{k2}^2 - r_{g2}^2} - a \sin \alpha_s}{\pi m_s \cos \alpha_s} + \frac{b \tan \beta}{\pi m_s} \tag{4}$$

여기서 r_{k1} , r_{p1} , r_{g1} 와 r_{k2} , r_{p2} , r_{g2} 는 각각 기어 1과 기어 2의 이끝원, 피치원, 기초원 반경이다. 또 $a = r_{p1} + r_{p2}$ 로서 두 기어의 중

심거리이다.

또 기어에 작용하는 굽힘 응력(σ_b)은 Lewis 식에 여러 인자를 고려한 수정식^[8]으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_b = \frac{K_A K_D K_S K_b P}{K_\epsilon b m_n Y_e} \quad (5)$$

여기서 K_A 는 충격계수, K_D 는 동하중계수, K_S 는 노치계수, K_b 는 치합계수, K_ϵ 는 물림율계수, Y_e 는 상당 스피어 기어의 치형계수이다.

한편 한 쌍의 기어가 맞물려 돌아갈 때 치면에 작용하는 수직하중(P_n)이 너무 크면 치면은 마모와 반복 응력에 의해 작은 구멍들이 생기는 피팅(Pitting)현상이 발생한다. 이와 같은 피팅현상은 치면에 손상을 일으키는 요인이 되므로, 치면의 접촉응력이 재료가 가지고 있는 피로한도보다 적게 작용하도록 설계되어야 한다. 일반적으로 치면의 강도계산에는 헤르쯔(Hertz)의 탄성 이론식이 널리 사용된다.

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{0.35P_n \left(\frac{1}{r_{p1}} + \frac{1}{r_{p2}} \right)}{b \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}} \quad (6)$$

여기서 E_1, E_2 는 두 기어의 탄성계수이다.

한 쌍의 기어가 맞물려 돌아갈 때 이의 개수비가 너무 크면 큰 쪽 기어의 이끝 부위가 작은 쪽 기어의 이뿌리 부위와 간섭(Interference)을 일으켜 이뿌리 부분이 꺾여지는 언더컷 현상이 생기고, 기어는 물림률과 강도가 저하된다. 이러한 현상을 방지하기 위해서는 언더컷이 발생하지 않는 한계 잇수를 정의하여야 하고, 작은 기어의 잇수를 z_1 , 큰 기어의 잇수를 z_2 이라 할 때 한계 잇수는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$z_2 \leq \frac{z_1^2 \sin^2 \alpha - 4}{4 - 2z_1 \sin^2 \alpha} \quad (7)$$

