

# Hinged-clamped 보의 확률적 응답특성 Stochastic Response of a Hinged-Clamped Beam

조 덕 상\*  
Duk-Sang Cho

### <Abstract>

The response statistics of a hinged-clamped beam under broad-band random excitation is investigated. The random excitation is applied at the nodal point of the second mode. By using Galerkin's method the governing equation is reduced to a system of nonautonomous nonlinear ordinary differential equations. A method based upon the Markov vector approach is used to generate a general first-order differential equation in the dynamic moment of response coordinates. By means of the Gaussian and non-Gaussian closure methods the dynamic moment equations for the random responses of the system are reduced to a system of autonomous ordinary differential equations. The case of two mode interaction is considered in order to compare it with the case of three mode interaction. The analytical results for two and three mode interactions are also compared with results obtained by Monte Carlo simulation.

**Key words:** *Fokker-Planck equation, Gaussian closure method, non-Gaussian closure method, Monte Carlo simulation.*

## 1. 서 론

양단이 고정된 보가 변형할 때에는 중간 평면의 신장을 수반하게 된다. 운동의 진폭이 증가함에 따라 이 신장이 보의 동적 응답에 미치는 영향은 심각하게 된다. 이러한 현상은 응력과 변형의 관계가 선형적이라 하더라도 변형도와 변위와의 관계식은 비선형이 되며 결국은 보의 비선형 운동방정식을 낳게 된다. 보는 연속계이나 근사를 위하여 다자유계로 간주할 수 있다. 비선형

다자유도계에 있어서는 선형화된 계의 고유진동수끼리 적절한 관계를 가질 때 내부공진이 발생할 수 있다.

양단이 고정된 끝은 보의 비선형 동적응답이 그 동안 많이 연구되어 왔다<sup>(1-12)</sup>. 조화가진하에서 hinged-clamped 보의 정상상태 응답을 해석하기 위해서 Nayfeh 등<sup>(5-7)</sup>은 2 모드 사이의 내부공진을 고려하였으며, Lee 등<sup>(8-10)</sup>은 2 모드 및 3 모드 사이의 내부공진을 고려하였다. 이 연구에서 Lee 등<sup>(8)</sup>은 조화가진력을 받는 비선형계의 경우

\* 정회원, 영남대학교 공업기술연구소, 工博,  
영남대학교 대학원 졸업  
Tel : (053)814-4288

\* Researcher, Institute of Industrial Technology,  
Yeungnam University, Ph.D



문제에 따라서는 더 많은 모드를 해석에 포함시킨다 해서 반드시 더 나은 해를 주는 것은 아니라는 것을 보여 주었다.

한편, Ibrahim 등<sup>(11)</sup>과 Lee 등<sup>(12)</sup>은 광대역 불규칙 가진력을 받는 양단이 고정된 보에 축방향으로 좌굴이 발생하지 않도록 정하중이 가해진 경우와 좌굴이 발생하도록 정하중이 가해진 경우에 대하여 확률적 의미에서 분기를 고찰하였다. 좌굴이 발생하지 않도록 정하중이 가해진 경우<sup>(11)</sup>, 직접 가진이 되지 않는 두 번째 모드는 non-Gaussian closure 방법과 Monte Carlo 시뮬레이션으로는 분기를 예측하였으나 Gaussian closure 방법으로는 분기를 예측하지 못하였다. 좌굴이 발생하도록 정하중이 가해진 경우<sup>(12)</sup>, Gaussian closure 방법으로 예측한 두 번째 모드의 분기는 non-Gaussian closure 방법으로 예측한 분기점보다 상대적으로 높은 가진력의 크기에서 일어남을 보여 주었고 Gaussian closure 방법으로 예측한 분기점이 Monte Carlo 시뮬레이션의 결과와 잘 일치함을 보여 주었다.

본 연구에서는 hinged-clamped 보의 모드 상호작용을 조사하기 위하여 두 번째 모드의 절점에 불규칙 가진력을 작용하며 비선형 편미분 방정식과 경계조건으로 표현되는 이 문제를 Galerkin 법을 이용하여 연립 비선형 상미분방정식으로 변환한다. 이 상미분방정식으로부터 유도된 Fokker-Planck 방정식으로부터 모멘트 방정식을 얻은 후 Gaussian closure 방법 및 non-Gaussian closure 방법을 이용하여 자율 상미분방정식을 구하고, 이 방정식을 수치적분함으로써 응답의 통계적 특성을 조사하였다. Gaussian closure 방법으로는 2모드 및 3모드 근사해석을 수행하였으며, non-Gaussian closure 방법으로는 2모드 근사해석만 수행하였다. 또한 두 해석적 방법으로부터 구해진 응답의 통계적 특성을 Monte Carlo 시뮬레이션의 결과와 비교하였다.

## 2. 운동방정식

Fig. 1에 보여진 hinged-clamped 보의 운동방정식과 경계조건은 다음과 같이 표시된다<sup>(5)</sup>.

$$EI \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + \rho A \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = -2c^* \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + H^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + P^*(x^*, t^*),$$

$$w^*(0, t^*) = 0, \quad \frac{\partial^2 w^*(0, t^*)}{\partial x^{*2}} = 0,$$

$$w^*(l^*, t^*) = 0, \quad \frac{\partial w^*(l^*, t^*)}{\partial x^*} = 0,$$

여기서  $E$  = Young's modulus,  $b$  = 보의 너비,  $h$  = 보의 두께,  $\rho$  = 보의 밀도,  $I = bh^3/12$  = 단면 2차 모멘트,  $c^*$  = 감쇠계수,  $P^*$  = 불규칙 가진력,  $H^* = EA/2l^* \int_0^{l^*} (\partial w^*/\partial x^*)^2 dx^* =$  중간평면의 비선형 신장에 기인한 항,  $w^*$  = 보의 처짐,  $t^*$  = 시간,  $x^*$  = 축방향 좌표,  $l^*$  = 보의 길이, 그리고  $A$  = 보의 단면적이다.

무차원 변수의 항으로 위의 식을 표시하면 다음과 같다.