3. 자동차 변속기용 헬리컬 기어의 최적설계

3.1 문제설명 및 정식화

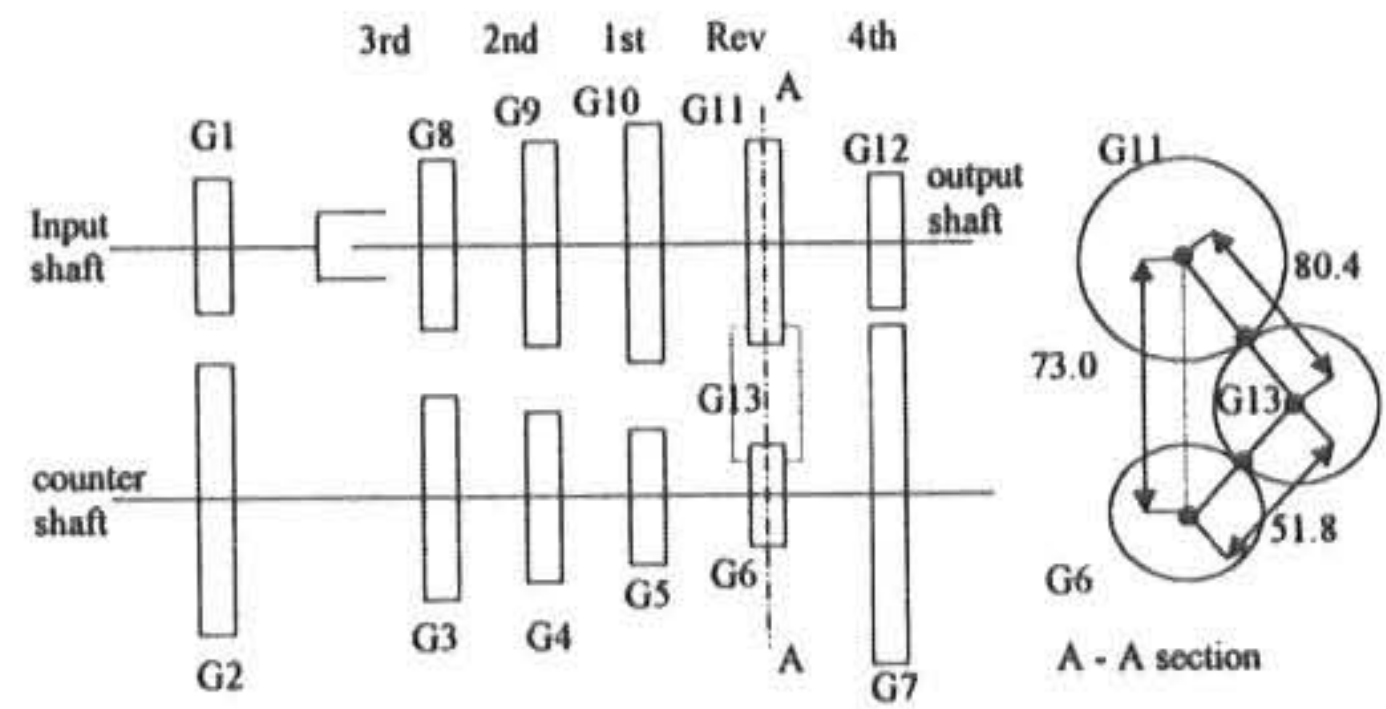


Fig. 2 Structure of a vehicle transmission

헬리컬 기어의 최적설계 예제로는 Fig. 2와 같이, 입력축의 동력이 변속기를 거쳐 출력축으로 전달되는 차량용 4단 변속기에 적용하였다. 한편 후진시에 사용되는 3개의 기어는 모듈, 나선각, 압력각이 동일하도록 설계하고, 모든 기어는 전위를 시키지 않은 표준기어로 계산하였다.

회전비, 축간거리, 재료의 물성치, 동력 등은 변속기 제조 메이커의 설계조건을 이용하였다. 설계변수로는 모듈, 압력각, 나선각이 사용되었고, 목적함수로는 물림율을 최대화하여 기어에 작용하는 하중을 분산시키고자 하였다. 이때 굽힘강도와 면압강도를 제약조건으로 고려하였다. 부가적인 제약조건으로 모듈은 계산으로 구해지는 임의의 값이 아니라, KS 규격에 규정되어 있는 특정한 값을 사용하도록 하였다. 한편 치폭이 모듈에 비해 지나치게 크면 가공 정밀도가 떨어져 진동 소음의 원인이 되므로, 모듈에 비례해서 치폭의 크기에 제한을 두었다. 기어 잇수도 구해진 실수 값이 아니라 정수이며, 회전비를 반드시 만족하여야 한다.

최적설계 알고리즘은 순차 이차 계획법인 PLBA(Pshenichy-Lim-Belegundu-Arora)를 사용하였다. PLBA 알고리즘은 헤시안 행렬(Hessian matrix)의 수정과정과 잠재 집합 방책(Active set strategy)을 사용하여 수렴속도가 빠른 방법이다.

이상의 내용을 정리하면 다음과 같은 최적설계 문제로 정식화 할 수 있다.

$$\text{설계변수 구하기 : } \mathbf{v} \quad (8)$$

$$\text{목적함수 최대화 : } \phi_0(\mathbf{v}) = \epsilon \quad (9)$$

제약조건:

$$\sigma_b - \sigma_{ab} \leq 0 \quad (10)$$

$$\sigma_c - \sigma_{ac} \leq 0 \quad (11)$$

$$b_n - C_1 \cdot m_n = 0 \quad (12)$$

$$m_n = (m_n)_i, \quad i=1, N \quad (13)$$

$$z = z_j, \quad j=1, M \quad (14)$$

경계조건 :

$$\mathbf{v}_L \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{v}_U \quad (15)$$

식 (8)의 \mathbf{v} 는 설계변수로서 모듈, 압력각, 나선각이고, 식 (9)의 ψ_0 는 최대화될 목적함수로서 물림률이다. 식 (10)과 식 (11)은 굽힘강도와 면압강도로서 허용응력보다 작아야 됨을 나타낸다. 식 (12)는 치직각 치폭이 치직각 모듈에 비례상수 C_1 에 의해 비례적인 크기를 갖도록 하는 제약조건이고, 식 (13)과 식 (14)는 치직각 모듈과 잇수가 임의의 값이 아닌 KS에 규정된 값과 정수임을 각각 나타낸다. 식 (15)에서 $\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_U$ 는 설계변수의 하한과 상한을 의미한다.

최적설계 프로그램에서 참조하는 KS B 1404에 규정된 기어의 표준 모듈은 Table 1과 같고, 설계된 치직각 모듈은 반드시 Table 1에 있는 값들 중의 하나여야 한다.

Table 1 Standard module (KS B 1404)

Module (mm)				
1.5	1.75	2	2.25	2.5
2.75	3	3.25	3.5	3.75
4	4.5	5	5.5	6
6.5	7	8	9	10
11	12	14	16	18
20	22	25		

또한 회전비, 축간거리, 재료의 물성치, 동력, 그리고 설계변수의 하한과 상한 등은 Table 2와 같다.

기어 잇수의 하한과 상한은 다음과 같이 나

타낼 수 있다.

$$\frac{2r_p \cos \beta_{\max}}{m_n} \leq z \leq \frac{2r_p \cos \beta_{\min}}{m_n} \quad (16)$$

여기서 r_p 는 피치원의 반지름이며, 이때 잇수의 하한은 간섭을 일으키지 않는 한계 잇수와 비교하여, 큰 값을 택하여야 기어의 간섭을 방지할 수 있다.

3.2 프로그램 구성 및 실행결과

앞 절에서 설명한 최적설계 정식화를 이용하여, 최적설계 프로그램을 구성하였다. 프로그래밍 언어는 FORTRAN-90을 사용하였고, 퍼스널 컴퓨터 상에서 실행하였다. 프로그램 흐름도는 Fig. 3과 같다.

PLBA 최적설계 알고리즘에서 사용한 벌칙

Table2 Input data for the vehicle transmission

	Center distance (mm)	Revolution ratio
G1↔G2	73.0	1.652
G5↔G10	73.0	2.533
G4↔G9	73.0	1.435
G8↔G3	73.0	1.154
G12↔G7	73.0	1.901
G6↔G13	51.8	1.714
G13↔G11	80.4	1.458

$$\sigma_{ab} = 45, \quad \sigma_{ac} = 190 (\text{kgf/mm}^2)$$

$$E = 2.04 \times 10^4 (\text{kgf/mm}^2)$$

Input torque : 18.5 kgf · m , rpm : 2500

Width factor(C_1) : 12

$15^\circ \leq$ Normal pressure angle(α_n) $\leq 30^\circ$

$12^\circ \leq$ Helix angle(β) $\leq 35^\circ$

매개변수는 1.0, 활성화 제약조건의 폭이 0.1, 최적해의 수렴치는 0.001, 선탐색의 정확도는 0.01로 두고 최적설계를 수행하였다. 변속기 안의 모든 기어들을 대상으로 최적설계를 수행하

여 얻어진, 설계변수와 잇수, 치폭 및 물림률을 Table 3에 나타내었다. 이때 사용된 입력 데이터는 Table 2에서 설명한 것과 같다. 압력각과 나선각은 소숫점이하는 반올림하였다.

설계결과를 살펴보면 물림률은 후진기어를 제외하고는 대부분 3이상의 값으로 높은 물림률이 발생하였다. 한편 스피어 기어는 물림률이 2이상이면 구동 메카니즘의 특성상 진동과 소음이 증가하는 경향이 있으나, 헬리컬 기어는 물림률이 증가함에 따라 진동과 소음이 감소하는 경향이 있다.^[8] 설계변수들이 물림률에 미치는 영향을 살펴보면 잇수와 나선각이 증가할수록, 압력각은 감소할수록 물림률은 증가하지만, 굽힘과 면압강도 등의 구속조건에 의해 제한을 받는다. 특히 나선각의 영향이 민감하여, 다른 기어와 비교할 때 상대적으로 하중이 크게 작용하는 1단과 후진기어에서 물림률이 작게 나타났다.