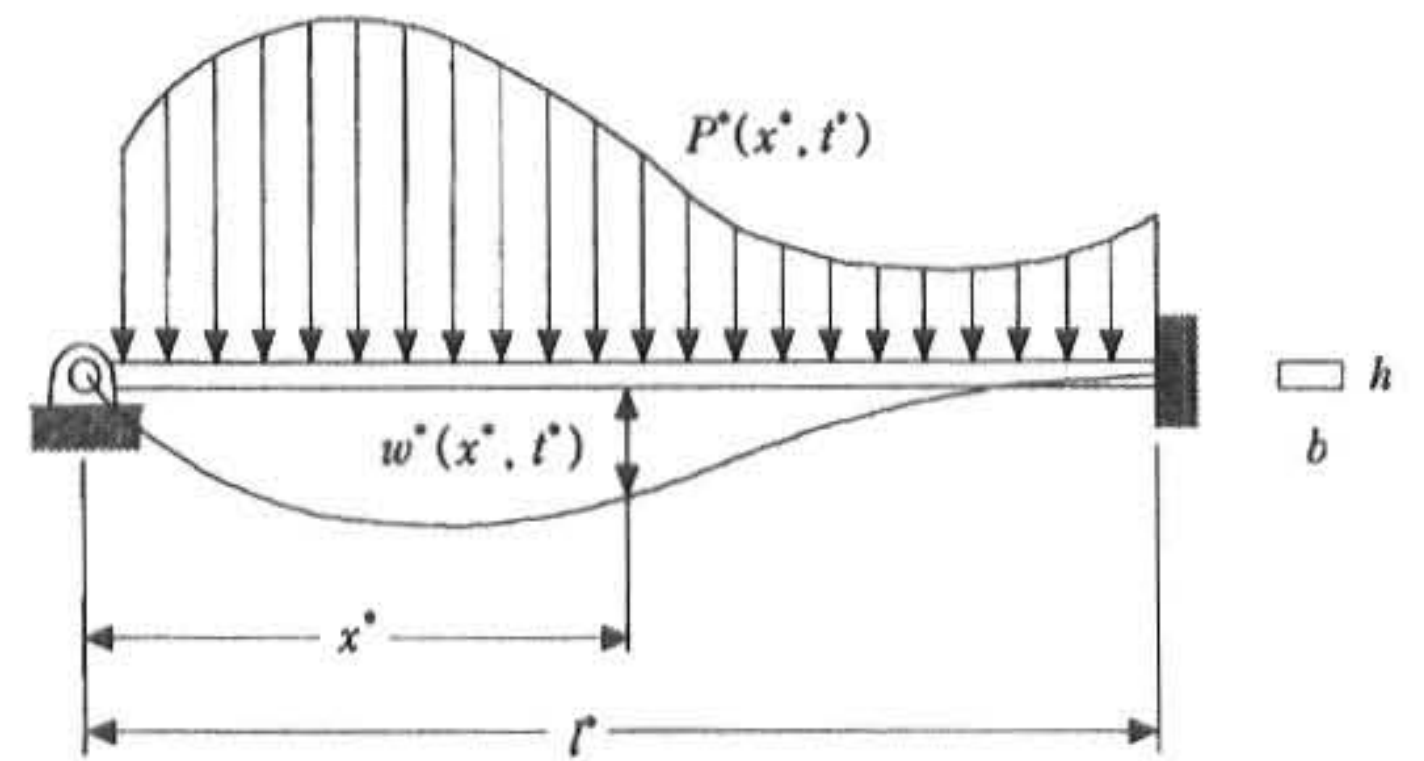


Fig. 1 A schematic diagram of a hinged-clamped beam

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \epsilon \left[ -2c \frac{\partial w}{\partial t} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P \right],$$

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0,$$

여기서

$$H = \nu \int_0^l (\partial w / \partial x)^2 dx, \quad \nu = 1/2l, \quad x^* = xL,$$

$$L = l^*/2, \quad l = l^*/L = 2, \quad r = (I/A)^{1/2} = \text{회전 반경}, \quad t^* = (\rho L^4 / Er^2)^{1/2} t, \quad w^* = r^2 w / L,$$



$\varepsilon = r^2/L^2 = (h/L)^2/12$ ,  $P^* = (r^6 EA/L^7)P$ ,  
 $c^* = 2cr^3 A(\rho E)^{1/2}/L^4$ , 그리고  
 $H^* = EAH(r/L)^4$  이다. 식 (1)은 Galerkin's  
 방법으로 근사적으로 풀 수가 있다.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x) \quad (2)$$

여기에서  $u_n$ 은 일반화 좌표이며,  $\varphi_n$ 은 다음과  
 같은 고유치문제로부터 결정되는 고유함수  
 (eigenfunction)이다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} - \omega_n^2 \varphi_n &= 0, \\ \varphi_n(0) = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_n(0)}{dx^2} &= 0, \\ \varphi_n(l) = 0, \quad \frac{d\varphi_n(l)}{dx} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\omega_n$ 은 고유진동수이다. 고유치문제 (3)의  
 고유함수는 다음과 같다.

$$\varphi_n = e_n [\sin(\alpha_n x) - R_n \sinh(\alpha_n x)], \quad (4)$$



The first mode,  $\varphi_1(x)$



The second mode,  $\varphi_2(x)$



The third mode,  $\varphi_3(x)$

Fig. 2 Eigenfunctions of the vibration.

여기서

$$\begin{aligned} e_n &= \left[ \frac{1}{2} l(l - R_n^2) + \right. \\ &\quad \left. \{ R_n^2 \sinh(2\alpha_n l) - \sin(2\alpha_n l) \} / (4\alpha_n) \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ R_n &= \sin(\alpha_n l) / \sinh(\alpha_n l), \\ \alpha_n &= \sqrt{\omega_n}. \end{aligned}$$

이고  $\alpha_n$ 은  $\tan(\alpha_n l) = \tanh(\alpha_n l)$ 의 근이다. Fig.  
 2는 3차까지의 고유함수를 나타내고 있다.  $l=2$   
 인 경우에 3차까지의 근과 진동수는 다음과 같  
 다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 l &= 3.927 \quad \text{그리고} \quad \omega_1 = 3.855, \\ \alpha_2 l &= 7.069 \quad \text{그리고} \quad \omega_2 = 12.491, \\ \alpha_3 l &= 10.210 \quad \text{그리고} \quad \omega_3 = 26.062 \end{aligned}$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 양변에  $\varphi_m$ 을 곱  
 하고  $x$ 에 대하여 적분한 후 고유함수의 직교성  
 을 이용하여 정리하면 다음과 같은 비선형 미분  
 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_n^2 u_n &= \varepsilon \left[ -2c_n \frac{du_n}{dt} + s_{n0} u_1^3 \right. \\ &\quad + s_{n1} u_1^2 u_2 + s_{n2} u_1 u_2^2 + s_{n3} u_2^3 \\ &\quad + s_{n4} u_1^2 u_3 + s_{n5} u_1 u_2 u_3 + s_{n6} u_2^2 u_3 \\ &\quad + s_{n7} u_1 u_3^2 + s_{n8} u_2 u_3^2 + s_{n9} u_3^3 \\ &\quad \left. + F_n(t) \right], \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} s_{10} &= -2.071, & s_{11} &= -2.311, & s_{12} &= -8.289, & s_{13} &= -2.870, \\ s_{14} &= 2.050, & s_{15} &= -1.796, & s_{16} &= 1.450, & s_{17} &= -17.367, \\ s_{18} &= -5.364, & s_{19} &= 5.581, & s_{20} &= -0.770, & s_{21} &= -8.289, \\ s_{22} &= -8.610, & s_{23} &= -28.752, & s_{24} &= -0.898, & s_{25} &= 2.999, \\ s_{26} &= -15.722, & s_{27} &= -5.364, & s_{28} &= -64.940, & s_{29} &= -11.489, \\ s_{30} &= 0.683, & s_{31} &= -0.898, & s_{32} &= 1.450, & s_{33} &= -5.241, \\ s_{34} &= -17.367, & s_{35} &= -10.728, & s_{36} &= -64.940, & s_{37} &= 16.744, \\ s_{38} &= -34.467, & s_{39} &= -138.173, \end{aligned}$$