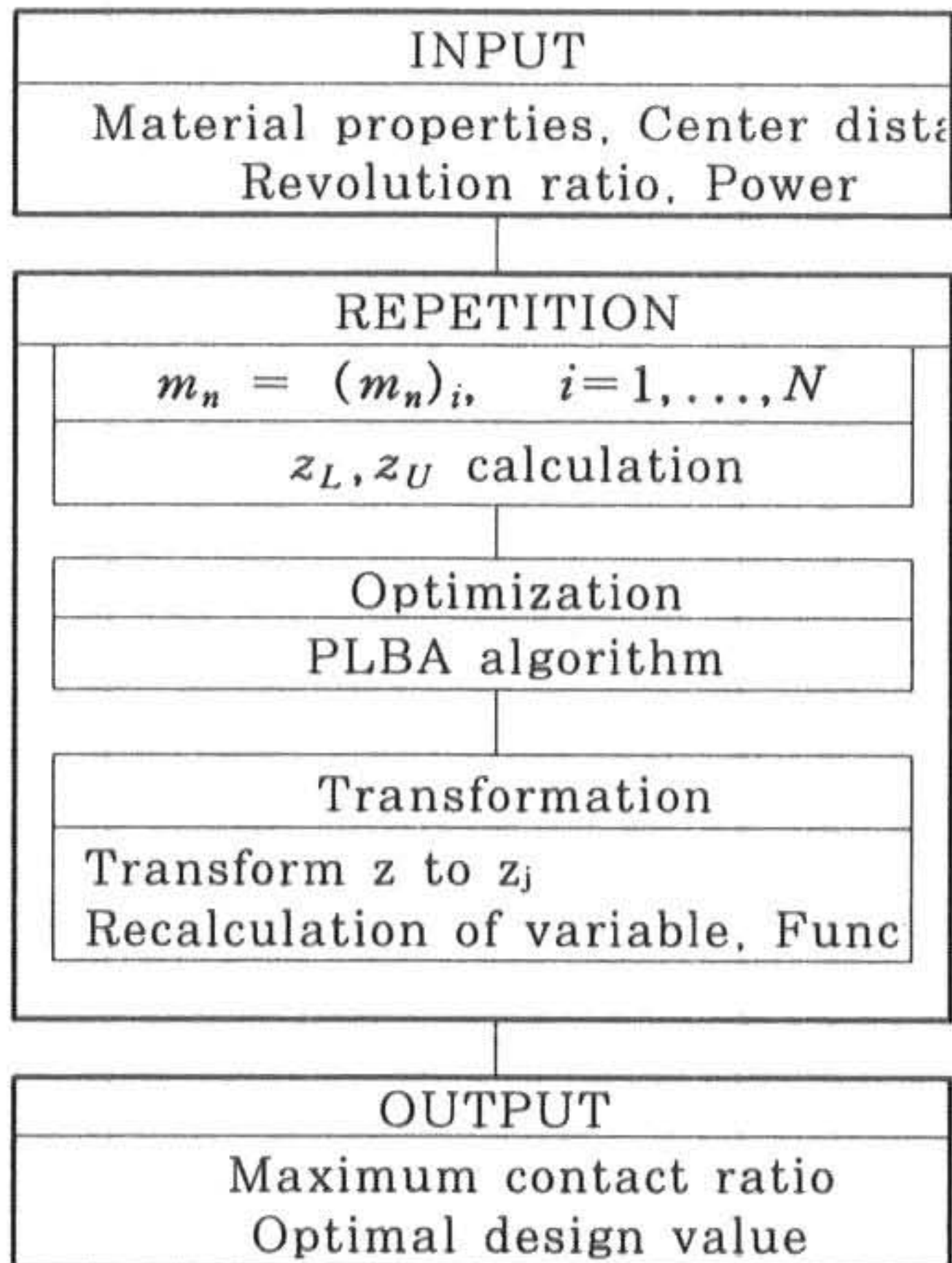


Fig. 3 Flow chart of the optimal design program

Table 3 Optimal design data for the vehicle transmission

	m_n (mm)	$\alpha_n(^{\circ})$	$\beta(^{\circ})$	b (mm)	z	ϵ
G1 G2	2.0	15	33	20.0	23 38	3.26
G5 G10	2.5	15	25	27.2	15 38	3.07
G4 G9	2.25	15	30	23.3	23 33	3.25
G8 G3	1.5	15	30	15.5	39 45	3.35
G12 G7	2.0	15	33	20.0	21 40	3.25
G6 G13 G11	2.5	17	24	27.5	14 24 35	2.86 2.97