$$c_n = \int_0^l c \varphi_n^2 dx,$$

$$F_n(t) = \int_0^l P(x, t) \varphi_n dx.$$

직접 가진되는 모드 ( $u_1$  과  $u_3$ )가 직접 가진 되지 않는 모드( $u_2$ )에 어떤 영향을 미치는지를 조사하기 위하여 두 번째 모드의 절점, 즉

$$\varphi_2 = e_2[\sin(a_2 x_w) - R_2 \sinh(a_2 x_w)] = 0$$

을 만족하는 점  $x_w = 0.885$ 에 불규칙 가진력  $P(x, t) = W(t)$ 가 집중하중으로 작용하면 각 모드에 작용하는 불규칙 가진력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \int_0^l \delta(x - x_w) \varphi_1(x) W(t) dx = f_1 W(t), \\ F_2(t) &= \int_0^l \delta(x - x_w) \varphi_2(x) W(t) dx = f_2 W(t), \quad (6) \\ F_3(t) &= \int_0^l \delta(x - x_w) \varphi_3(x) W(t) dx = f_3 W(t). \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1(x_w) = 1.063, \\ f_2 &= \varphi_2(x_w) = 0, \\ f_3 &= \varphi_3(x_w) = -0.979 \end{aligned}$$

이다.  $W(t)$ 는 평균이 0 이고 다음과 같은 상관 관계를 가지는 백색잡음이라고 가정한다.

$$R_{WW}(\Delta t) = E[W(t)W(t+\Delta t)] = 2D\delta(\Delta t) \quad (7)$$

여기서  $2D$ 는 진동수를  $f(= \omega/2\pi)$ 로 표현할 때의 스펙트럼밀도이고  $\delta(\Delta t)$ 는 Dirac delta 함수이다.

### 3. Fokker-Planck 방정식

다음과 같은 좌표변환을 도입하고

$$\begin{aligned} \{u_1, u_1', u_2, u_2', u_3, u_3'\}^T &= \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}^T \\ &= \mathbf{X} \end{aligned}$$

불규칙 과정  $W(t)$ 를 브라운 과정(Brownian process)  $B(t)$ 의 도함수(formal derivative) 즉,  $W(t) = dB/dt$  로 나타내면 식(5)는 다음과 같은 Itô 방정식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} dX_1 &= X_2 dt, \\ dX_2 &= [ -\omega_1^2 X_1 + \varepsilon(-2c_1 X_2 + s_{10} X_1^3 + s_{11} X_1^2 X_3 \\ &\quad + s_{12} X_1 X_3^2 + s_{13} X_3^3 + s_{14} X_1^2 X_5 + s_{15} X_1 X_3 X_5 \\ &\quad + s_{16} X_3^2 X_5 + s_{17} X_1 X_5^2 + s_{18} X_3 X_5^2 + s_{19} X_5^3)] dt \\ &\quad + \varepsilon f_1 dB, \\ dX_3 &= X_4 dt, \\ dX_4 &= [ -\omega_2^2 X_3 + \varepsilon(-2c_2 X_4 + s_{20} X_1^3 + s_{21} X_1^2 X_3 \\ &\quad + s_{22} X_1 X_3^2 + s_{23} X_3^3 + s_{24} X_1^2 X_5 + s_{25} X_1 X_3 X_5 \\ &\quad + s_{26} X_3^2 X_5 + s_{27} X_1 X_5^2 + s_{28} X_3 X_5^2 + s_{29} X_5^3)] dt \\ &\quad + \varepsilon f_2 dB, \\ dX_5 &= X_6 dt, \\ dX_6 &= [ -\omega_3^2 X_5 + \varepsilon(-2c_3 X_6 + s_{30} X_1^3 + s_{31} X_1^2 X_3 \\ &\quad + s_{32} X_1 X_3^2 + s_{33} X_3^3 + s_{34} X_1^2 X_5 + s_{35} X_1 X_3 X_5 \\ &\quad + s_{36} X_3^2 X_5 + s_{37} X_1 X_5^2 + s_{38} X_3 X_5^2 + s_{39} X_5^3)] dt \\ &\quad + \varepsilon f_3 dB \end{aligned} \quad (8)$$

이제 Markov 벡터  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}^T$ 를 Fokker-Planck 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) &= - \sum_{j=1}^6 \frac{\partial}{\partial x_j} [a_j(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} [b_{jk}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)] \end{aligned} \quad (9)$$

에 적용하기로 한다. 여기서  $p(\mathbf{x}, t)$ 는 결합 확률밀도함수(joint probability density function)이고  $a_j(\mathbf{x}, t)$ 와  $b_{jk}(\mathbf{x}, t)$ 는 각각 Markov 과정  $\mathbf{X}(t)$ 의 1차 및 2차 증가모멘트(incremental moment)이며  $x_j$ 는  $\mathbf{x}$ 의 성분(component)이다. 이러한 증가모멘트는 다음과 같이 정의된다<sup>(13)</sup>.



$$a_j(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} E\{X_j(t + \delta t) - X_j(t) \mid X(t) = \mathbf{x}\} \quad (10)$$

$$b_{jk}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} E\{[X_j(t + \delta t) - X_j(t)] \times [X_k(t + \delta t) - X_k(t)] \mid X(t) = \mathbf{x}\} \quad (11)$$

#### 4. 모멘트 방정식

Fokker-Planck 방정식 (9)로부터 완전해  $p(\mathbf{x}, t)$  를 구하는 것은 불가능하지만, <sup>(14,15)</sup> 임의의 차수  $n(=a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)$ 에 대한  $p(\mathbf{x}, t)$  의 모멘트 방정식은 식 (9)에  $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} x_4^{a_4} x_5^{a_5} x_6^{a_6}$  을 곱하고 전 상태공간  $(-\infty < x_i < \infty)$  에 대해 적분함으로써 얻을 수 있다.

다음과 같은 표현

$$m_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6}(r) = E[X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} X_4^{a_4} X_5^{a_5} X_6^{a_6}] \\ = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} x_4^{a_4} x_5^{a_5} x_6^{a_6} p(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6$$

을 사용하면  $n$  차에 대한 모멘트 방정식은 다음과 같다.

$$m'_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6} = \\ \alpha_1 m_{a_1-1, a_2+1, a_3, a_4, a_5, a_6} \\ - \alpha_2 \omega_1^2 m_{a_1+1, a_2-1, a_3, a_4, a_5, a_6} \\ + \alpha_3 m_{a_1, a_2, a_3-1, a_4+1, a_5, a_6} \\ - \alpha_4 \omega_2^2 m_{a_1, a_2, a_3+1, a_4-1, a_5, a_6} \\ + \alpha_5 m_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5-1, a_6+1} \\ - \alpha_6 \omega_3^2 m_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5+1, a_6-1} \\ + \epsilon S_{10} \alpha_2 m_{a_1+3, a_2-1, a_3, a_4, a_5, a_6} \\ - 2\epsilon C_1 \alpha_2 m_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6} \\ + \epsilon S_{11} \alpha_2 m_{a_1+2, a_2-1, a_3+1, a_4, a_5, a_6} \\ + \epsilon S_{12} \alpha_2 m_{a_1+1, a_2-1, a_3+2, a_4, a_5, a_6} \\ + \epsilon S_{13} \alpha_2 m_{a_1, a_2-1, a_3+3, a_4, a_5, a_6} \\ + \epsilon S_{14} \alpha_2 m_{a_1+2, a_2-1, a_3+3, a_4, a_5+1, a_6} \\ + \epsilon S_{15} \alpha_2 m_{a_1+1, a_2-1, a_3+1, a_4, a_5+1, a_6} \\ + \epsilon S_{16} \alpha_2 m_{a_1, a_2-1, a_3+2, a_4, a_5+1, a_6} \\ + \epsilon S_{17} \alpha_2 m_{a_1+1, a_2-1, a_3, a_4, a_5+2, a_6} \\ + \epsilon S_{18} \alpha_2 m_{a_1, a_2-1, a_3+1, a_4, a_5+2, a_6} \\ + \epsilon S_{19} \alpha_2 m_{a_1, a_2-1, a_3, a_4, a_5+3, a_6}$$

$$+ \epsilon S_{20} \alpha_4 m_{a_1+3, a_2, a_3, a_4-1, a_5, a_6} \\ - 2\epsilon C_2 \alpha_4 m_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6} \\ + \epsilon S_{21} \alpha_4 m_{a_1+2, a_2, a_3+1, a_4-1, a_5, a_6} \\ + \epsilon S_{22} \alpha_4 m_{a_1+1, a_2, a_3+2, a_4-1, a_5, a_6} \\ + \epsilon S_{23} \alpha_4 m_{a_1, a_2, a_3+3, a_4-1, a_5, a_6} \\ + \epsilon S_{24} \alpha_4 m_{a_1+2, a_2, a_3+3, a_4-1, a_5+1, a_6} \\ + \epsilon S_{25} \alpha_4 m_{a_1+1, a_2, a_3+1, a_4-1, a_5+1, a_6} \\ + \epsilon S_{26} \alpha_4 m_{a_1, a_2, a_3+2, a_4-1, a_5+1, a_6} \\ + \epsilon S_{27} \alpha_4 m_{a_1+1, a_2, a_3, a_4-1, a_5+2, a_6} \\ + \epsilon S_{28} \alpha_4 m_{a_1, a_2, a_3+1, a_4-1, a_5+2, a_6} \\ + \epsilon S_{29} \alpha_4 m_{a_1, a_2, a_3, a_4-1, a_5+3, a_6} \\ + \epsilon S_{30} \alpha_6 m_{a_1+3, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6-1} \\ - 2\epsilon C_3 \alpha_6 m_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6} \\ + \epsilon S_{31} \alpha_6 m_{a_1+2, a_2, a_3+1, a_4, a_5, a_6-1} \\ + \epsilon S_{32} \alpha_6 m_{a_1+1, a_2, a_3+2, a_4, a_5, a_6-1} \\ + \epsilon S_{33} \alpha_6 m_{a_1, a_2, a_3+3, a_4, a_5, a_6-1} \\ + \epsilon S_{34} \alpha_6 m_{a_1+2, a_2, a_3+3, a_4, a_5+1, a_6-1} \\ + \epsilon S_{35} \alpha_6 m_{a_1+1, a_2, a_3+1, a_4, a_5+1, a_6-1} \\ + \epsilon S_{36} \alpha_6 m_{a_1, a_2, a_3+2, a_4, a_5+1, a_6-1} \\ + \epsilon S_{37} \alpha_6 m_{a_1+1, a_2, a_3, a_4, a_5+2, a_6-1} \\ + \epsilon S_{38} \alpha_6 m_{a_1, a_2, a_3+1, a_4, a_5+2, a_6-1} \\ + \epsilon S_{39} \alpha_6 m_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5+3, a_6-1} \\ + \epsilon^2 \alpha_2 (\alpha_2 - 1) f_1^2 Dm_{a_1, a_2-2, a_3, a_4, a_5, a_6} \\ + \epsilon^2 \alpha_4 (\alpha_4 - 1) f_2^2 Dm_{a_1, a_2, a_3, a_4-2, a_5, a_6} \\ + \epsilon^2 \alpha_6 (\alpha_6 - 1) f_3^2 Dm_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6-2} \\ + 2\alpha_2 \alpha_4 f_1 f_2 Dm_{a_1, a_2-1, a_3, a_4-1, a_5, a_6} \\ + 2\alpha_2 \alpha_6 f_1 f_3 Dm_{a_1, a_2-1, a_3, a_4, a_5, a_6-1} \\ + 2\alpha_4 \alpha_6 f_2 f_3 Dm_{a_1, a_2, a_3, a_4-1, a_5, a_6-1} \quad (12)$$

#### 5. Closure 방법

모멘트 미분방정식 (12)를 살펴 보면 우변의 모멘트 차수가  $n+2$ 로서 좌변과 우변의 모멘트 차수가 같지 않음을 알 수 있다. 이러한 모멘트 미분방정식의 응답은  $n+1, n+2$ 차 모멘트를  $n$  차 이하의 모멘트로 전환하는 cumulant 절사방법을 사용함으로써 얻어진다. 이 방법에는, 응답의 확률밀도함수를 가우스 분포로 가정하느냐, 비가우스(non-Gaussian) 분포로 가정하느냐에 따라 분류되는 Gaussian closure 방법과 non-Gaussian closure 방법이 있다.

Gaussian closure 방법의 경우 식 (12)는  $n=1, 2$ 에 대해서 미분방정식을 전개할 수 있으며, 3차 및 4차 모멘트들을 1차 및 2차 모멘트로 전환하기 위하여 cumulant 절사방법을 사용한다. 3차 및 4차 cumulant와 모멘트는 다음



과 같은 관계에 있다.

$$\lambda_3[X_{\beta_1} X_{\beta_2} X_{\beta_3}] = E[X_{\beta_1} X_{\beta_2} X_{\beta_3}] - \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2} X_{\beta_3}] + 2E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3}] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4[X_{\beta_1} X_{\beta_2} X_{\beta_3} X_{\beta_4}] &= E[X_{\beta_1} X_{\beta_2} X_{\beta_3} X_{\beta_4}] \\ &\quad - \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2} X_{\beta_3} X_{\beta_4}] \\ &\quad + 2 \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3} X_{\beta_4}] \\ &\quad - \sum E[X_{\beta_1} X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3} X_{\beta_4}] \\ &\quad - 6E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3}]E[X_{\beta_4}] \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $\lambda_i$ 는  $i$ 차 cumulant이다. 계의 비선형성이 작은 경우, 계의 응답은 가우스 분포와 근사하므로 3차 이상의 cumulant들은 무시할 만하다. 따라서 식 (13)과 (14)에서  $\lambda_3$ 와  $\lambda_4$ 를 0으로 놓음으로써 3차 및 4차 모멘트들은 1차 또는 2차 모멘트로 표시될 수 있다. 2 모드 근사시 식 (12)는 14 개의 모멘트(4개의 1차 모멘트와 10개의 2차 모멘트) 미분방정식으로 정리되며, 3 모드 근사시 식 (12)는 27 개의 모멘트(6개의 1차 모멘트와 21개의 2차 모멘트) 미분방정식으로 정리된다.