4. 3차원 모델링

4.1 헬리컬 인벌루트 치형곡선

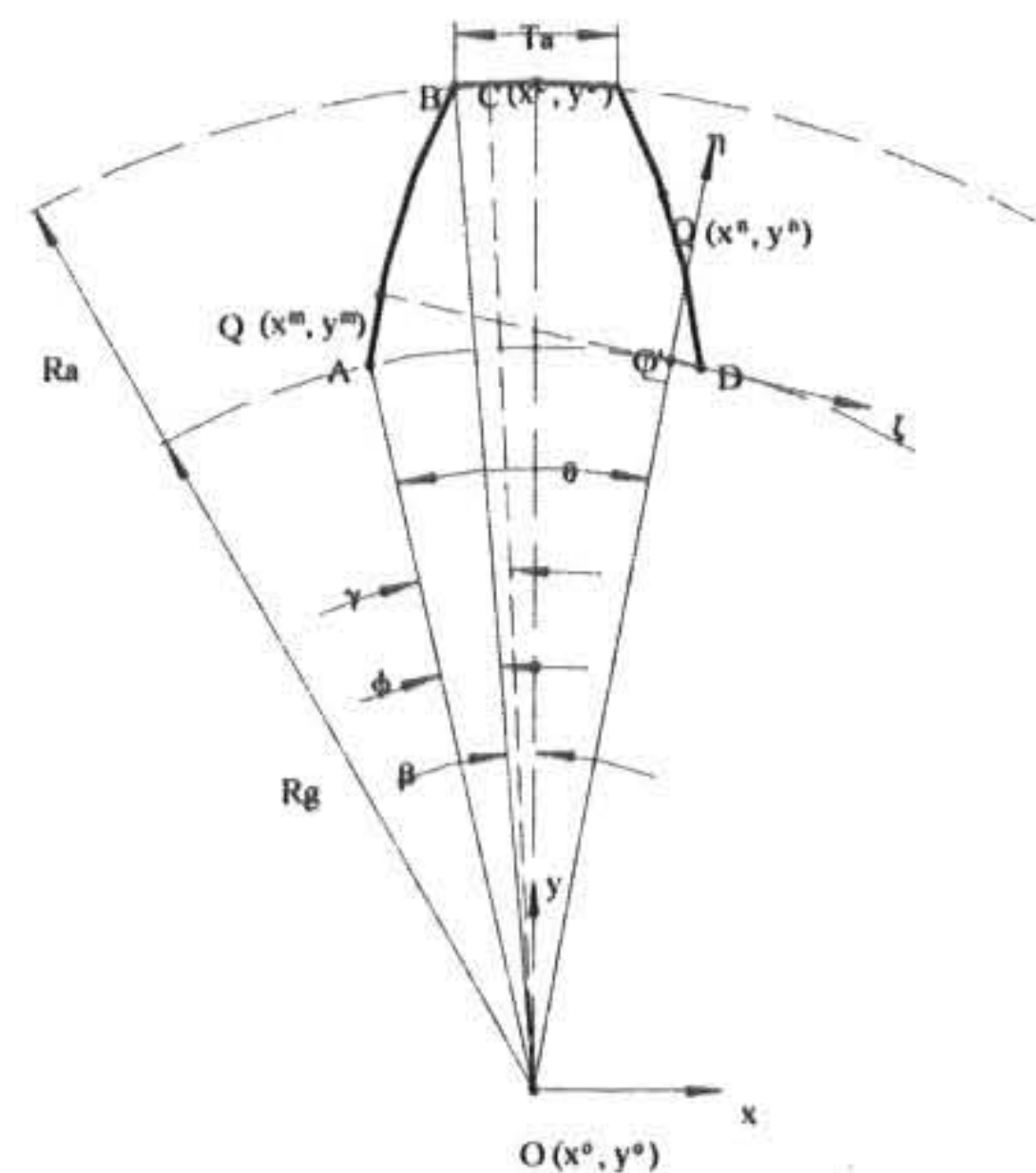


Fig. 4 Generation procedure of involute curve

헬리컬 인벌루트 기어의 3차원 형상을 얻기 위해서는, 먼저 정확한 인벌루트 곡선을 생성하여야 한다. Fig. 4와 같이 A에서 C까지 구간에서 Q(x_m, y_m)는 인벌루트 곡선상의 임의의 한 점을 나타내며, 점 O(x_0, y_0)는 기어의 중심을, 점 O'는 ξ, η 좌표계의 중심을 나타낸다. ξ, η 좌표계는 반지름 R_g 인 기초원 위의 점 O를 중심으로 회전이동한다.

점 Q의 위치를 x, y 좌표계의 평행이동과 회전이동을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_g \sin \theta \\ R_g \cos \theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

또한 ξ, η 좌표계에서 인벌루트 곡선상의 점 Q의 위치는 다음과 같다.

$$\xi = -R_g \cdot \theta, \quad \eta = 0 \quad (18)$$

식 (18)을 식 (17)에 대입하여 정리하면, θ 의 변화에 따른 인벌루트 곡선 궤적의 좌표값을 구할 수 있다.

$$x = -R_g \cdot \theta \cdot \cos \theta + R_g \sin \theta \quad (19)$$

$$y = R_g \cdot \theta \cdot \sin \theta + R_g \cos \theta$$

위의 식을 기초로하여 헬리컬 인벌루트 치형의 생성은 FORTRAN 언어를 사용하여 다음과 같은 단계로 만들었다.

단계 1 : 인벌루트 곡선의 시작과 끝을 나타내기 위해 각 Φ 를 구한다.

$$\Phi = \frac{\sqrt{R_a^2 - R_g^2}}{R_g} - \cos^{-1} \frac{R_g}{R_a} \quad (20)$$

단계 2 : θ 의 값이 변함에 따라 인벌루트 곡선의 궤적을 나타내는 임의의 점 Q의 좌표 (x_m, y_m)를 구한다.

$$x_m = -R_g \cdot \theta \cdot \cos \theta + R_g \sin \theta \quad (21)$$

$$y_m = R_g \cdot \theta \cdot \sin \theta + R_g \cos \theta$$

여기서 $0 \leq \theta \leq \Phi + \cos^{-1} \frac{R_g}{R_a}$ 이며, Q의 좌표 (x_m, y_m)의 수는 기초원 반경에서부터 이끝원 반경까지의 구간을 적당한 개수로 분할

하여 얻어지며, 분할하는 개수가 많을수록 정확한 인벌루트 치형이 얻어진다.

단계 3 : 점 B에서 점 C까지는 반지름 R_a 를 가지는 원의 궤적이므로 각 β 의 변화에 따른 좌표값 (x_m, y_m)를 구한다.

$$\beta = \frac{T_a}{2R_a} = \frac{\pi m}{4R_p} + \text{inv } \alpha - \Phi \quad (22)$$

$$x_m = R_a \sin \gamma \quad (23)$$

$$y_m = R_a \cos \gamma$$

여기서 R_p 는 피치원 반경이며, γ 의 크기는 $\Phi \leq \gamma \leq \Phi + \beta$ 이다.