Non-Gaussian closure 방법의 경우 응답 과정이 가우스 분포로 부터 약간 벗어난다고 한다면 식 (12)로부터  $n = 1 \sim 4$ 에 대해서 미분방정식을 전개할 수 있으며, 이때 생성되는 5차 및 6차 모멘트들은  $\lambda_5$ 와  $\lambda_6$ 을 0으로 놓음으로써 5차 이하의 모멘트로 전환할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda_5[X_{\beta_1} X_{\beta_2} X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5}] &= E[X_{\beta_1} X_{\beta_2} X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5}] \\ &\quad - \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2} X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5}] \\ &\quad + 2 \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5}] \\ &\quad - 6 \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3}]E[X_{\beta_4} X_{\beta_5}] \\ &\quad + 2 \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2} X_{\beta_3}]E[X_{\beta_4} X_{\beta_5}] \\ &\quad - \sum E[X_{\beta_1} X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5}] \\ &\quad + 24E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3}]E[X_{\beta_4}]E[X_{\beta_5}] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \lambda_6[X_{\beta_1} X_{\beta_2} X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5} X_{\beta_6}] &= E[X_{\beta_1} X_{\beta_2} X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad - \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2} X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad + 2 \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad - 6 \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3}]E[X_{\beta_4} X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad + 24 \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3}]E[X_{\beta_4}]E[X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad - 6 \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3} X_{\beta_4}]E[X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad - \sum E[X_{\beta_1} X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3} X_{\beta_4} X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad - \sum E[X_{\beta_1} X_{\beta_2} X_{\beta_3}]E[X_{\beta_4} X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad + 2 \sum E[X_{\beta_1} X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3} X_{\beta_4}]E[X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad + 2 \sum E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2} X_{\beta_3}]E[X_{\beta_4} X_{\beta_5} X_{\beta_6}] \\ &\quad + 120E[X_{\beta_1}]E[X_{\beta_2}]E[X_{\beta_3}]E[X_{\beta_4}]E[X_{\beta_5}]E[X_{\beta_6}] \end{aligned} \quad (16)$$

2 모드 근사시 식 (14)는 69 개의 모멘트(4개의 1차 모멘트, 10개의 2차 모멘트, 20개의 3차 모멘트, 그리고 35개의 4차 모멘트) 미분방정식으로 정리된다. 편의를 위하여 Gaussian closure 방법 또는 non-Gaussian closure 방법으로 얻어진 자율 상미분방정식(autonomous ordinary differential equations)으로 구성된 계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{m}' = f(\mathbf{m}) \quad (17)$$

여기서  $\mathbf{m} = \{m_{1,0,0,0,0,0}, m_{0,1,0,0,0,0}, \dots\}^T$ 는 모멘트 벡터이며  $f(\mathbf{m}) = \{f_1(\mathbf{m}), f_2(\mathbf{m}), \dots\}^T$ 은 이 계의 벡터장(vector field)이다.

## 6. Monte Carlo 시뮬레이션

두 closure 방법으로 구한 응답의 통계적 특성의 타당성을 조사하기 위하여 Monte Carlo 시뮬레이션<sup>(16,17)</sup>을 통해 식 (5)를 직접 수치적분하였다. 정상 가우스 과정  $W(t)$ 를 구성하기 위하여 1000 개의 표본 record를 사용하였는데, 각 record는 다음 식으로부터  $t = 1000$ 의 시간동안  $N = 40000$  개의 불규칙수(random number)를 순차적으로 표본함으로써 만들어진다.



$$W(t) = \sum_{j=1}^N \sqrt{2(4D)(f_{j+1} - f_j)} \sin(2\pi\sqrt{f_j f_{j+1}}t + \phi_j) \quad (18)$$

여기에서  $4D$ 는 한 방향 스펙트럼밀도(one-sided spectrum)이고,  $f_j$ 는 0에서 cut-off 주파수까지 오름차순으로 균일하게 분포되어 있는 불규칙주파수,  $\phi_j$ 는  $0 \sim 2\pi$ 사이에서 균일하게 분포되어 있는 불규칙 위상각이다.

### 7. 수치결과

수치예를 위하여 자율 상미분방정식 (17)을 수치적으로 적분함으로써 모멘트들의 거동을 조사하였다.

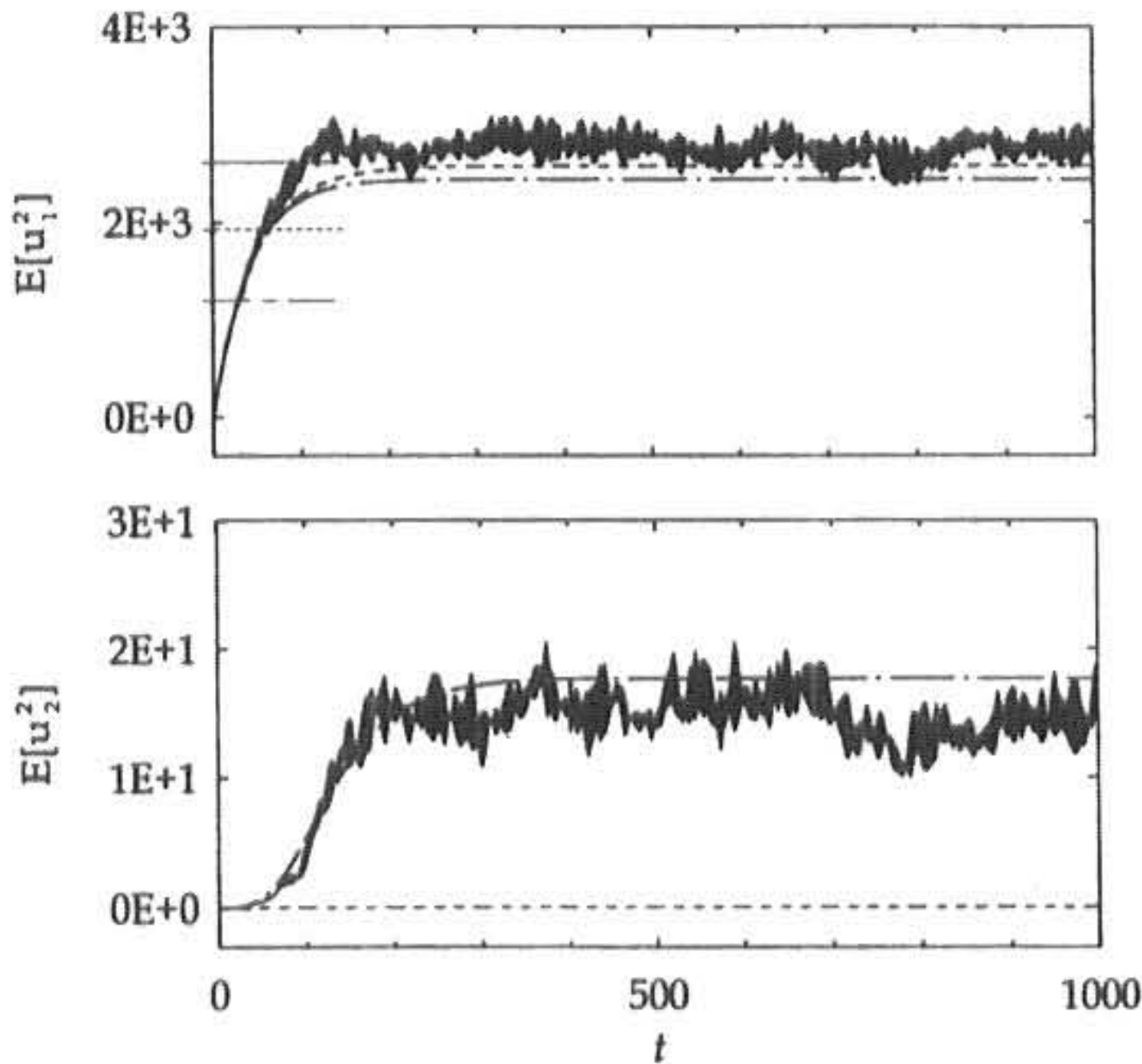


Fig. 3 Mean square time histories according to Gaussian closure, non-Gaussian closure, and Monte Carlo simulation ( $c_1 = c_2 = c_3 = 100, \epsilon = 0.0001, 2\epsilon^2 D = 1500$ ).  
 —, Gaussian closure(2 modes);  
 - - -, non-Gaussian closure(2 modes);  
 —, Monte Carlo simulation(3 modes).

Fig. 3은  $c_1 = c_2 = c_3 = 100, \epsilon = 0.0001, 2\epsilon^2 D = 1500$  일 때 운동의 제곱평균값이 시간이 경과함에 따라 어떻게 변화하는지를 보여 주기 위하여 2 모드 근사된 Gaussian closure 방법과 non-Gaussian closure 방법, 3 모드 근사된 Monte Carlo 시뮬레이션으로 얻어진 제곱평균값

답의 시간이력을 나타낸다. 이 그림에서 2 모드 근사인 경우 직접 가진되는 첫 번째 모드의 운동이, 3 모드 근사인 경우는 직접 가진되는 첫 번째 모드와 세 번째 모드의 운동이 계의 비선형 연성으로 인하여 직접 가진되지 않는 두 번째 모드로 에너지가 전달되었음을 보여 주고 있다.

Gaussian closure 방법의 경우 두 번째 모드로 에너지 전달이 이루어 지고 있으나 이 그림상에 표시되 않을 정도로 아주 미약하다. 또한 정상상태(steady state)에 도달했을 때 Gaussian closure 방법에 의한 응답과 non-Gaussian closure 방법에 의한 응답은 정상 과정(stationary process)을 나타내고 있다.

첫 번째 모드의 제곱평균값의 크기를 예측하는데 있어서 두 해석적 방법의 결과와 Monte-Carlo 시뮬레이션의 결과가 잘 일치함을 보여주고 있으나, 두 번째 모드의 제곱평균값의 크기를 예측하는 데 있어서 non-Gaussian closure 방법에 의한 결과가 Monte-Carlo 시뮬레이션 결과와 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 4는  $c_1 = c_2 = c_3 = 100, \epsilon = 0.0001$  인 경우에 제곱평균값의 한계를 가진력의 제곱평균값에 비례하는(또는 스펙트럼밀도  $2D$ 에 비례하는)  $2\epsilon^2 D$ 의 함수로 나타낸 것이다. 식 (5)를 선형화 했을 경우의 결과와 2 모드 및 3 모드 근사된 Gaussian closure 방법, 2 모드 근사된 non-Gaussian closure 방법, 2 모드 및 3 모드 근사된 Monte-Carlo 시뮬레이션의 결과를 나타낸 것이다.

Ibrahim 등<sup>(11)</sup>과 Lee 등<sup>(12)</sup>의 연구에서는 직접 가진되는 첫 번째 모드 및 세 번째 모드의 가진력의 크기가 어떤 임계치에 도달될 때 직접 가진되지 않는 두 번째 모드의 분기가 시작되었으나, 이 그림에서는 직접 가진되는 첫 번째 모드와 세 번째 모드의 가진력 크기의 증가에 따라서 직접 가진되지 않는 두 번째 모드가 함께 증가하고 있다. 가진력의 크기가 증가함에 따라서 첫 번째 모드의 응답 결과는 2 모드 및 3 모드 근사된 해석적 방법과 Monte Carlo 시뮬레이션이 잘 일치함을 보여 주고 있으나, 두 번째 모드의 응답 결과는  $2\epsilon^2 D$ 가 2000까지는 non-Gaussian closure 방법에 의한 결과와 Monte Carlo 시뮬레이션에