단계 4 : 점 A에서 점 C까지 구한 (x_m, y_m) 좌표값을 \overline{OC} 축에 대해 복사하여 점 C에서 점 D까지의 좌표값 (x_n, y_n)을 구해 완전한 기어 치형을 만든다.

$$\omega = \frac{y_c - y_o}{x_c - x_o} \quad (24)$$

$$z_p = \frac{1}{\omega^2 + 1} \quad (25)$$

$$z_m = \omega^2 - 1 \quad (26)$$

$$x_n = z_p \cdot (-z_m \cdot x_m + 2\omega \cdot y_m + 2\omega^2 \cdot x_o - 2\omega \cdot y_o) \quad (27)$$

$$y_n = z_p \cdot (2\omega \cdot x_m + z_m \cdot y_m - 2\omega \cdot x_o + 2y_o)$$

여기서 x_c, y_c 는 점 C의 좌표 값이다.

4.2 3차원 모델링 및 결과

앞에서 얻어진 최적설계 데이터로부터 CAD 프로그램을 이용하여, 헬리컬 기어를 3차원 형상으로 모델링 하였다. 정확한 헬리컬 인벌루트 곡선을 FORTRAN 언어를 이용하여 생성하고, 이를 AutoCAD에서 Script 파일로 읽어들이 Fig. 5와 같이 2차원 형상으로 나타내었다. 2차원 형상은 다시 IGES(Initial Graphics Exchange Specification) 파일로 데이터 변환을

거친 뒤, Pro/Engineer에서 읽어들이어 최종적으로 헬리컬 기어의 3차원 모델을 완성하였다. 이러한 전체적인 과정의 흐름도를 Fig. 6에 나타내었다.

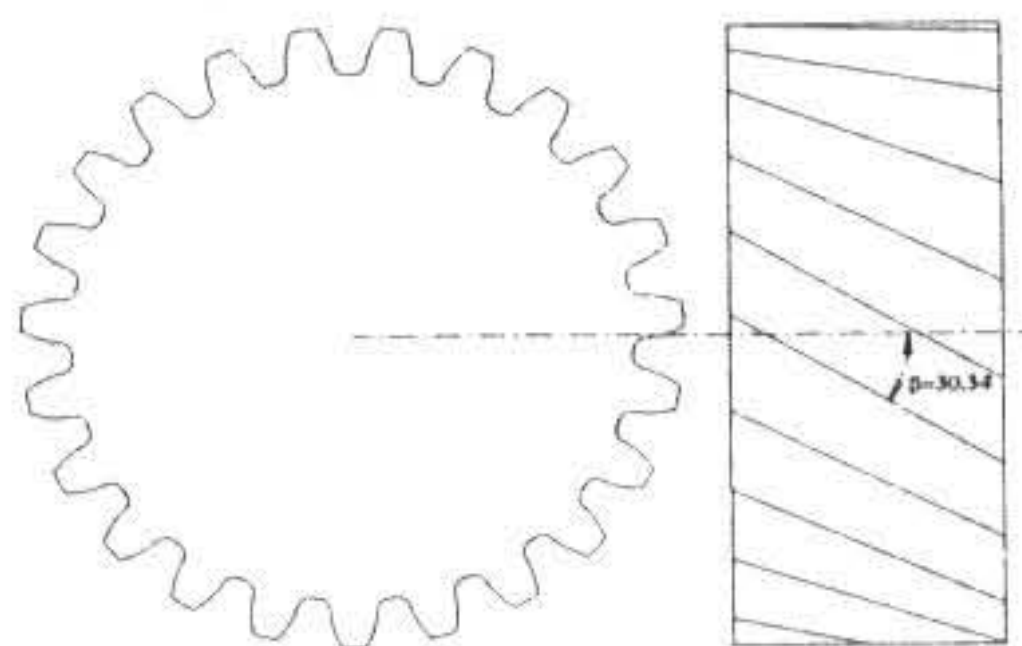


Fig. 5 2-D Modeling of helical gear

이와 같은 순서에 따라서 Pro/Engineer에서 완성한 최종적인 헬리컬 인벌루트 기어의 3차원 형상 예는 Fig. 7과 같다. 여기에 사용된 헬리컬 기어의 제원은 모듈 2.25, 압력각 15°, 나선각 30.34°, 잇수는 23개이며, 인벌루트 곡선의 데이터 분할 개수는 30개로 하였다.

헬리컬 기어의 3차원 모델링은 기어의 설계 변수가 바뀔 때 따라 기어의 형상 변화를 가시화할 수 있고, 기어 제작시에는 제작오차를 줄일 수 있다. 나아가 3차원 형상을 유한요소 해석하거나, 기어 제작을 위한 NC 데이터를 생성하는데 응용 가능하다.