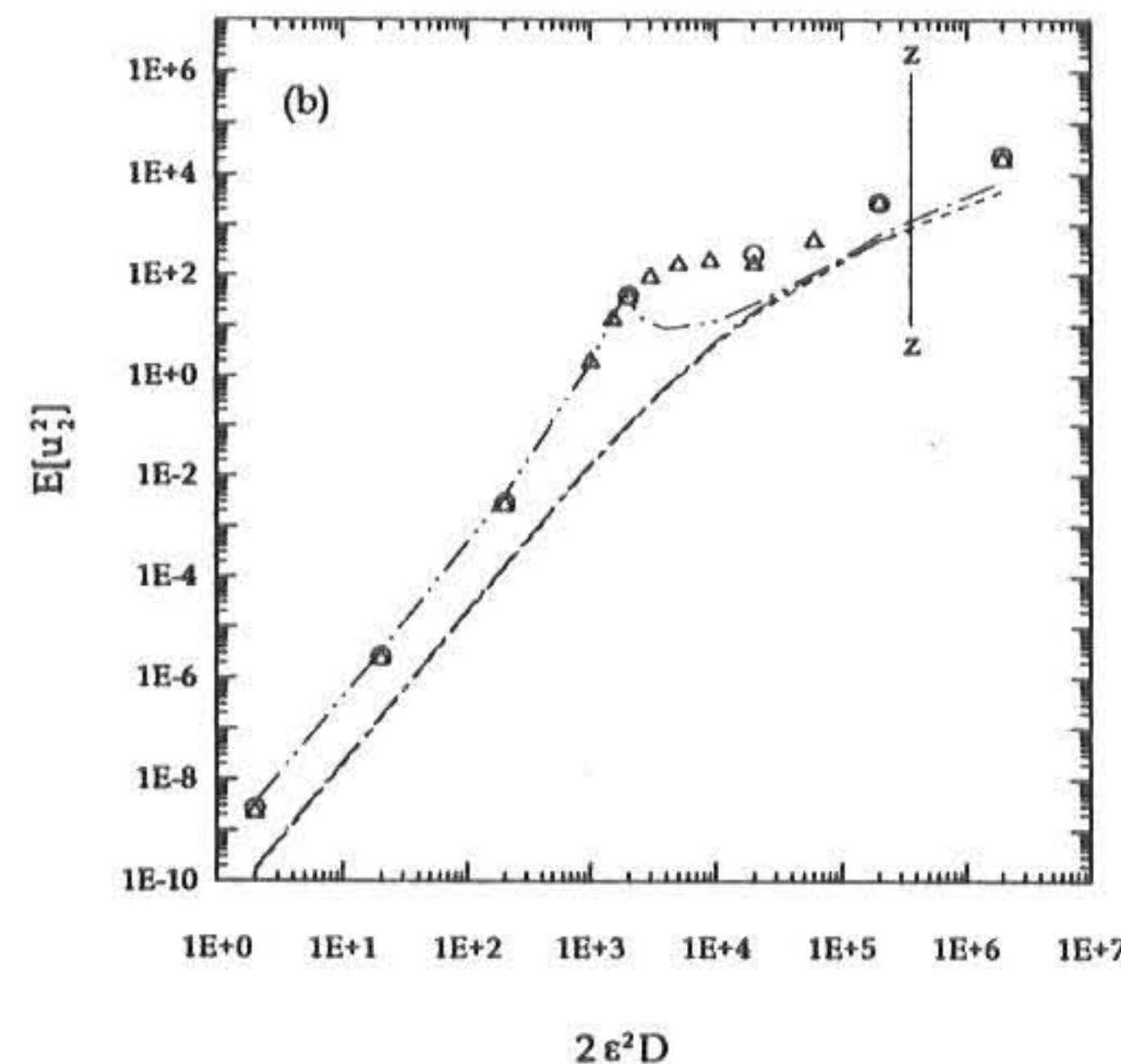
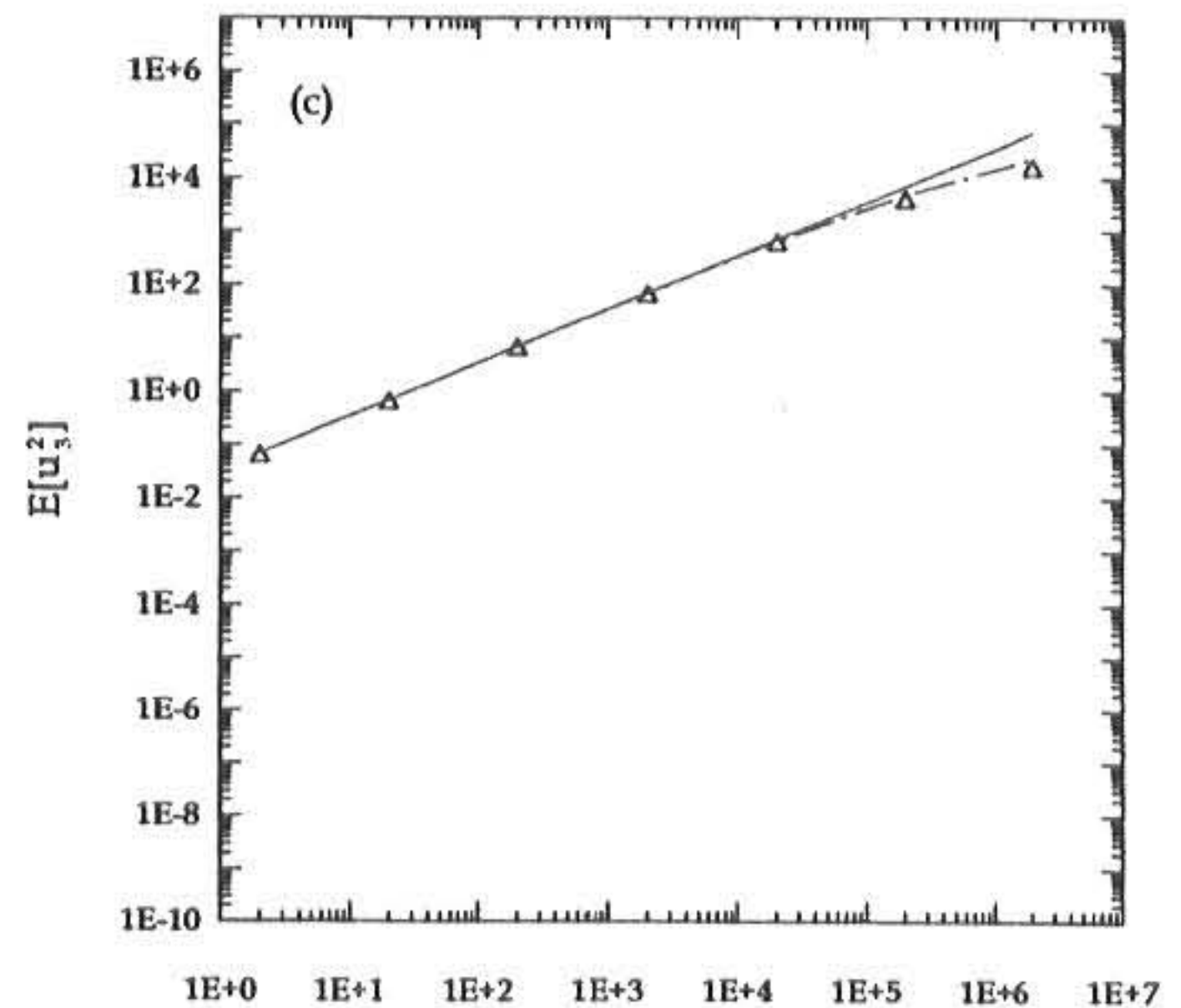
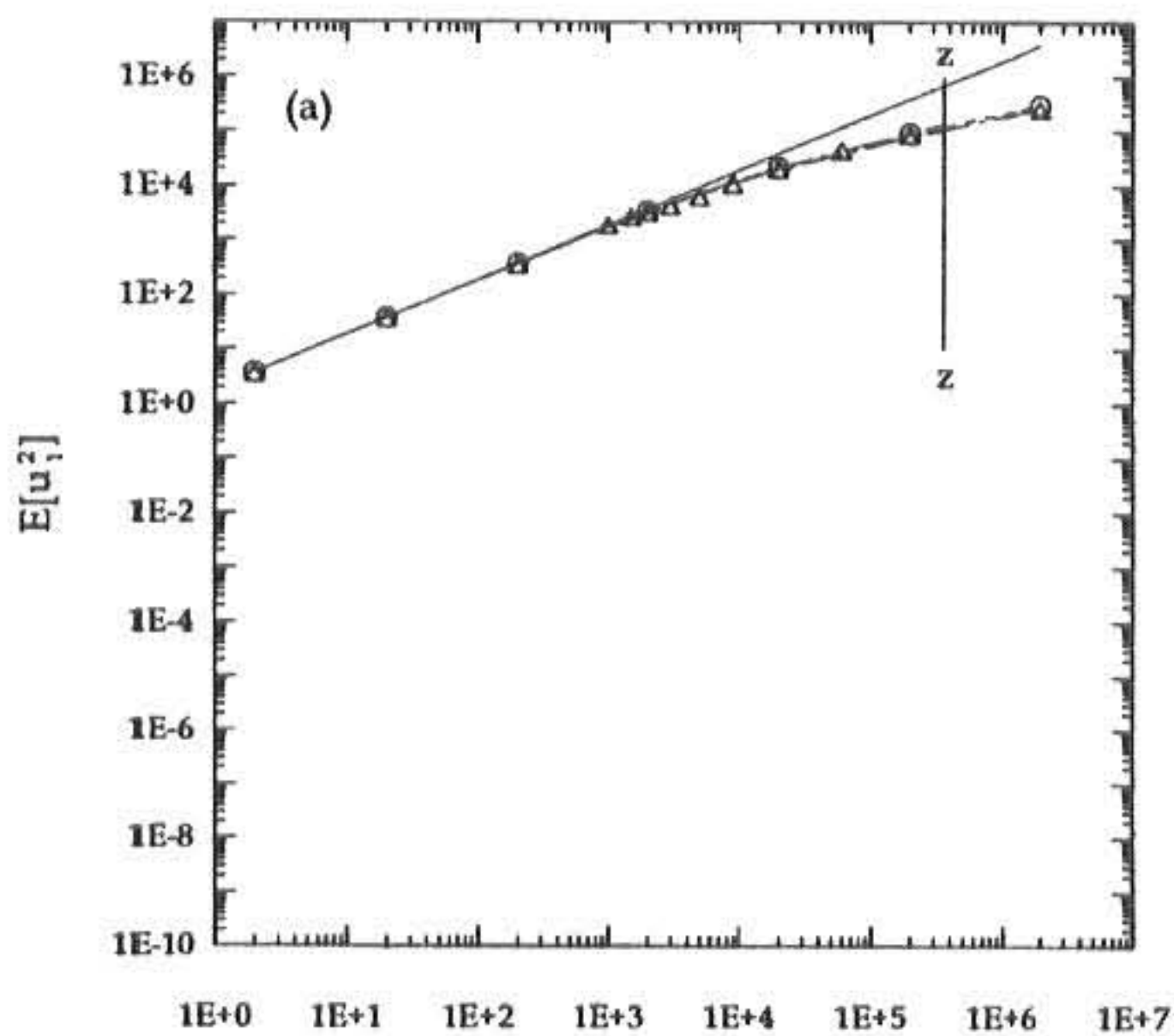