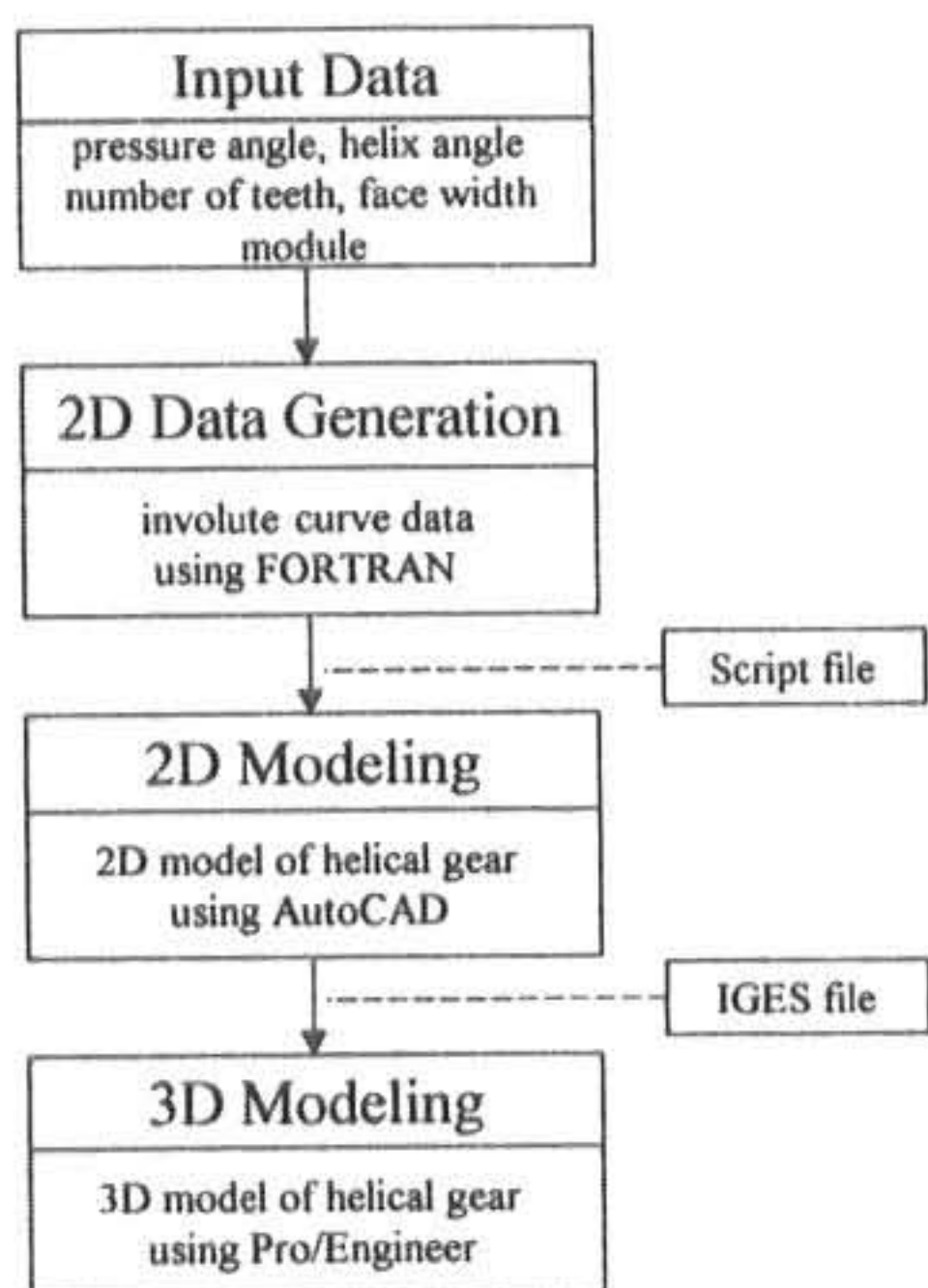


Fig. 6 Flow chart of 3-D modeling

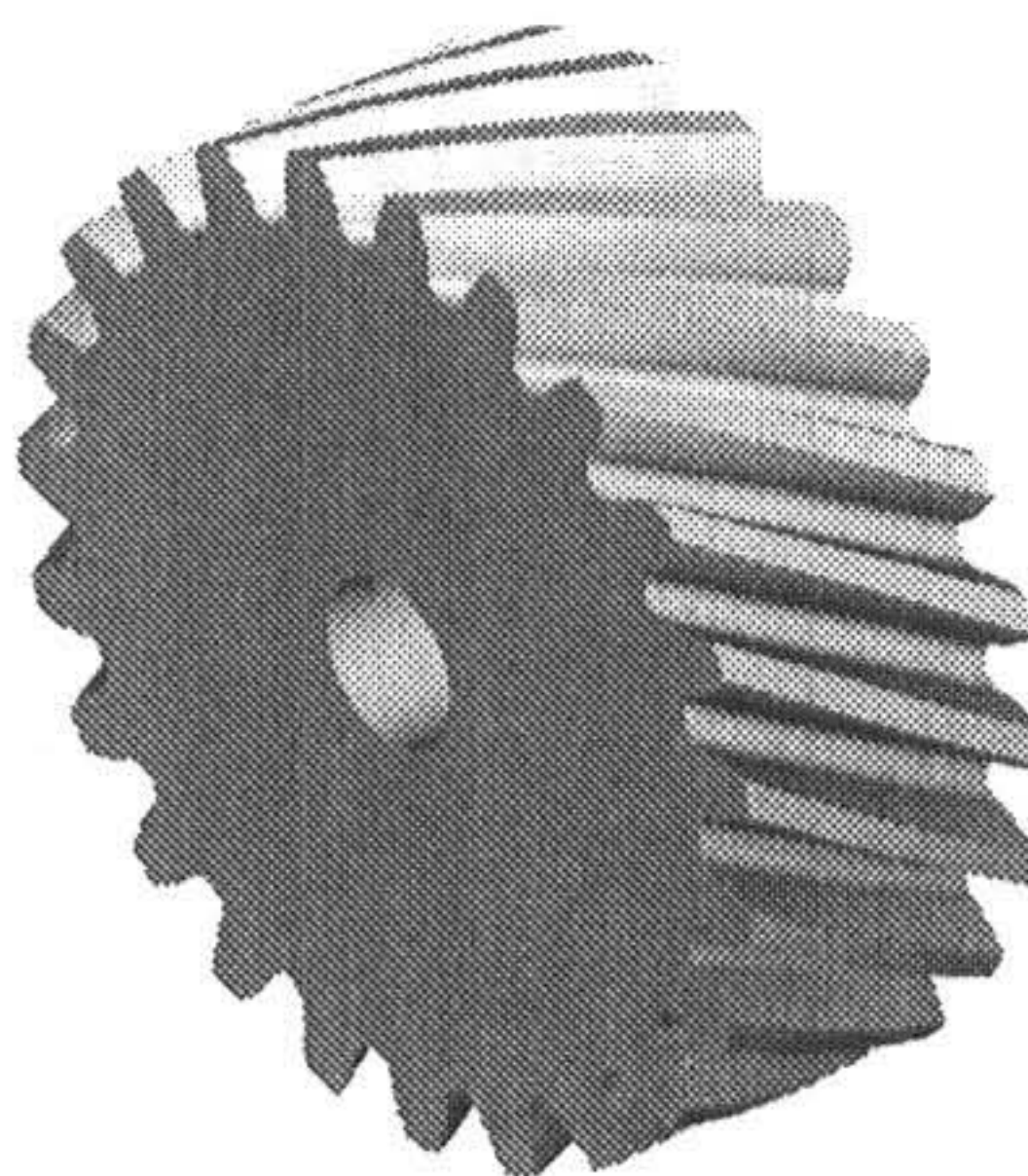


Fig. 7 3-D Modeling of helical gear

5. 결론

본 연구는 차량용 변속기에 사용되는 헬리컬 기어의 제원을 설계변수로 하여, 물림율을 증대시켜 하중 분산시키고, 기어의 변형과 마모를 고려하여 설계가 가능한 최적화 프로그램을 개발하였다. 또한 최적설계 프로그램에서 얻어진 제원을 이용하여, 기어를 3차원 형상으로 모델링하여 가시화할 수 있도록 하였다. 최적설계 알고리즘으로는 순차 이차 계획법인 PLBA를 이용하였고, 수치예제를 통해 다음과 같은 결론을 얻게 되었다.

- (1) 차량용 변속기에 사용되는 헬리컬 기어의 설계제원을 구하는 최적설계 프로그램을 개발하였다.
- (2) 헬리컬 기어의 정확한 3차원 형상을 모델링하여 유한요소 해석 및 기어 제작을 위한 NC 데이터의 생성이 가능하도록 하였다.

참고문헌

- 1) M. S. Tavakoli, D. R. Houser, "Optimum profile modification for the minimization of static transmission errors of spur gears", Transactions of the ASME, Vol. 108, March, pp.86-95, 1986.
- 2) K.Y.Yoon, W.J.Park, "Analysis of gear noise

- and design for gear noise reduction", KSPE, Vol. 13. No. 4. pp.129-135, 1996.
- 3) 정태형, 변준형, "동력전달용 베벨기어의 최적설계", 대한기계학회, 춘계학술대회논문집 (I), pp.991-995, 1993.
 - 4) 임오강, 김도균, "치간섭 제거를 위한 스퍼기어의 치형 최적설계", 대한기계학회부산지부 추계학술대회논문집, pp.1-5, 1997.
 - 5) O.K. Lim, J. S. Arora, "An active set RQP algorithm for engineering design optimization", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.57, pp.51-65, 1986.
 - 6) Ray C, Johnson, Optimum Design of Mechanical Elements, Willey, 1979.
 - 7) J. E. Shigley, Mechanical Engineering Design, International student edition, 1977.
 - 8) Darle W. Dudley, Gear Handbook, first edition, McGraw-Hill, 1962.

(2000년 1월8일 접수, 2000년 5월20일 채택)