Fig. 4 Limits of mean square value plotted against  $2\epsilon^2 D$  according to Gaussian closure, non-Gaussian closure, and Monte Carlo simulation ( $c_1 = c_2 = c_3 = 100$ ,  $\epsilon = 0.0001$ ).

- ....., linear;
- , Gaussian closure(2 modes);
- , Gaussian closure(3 modes);
- , non-Gaussian closure(2 modes);
- , Monte Carlo simulation(2 modes);
- △, Monte Carlo simulation(3 modes).

(a) first mode ; (b) second mode ;  
(c) third mode.

의한 결과가 서로 잘 일치하고 있다. 또한 가진력의 크기가  $z-z$  선을 벗어나서는 non-Gaussian closure 방법으로는 수치적분 증분크기(stepsize)의 조정에도 불구하고 응답이 수렴하지 않았다. 이 그림에서 두 번째 모드의 응답은 Gaussian closure 방법과 Monte Carlo 시뮬레이션이 서로 달리 예측하고 있기는 하지만 하나의 공통점은 2 모드 근사해와 3 모드 근사해가 거의 일치함을 알 수 있다. 따라서 첫 번째 모드가 계의 응답을 지배함을 감안한다면 3 번째 모드를 해석에 추가한다고 해서 해석결과에 별 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있다.

### 8. 결 론

불규칙 가진력을 받는 연속계의 내부공진효과를 조사하기 위하여 hinged-clamped 보를 선택하였다. 직접가진되지 않는 모드의 분기 및 응답 특성을 조사하기 위하여 두 번째 모드의 절점에 불규칙 가진력을 작용하였고, 해석과정에 더 많은 모드를 포함시키면 어떤 결과를 낳게 될 것인지를 알아 보기 위하여 2 모드 및 3 모드 내부공진효과를 고려하였다. 해석적 방법으로는 Gaussian closure 방법과 non-Gaussian closure 방법이 사용되었고 수치적 방법으로는 Monte Carlo 시뮬레이션이 사용되었다. 내부공진 영역에서 계의 비선형 연성으로 인하여 직접 가진되는 첫 번째 모드 및 세 번째 모드로 부터 직접 가진되지 않는 두 번째 모드로 에너지가 전달됨을 이들 해석적인 방법과 수치적 시뮬레이션이



잘 예측하고 있음을 확인하였다. 정상상태에 도달했을 때 Gaussian closure 방법에 의한 응답과 non-Gaussian closure 방법에 의한 응답은 정상 과정을 나타내고 있으며 두 번째 모드의 제곱평균값의 크기를 예측하는 데 있어서 non-Gaussian closure 방법에 의한 결과와 Monte-Carlo 시뮬레이션 결과가 어떤 한계까지는 서로 잘 일치함을 확인하였다. 두 번째 모드의 응답은 Gaussian closure 방법과 Monte Carlo 시뮬레이션이 서로 달리 예측하고 있기는 하지만 하나의 공통점은 2 모드 근사해와 3 모드 근사해가 거의 일치함을 알 수 있었으며 첫 번째 모드가 거의 응답을 지배함을 감안한다면 3 번째 모드를 해석에 추가한다고 해서 해석결과에 별 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있었다.

#### 참고문헌

- 1) Tseng, W. Y. and Dugundji, J., Non-linear Vibrations of a Beam under Harmonic Excitation, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, 292-297, (1970).
- 2) Atluri, S., Nonlinear Vibrations of a Hinged Beam including Nonlinear Inertia Effects, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, 121-126, (1973).
- 3) Lou, C. L. and Sikarskie, D. L., Nonlinear Vibration of Beams Using a Form-Function Approximation, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, 209-214, (1975).
- 4) Lewandowski, R., Application of the Ritz method to the Analysis of Nonlinear Free Vibrations of Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 114(1), 91-101, (1987).
- 5) Nayfeh, A. H., Mook, D. T. and Sridhar, S., Nonlinear Analysis of the Forced Response of Structural Elements, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 55(2), 181-291, (1974).
- 6) Sridhar, S., Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., Nonlinear Resonances in a Class of Multi - Degree - of - Freedom Systems, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 58(1), 113-123, (1975).
- 7) Nayfeh, A. H., and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons Inc., (1979).
- 8) Lee, W. K. and Soh, K. Y., Nonlinear Analysis of the Forced Response of a Beam with Three Mode Interaction, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 6, 49-68, (1994).
- 9) Lee, W. K. and Ghang, M. R., Domains of Attraction of a Forced Beam by Interpolated Mapping, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, 144-151, (1994).
- 10) Lee, W. K. and Kim, C. H., Evolution of Domains of Attraction of a Forced Beam with Two-Mode Interaction, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 14, 37-48, (1997).
- 11) Ibrahim, R. A., Lee, B. H., and Afaneh, A. A., Structural Modal Multifurcation With Internal Resonance-Part 2: Stochastic Approach, *ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 115, 193-201, (1993).
- 12) Lee, B. H. and Ibrahim, R. A., Stochastic Bifurcation in Non-linear Structural Systems near 1:1 Internal Resonance, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 9, 23-32, (1994).
- 13) Soong, T. T., *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press Inc., (1973).
- 14) Ibrahim, R. A., *Parametric Random Vibration*, John Wiley & Sons Inc., (1985).
- 15) Lin, Y., K. and Cai, G. Q., *Probabilistic Structural Dynamics Advanced Theory and Application*, McGraw-Hill, Inc., (1995).
- 16) Shinozuka, M. and Deodatis, G., Simulation of Stochastic Processes by Spectral Representation, *Applied Mechanics Review*, Vol. 44, 191-204, (1991).
- 17) Yang, C. Y., *Random Vibration of Structures*, John Wiley & Son, Inc., (1986).

---

(2000년 1월9일 접수, 2000년 2월25일 채택)